

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ МНОГОМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ НЕЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

А. А. Арзамасцев, Д. В. Залевский

*Кафедра математического моделирования и информационных технологий,
ФГБОУ ВО «ТГУ им. Г. Р. Державина», г. Тамбов, Россия; dimzal1991@yandex.ru*

Ключевые слова: аустабилизация; математическая модель; неявная разностная схема; система дифференциальных уравнений в частных производных.

Аннотация: Модифицирована математическая модель процесса аустабилизации температуры в клеточной ткани путем введения дополнительных уравнений в кинетику процесса, учитывающих лимитирование субстратом и кислородом; уточнены распределенные функции источников для температуры субстрата и кислорода; разработан алгоритм расчета системы уравнений на основе неявных разностных схем. Выявлено и подтверждено наличие процесса аустабилизации температуры в клеточной ткани на основе разработанной математической модели. Определены основные параметры, оказывающие влияние на скорость процесса аустабилизации; спроектированы и исследованы эффективные алгоритмы численного решения начально-краевых задач, описывающих математические модели аустабилизации температуры в распределенных многомерных объектах.

В работе [1] объяснена сущность явления аустабилизации факторов среды на основе идеализированной схемы протяженной проточной системы. С помощью математической модели показано отличие явления аустабилизации от простой стабилизации факторов на примере проточной системы типа хемостата. Предложено описание проточной системы, представляющее собой балансовые дифференциальные уравнения по температуре, концентрациям биомассы и растворенного в культуральной среде кислорода на основе экспериментальных данных [2].

Рассмотрим объект, представляющий собой прямоугольный параллелепипед, находящийся во внешней среде. Внешняя среда и сам объект представляют собой фрагменты клеточных тканей, различающиеся своими теплотворными и кинетическими свойствами. Будем считать, что во внешней области такие параметры, как температура, концентрация веществ являются постоянными, что позволяет задавать их воздействие на внутреннюю область граничными условиями, а именно функциями $g_1(t) - g_3(t)$. Математическая модель внутренней области должна составляться таким образом, чтобы с ее помощью можно было изучить как изменяются температура, концентрация веществ (субстрата и кислорода), а также зависимые от них параметры, такие как скорость процесса во внутренней области объекта.

Математическая модель, разработанная с указанными в [3] допущениями, принимает следующий вид [4]:

$$\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho} \left[\frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right] + w_x \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} + w_y \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} + w_z \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} + Q_T; \quad (1)$$

$$\frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial t} = D_S \left[\frac{\partial^2 S(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right] + w_x \frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial x} + w_y \frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial y} + w_z \frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial z} + Q_S; \quad (2)$$

$$\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial t} = D_C \left[\frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right] + w_x \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial x} + w_y \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial y} + w_z \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial z} + Q_C, \quad (3)$$

где $T(x, y, z, t)$, $S(x, y, z, t)$, $C(x, y, z, t)$ – соответственно температура, концентрации субстрата и растворенного кислорода в точке с координатами x, y, z в момент времени t ; λ – коэффициент теплопроводности; c, ρ – удельная теплоемкость и плотность клеточной ткани соответственно; D_S, D_C – коэффициенты диффузии для субстрата и кислорода соответственно; w_x, w_y, w_z – скорости конвективного переноса; Q_T, Q_S, Q_C – распределенные функции источников для температуры, субстрата и кислорода соответственно. Дифференциальные уравнения (1) – (3) описывают динамику температуры, субстрата и кислорода соответственно.

Для получения однозначного решения система (1) – (3) должна быть дополнена краевыми условиями.

Начальные условия:

$$T(x, y, z, 0) = T_0; \quad S(x, y, z, 0) = S_0; \quad C(x, y, z, 0) = C_0. \quad (4)$$

Границные условия:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=0} &= \eta_1 [T(0, y, z, t) - g_1(t)]; & \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=L_1} &= -\eta_1 [T(L_1, y, z, t) - g_1(t)]; \\ \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=0} &= \eta_1 [T(x, 0, z, t) - g_1(t)]; & \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=L_2} &= -\eta_1 [T(x, L_2, z, t) - g_1(t)]; \\ \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} &= \eta_1 [T(x, y, 0, t) - g_1(t)]; & \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=L_3} &= -\eta_1 [T(x, y, L_3, t) - g_1(t)], \end{aligned} \quad (5)$$

где η_1 – коэффициент теплопереноса; $g_1(t) = \text{const} = T^{**}$, T^{**} – температура рассматриваемого фрагмента клеточной ткани;

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=0} &= \eta_2 [S(0, y, z, t) - g_2(t)]; & \left. \frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=L_1} &= -\eta_2 [S(L_1, y, z, t) - g_2(t)]; \\ \left. \frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=0} &= \eta_2 [S(x, 0, z, t) - g_2(t)]; & \left. \frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=L_2} &= -\eta_2 [S(x, L_2, z, t) - g_2(t)]; \\ \left. \frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} &= \eta_2 [S(x, y, 0, t) - g_2(t)]; & \left. \frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=L_3} &= -\eta_2 [S(x, y, L_3, t) - g_2(t)], \end{aligned} \quad (6)$$

где η_2 – коэффициент массопереноса; $g_2(t) = \text{const} = S^*$, S^* – концентрация субстрата области;

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial x}\right|_{x=0} &= \eta_3[C(0, y, z, t) - g_3(t)]; \quad \left.\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial x}\right|_{x=L_1} = -\eta_3[C(L_1, y, z, t) - g_3(t)]; \\ \left.\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial y}\right|_{y=0} &= \eta_3[C(x, 0, z, t) - g_3(t)]; \quad \left.\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial y}\right|_{y=L_2} = -\eta_3[C(x, L_2, z, t) - g_3(t)]; \\ \left.\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial z}\right|_{z=0} &= \eta_3[C(x, y, 0, t) - g_3(t)]; \quad \left.\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial z}\right|_{z=L_3} = -\eta_3[C(x, y, L_3, t) - g_3(t)],\end{aligned}\tag{7}$$

где η_3 – коэффициент массопереноса; $g_3(t) = \text{const} = C^*$, C^* – концентрация субстрата области.

С учетом специфики биохимических превращений и макрокинетики реакций выражения для расчета функций источников могут быть записаны в следующем виде:

$$Q_T = v^{\max}[T(x, y, z, t)] \frac{H}{c_p S(x, y, z, t) + K_S} \frac{C(x, y, z, t)}{C(x, y, z, t) + K_C};\tag{8}$$

$$Q_S = -\frac{v^{\max}[T(x, y, z, t)]}{Y} \frac{S(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t) + K_S} \frac{C(x, y, z, t)}{C(x, y, z, t) + K_C};\tag{9}$$

$$Q_C = \frac{S(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t) + K_S} \frac{C(x, y, z, t)}{C(x, y, z, t) + K_C} (v^{\max}[T(x, y, z, t)] \beta + \alpha),\tag{10}$$

где v^{\max} – максимальная удельная скорость биохимических реакций; H – интегральный тепловой эффект биохимической реакции; Y , K_S , K_C – кинетические параметры; α , β – скорости потребления кислорода на эндогенное дыхание и ростовые процессы соответственно;

$$v^{\max}[T(x, y, z, t)] = a_1 e^{-\frac{E_1}{RT(x, y, z, t)}} - a_2 e^{-\frac{E_2}{RT(x, y, z, t)}},\tag{11}$$

где a_1 , a_2 – предэкспоненциальные множители; E_1 , E_2 – энергии активации.

Таким образом, модель (1) – (11) представляет собой замкнутую систему, которая может быть решена при задании следующих параметров: размер клеточной ткани, H , K_S , K_C , a_1 , a_2 , E_1 , E_2 , c , ρ , α , β , D_S , D_C , w_x , w_y , w_z , λ , T_0 , S_0 , C_0 , T^{**} , S^* , C^* , η_1 , η_2 , η_3 , на выходе наблюдаем динамику изменения температуры, концентрации субстрата и кислорода в любой точке. Данная система уравнений представляет собой систему уравнений параболического типа и может быть решена численно разностными методами [5].

Для рассматриваемого случая применим неявную разностную схему с обратной связью, которая наиболее эффективна при рассмотрении одномерного случая в работе [6]. Также будем использовать схемы расщепления при рассмотрении уравнений по каждой из существующих переменных в системе уравнений (1) – (3).

Рассмотрим уравнение (1) и используем схему расщепления к следующим временным интервалам: $[n; n + 1/3]$, $[n + 1/3; n + 2/3]$, $[n + 2/3; n + 1]$.

Составим разностную схему для интервала $[n; n + 1/3]$ и в качестве переменной дифференцирования выберем параметр X :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{i+1,j,k}^{n+1/3} - T_{i-1,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i-1,j,k}^{n+1/3} - 2T_{i,j,k}^{n+1/3} + T_{i+1,j,k}^{n+1/3}}{\Delta x^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial y} &\approx \frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2\Delta y}; & \frac{\partial T}{\partial z} &\approx \frac{T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z}; \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &\approx \frac{T_{i,j-1,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j+1,k}^n}{\Delta y^2}; & \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &\approx \frac{T_{i,j,k-1}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k+1}^n}{\Delta z^2}.\end{aligned}$$

Дополнительно предположим, что будем использовать прямоугольный параллелепипед, то есть $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$.

Подставим полученные схемы в уравнение (1) и проведем дополнительные преобразования:

$$\begin{aligned}T_{i,j,k}^{n+1/3} - T_{i,j,k}^n &= \frac{\lambda\Delta t}{c\rho h^2} \left[T_{i-1,j,k}^{n+1/3} - 2T_{i,j,k}^{n+1/3} + T_{i+1,j,k}^{n+1/3} + T_{i,j-1,k}^n \right. \\ &\quad \left. - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j+1,k}^n + T_{i,j,k-1}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k+1}^n \right] + \\ &\quad + \frac{w_x\Delta t}{h} \left[T_{i+1,j,k}^{n+1/3} - T_{i-1,j,k}^{n+1/3} \right] + \frac{w_y\Delta t}{h} \left[T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n \right] + \\ &\quad + \frac{w_z\Delta t}{h} \left[T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n \right] + Q_t - \left[\frac{\lambda\Delta t}{c\rho h^2} - \frac{w_x\Delta t}{h} \right] T_{i-1,j,k}^{n+1/3} + \\ &\quad + \left[1 - \frac{2\lambda\Delta t}{c\rho h^2} \right] T_{i,j,k}^{n+1/3} - \left[\frac{\lambda\Delta t}{c\rho h^2} + \frac{w_x\Delta t}{h} \right] T_{i+1,j,k}^{n+1/3} + \\ &= \left[1 - \frac{4\lambda\Delta t}{c\rho h^2} \right] T_{i,j,k}^n + \left[\left[\frac{\lambda\Delta t}{c\rho h^2} + \frac{w_y\Delta t}{h} \right] T_{i,j+1,k}^n + \left[\frac{\lambda\Delta t}{c\rho h^2} - \frac{w_y\Delta t}{h} \right] T_{i,j-1,k}^n \right] + \\ &\quad + \left[\left[\frac{\lambda\Delta t}{c\rho h^2} + \frac{w_z\Delta t}{h} \right] T_{i,j,k+1}^n + \left[\frac{\lambda\Delta t}{c\rho h^2} - \frac{w_z\Delta t}{h} \right] T_{i,j,k-1}^n \right] + Q_t.\end{aligned}$$

Введем дополнительные коэффициенты:

$$\begin{aligned}r_1 &= -\left[\frac{\lambda\Delta t}{c\rho h^2} - \frac{w_x\Delta t}{h} \right]; & r_2 &= \left[1 - \frac{2\lambda\Delta t}{c\rho h^2} \right]; & r_3 &= -\left[\frac{\lambda\Delta t}{c\rho h^2} + \frac{w_x\Delta t}{h} \right]; & r_4 &= \left[1 - \frac{4\lambda\Delta t}{c\rho h^2} \right]; \\ r_5 &= \left[\frac{\lambda\Delta t}{c\rho h^2} + \frac{w_y\Delta t}{h} \right]; & r_6 &= \left[\frac{\lambda\Delta t}{c\rho h^2} - \frac{w_y\Delta t}{h} \right]; & r_7 &= \left[\frac{\lambda\Delta t}{c\rho h^2} + \frac{w_z\Delta t}{h} \right]; & r_8 &= \left[\frac{\lambda\Delta t}{c\rho h^2} - \frac{w_z\Delta t}{h} \right]\end{aligned}$$

и преобразуем уравнение к следующему виду

$$\begin{aligned}r_1 T_{i-1,j,k}^{n+1/3} + r_2 T_{i,j,k}^{n+1/3} + r_3 T_{i+1,j,k}^{n+1/3} &= r_4 T_{i,j,k}^n + \left[r_5 T_{i,j+1,k}^n + r_6 T_{i,j-1,k}^n \right] + \\ &\quad + \left[r_7 T_{i,j,k+1}^n + r_8 T_{i,j,k-1}^n \right] + Q_t.\end{aligned}$$

В результате получим трехдиагональную матрицу, которую можно решать с использованием метода Гаусса

$$Ax = B.$$

Сформируем следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} r_2 & r_3 & 0 & 0 \\ r_1 & r_2 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & r_3 \\ 0 & 0 & r_1 & r_2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} T_{1,j,k}^{n+1/3} \\ T_{2,j,k}^{n+1/3} \\ \dots \\ T_{m-1,j,k}^{n+1/3} \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} r_4 T_{1,j,k}^n + [r_5 T_{1,j+1,k}^n + r_6 T_{1,j-1,k}^n] + [r_7 T_{1,j,k+1}^n + r_8 T_{1,j,k-1}^n] + Q_{1,j,k}^n \\ r_4 T_{2,j,k}^n + [r_5 T_{2,j+1,k}^n + r_6 T_{2,j-1,k}^n] + [r_7 T_{2,j,k+1}^n + r_8 T_{2,j,k-1}^n] + Q_{2,j,k}^n \\ \dots \\ r_4 T_{m_1-1,j,k}^n + [r_5 T_{m_1-1,j+1,k}^n + r_6 T_{m_1-1,j-1,k}^n] + [r_7 T_{m_1-1,j,k+1}^n + r_8 T_{m_1-1,j,k-1}^n] + Q_{m_1-1,j,k}^n \end{pmatrix}.$$

Также аналогичным образом осуществим преобразование дополнительных уравнений (8) – (11):

$$v^{\max}[T_{i,j,k}^n] = \begin{bmatrix} -\frac{E_1}{RT_{1,j,k}^n} & -\frac{E_2}{RT_{1,j,k}^n} \\ a_1 e^{-\frac{E_1}{RT_{1,j,k}^n}} - a_2 e^{-\frac{E_2}{RT_{1,j,k}^n}} \end{bmatrix};$$

$$Q[T_{i,j,k}^n] = v^{\max}[T_{i,j,k}^n] H \frac{S_{1,j,k}^n}{\rho c S_{1,j,k}^n + K_S C_{1,j,k}^n} \frac{C_{1,j,k}^n}{C_{1,j,k}^n + K_C}.$$

В результате получим трехдиагональную матрицу, которую можно решать с использованием метода Гаусса аналогично решению матрицы на интервале $[n; n + 1/3]$. Преобразования дополнительных уравнений (8) – (11) осуществим таким же образом, как в случае рассмотрения предыдущего интервала.

Составляем разностные схемы для интервала $[n + 2/3; n + 1]$, аналогичным образом осуществляя составление систем уравнений для S и C . В результате на каждом из рассматриваемых интервалов разбиения дифференцируемого уравнения все показатели известны, и возможно получить новые значения на интервале времени $(t + 1/3)$. В качестве объекта для эксперимента выбрана клеточная ткань, содержащая в себе $10 \times 10 \times 10$ клеток, в качестве клетки для получения статистических данных выбран слой $z = 6$, являющийся центром куба. В результате использования указанного выше подхода удалось сократить время вычислений с 14...16 ч (с использованием явной разностной схемы) до 45...60 мин.

На рисунке 1 показана зависимость концентрации растворенного кислорода в центре куба от времени. В начальный момент времени C быстро уменьшается от концентрации насыщения до уровня близкого к 0. Это значение сохраняется в течение всего периода, пока аутостабилизация температуры не наступает ($t = 0,01 \dots 14,5$ ч). Как только процесс входит в режим аутостабилизации, скорость обменных процессов, потребление кислорода на эндогенные и экзогенные цели уменьшаются, в результате чего концентрация возрастает и достигает при $t = 20 \dots 25$ ч уровня насыщения.

На рисунке 2 изображена динамика изменения температурных профилей кислорода при фиксированной координате z объекта и при различных координатах x и y . Концентрация кислорода падает практически до 0, ненулевые линии концентрации наблюдаются лишь в граничных областях, что связано с поступлением кислорода с соответствующими конвективными потоками (см. рис. 2, а). По мере того как температура объекта увеличивается и приближается к супраоптимальной (см. рис. 2), наблюдается увеличение скорости биохимической реакции, что приводит к увеличению концентрации кислорода. Биохимические процессы идут при аутостабилизации менее интенсивно, поэтому снижается потребление кислорода. Концентрация кислорода становится практически в три раза меньше, чем концентрация насыщения при данной температуре (см. рис. 2, б). По мере приближения к температуре аутостабилизации (см. рис. 2), концентрация кислорода в целом возрастает и практически линейно изменяется по отношению к x и y .

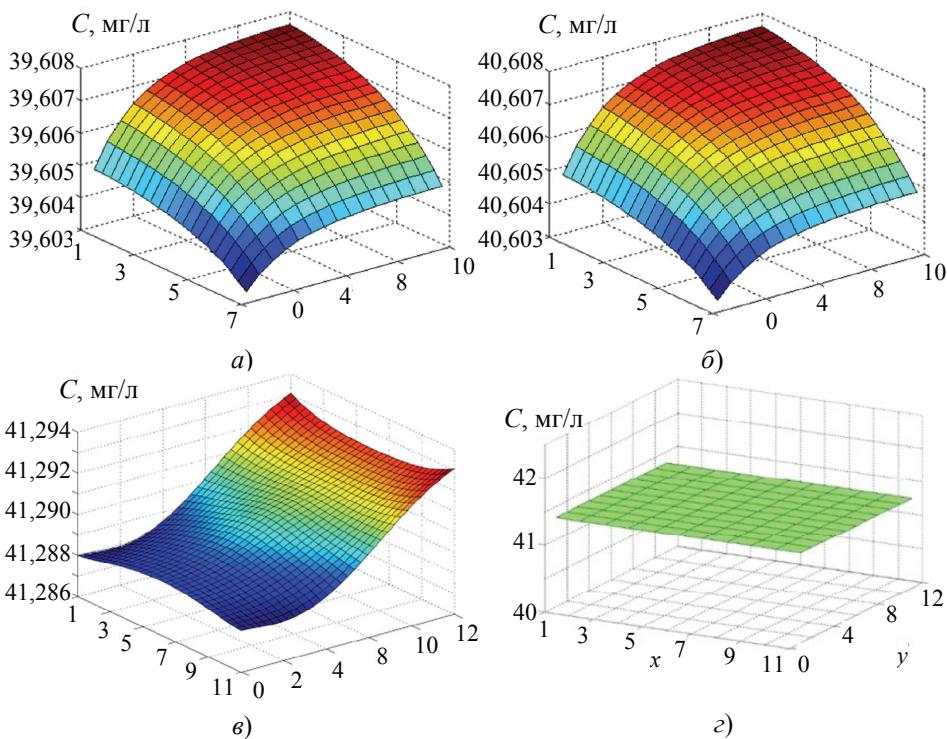


Рис. 1. Концентрация кислорода в клеточной ткани при $z = 6$ в момент времени t :
 $a - 0,1; \delta - 13; \varepsilon - 14; \varepsilon - 15$ ч; x, y, z – номера клеток; точность вычислений $dh = 0,0001$

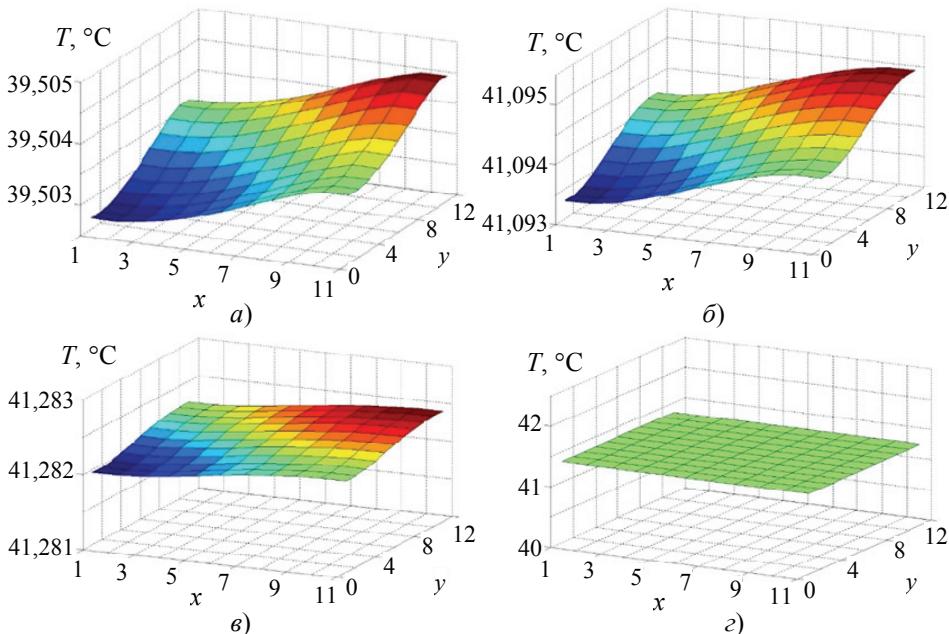


Рис. 2. Температура в клеточной ткани при $z = 6$ в промежутки времени t :
 $a - 0,1; \delta - 13; \varepsilon - 14; \varepsilon - 15$ ч; x, y, z – номера клеток

Линейность ранее наблюдалась в работе [3] при изменении концентраций биомассы и субстрата. Показано, что явление аутостабилизации часто сопряжено с нулевым порядком биохимической реакции. В данном случае ограничивающим агентом является кислород.

Заключительным этапом исследования стали вычислительные эксперименты, направленные на определение величины, которая влияет на скорость процесса во внутренней области объекта. Изменяя коэффициент теплопередачи на границе η_1 , можно контролировать рост внутренней области биообъекта. При $\eta_1 = 0$ в момент времени $t = 23$ ч концентрация растворенного кислорода достигает стабильного значения, которое равно уровню насыщения, в это же время концентрация субстрата становится равной концентрации во внешней области. Скорость метаболизма в данный момент достигает нулевого значения. При увеличении значения $\eta_1 = 0,001 \text{ ч}^{-1}$ достигаемые уровни концентраций субстрата и растворенного кислорода снижаются, следовательно скорость процесса увеличивается, и при значении $\eta_1 = 0,01 \text{ ч}^{-1}$ становится настолько велика, что концентрация кислорода достигает значения, равного половине значения уровня насыщения. При дальнейшем увеличении значения коэффициента η_1 аутостабилизация отсутствует. Для внутренней области биологического объекта существует такое значение коэффициента теплопередачи на ее границе, при значениях меньше которого существует возможность ограничения скорости метаболизма в данной области посредством аутостабилизации.

В источнике [7] выбрана наиболее производительная неявная разностная схема, которая использовалась при проектировании одномерного случая и была применена к математической модели [8]. С ее помощью исследованы динамические режимы аутостабилизации температуры в распределенном биологическом объекте.

Таким образом, с помощью математической модели (1) – (11) исследованы динамические режимы аутостабилизации температуры в распределенном биологическом объекте. Результаты исследования модели показали ее пригодность для описания основных закономерностей процесса аутостабилизации температуры в клеточной ткани. Определено значение параметра, влияющего на скорость процесса во внутренней области объекта. Выявленные закономерности могут быть использованы в практических целях, например в медицине для подавления роста опухоли.

Список литературы

1. Дегерменджи, А. Г. Аутостабилизация факторов, контролирующих рост в биологических системах / А. Г. Дегерменджи, Н. С. Печуркин, А. Н. Шкидченко. – Новосибирск : Наука, 1979. – 139 с.
2. Эффект аутотермостатирования микробных популяций и его влияние на рост и газообмен микроорганизмов / С. С. Рылкин [и др.] // Микробиология. – 1973. – Т. 42. – С. 445 – 451.
3. Арзамасцев, А. А. Математическая модель аутостабилизации температуры в клеточной ткани / А. А. Арзамасцев, Е. Н. Альбицкая, Д. В. Тепляков // Вестн. Тамб. университета. Сер. : Естеств. и техн. науки. – 2010. – Т. 15, Вып. 1. – С. 284 – 286.
4. Арзамасцев, А. А. Исследование аутостабилизации температуры в распределенной клеточной ткани / А. А. Арзамасцев, Е. Н. Альбицкая // Вестн. Тамб. университета. Сер. : Естеств. и техн. науки. – 2011. – Т. 16, Вып. 3. – С. 776 – 783.
5. Фарлоу, С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров : пер. с англ. / С. Фарлоу. – М. : Мир, 1985. – 384 с.
6. Albitskaya, E. N. Simulation of Temperature Self-Regulation in a Bioreactor / E. N. Albitskaya, A. A. Arzamastsev, // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2011. – Vol. 3, No. 3. – P. 299 – 310. doi: 10.1134/S2070048211030021
7. Залевский, Д. В. Математическое моделирование процессов аутостабилизации температуры в клеточной ткани для одномерного случая на основе неявных разностных схем / Д. В. Залевский, А. А. Арзамасцев // Вестн. Тамб. университета. Сер. : Естеств. и техн. науки. – 2014. – Т. 19, Вып. 6. – С. 80 – 83.

8. Арзамасцев, А. А. Математическое моделирование саморегулирования температуры в популяциях микроорганизмов: непрерывный процесс / А. А. Арзамасцев, Е. Н. Альбицкая // Вестн. Тамб. университета. Сер. : Естеств. и техн. науки. – 2007. – Т. 12, Вып. 6. – С. 709 – 714.

Numerical Research into Mathematical Distribution Models of Multidimensional Objects Based on Implicit Difference Schemes

A. A. Arzamastsev, D. V. Zalevskiy

*Department of Mathematical Modeling and Information Technologies,
G. R. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russia; dimzal1991@yandex.ru*

Keywords: auto-stabilization; implicit difference scheme; mathematical model; system of differential equations in partial derivatives.

Abstract: Modified mathematical model of the temperature autostabilization process in the cellular tissue by introducing additional equations in the kinetics of the process, given the limitation of substrate and oxygen; distributed source functions for the temperature of the substrate and oxygen have been specified; an algorithm based on the system of implicit difference schemes has been developed. We found and verified the presence of a temperature autostabilization process in the cell tissue using the developed mathematical model. We calculated the basic parameters that influence the rate for autostabilization process, designed and studied efficient algorithms for numerical solution of initial value problems, describing mathematical models of the temperature autostabilization in distributed multi-dimensional objects.

References

1. Degermendzhi A.G., Pechurkin N.S., Shkidchenko A.N. *Autostabilizatsiya faktorov, kontroliruyushchikh rost v biologicheskikh sistemakh* [Autostabilization of factors controlling growth in biological systems], Novosibirsk: Nauka, 1979, 139 p. (In Russ.)
2. Rylkin S.S., Shkidchenko A.N., Sterkin V.E., Boev A.V. [The effect of auto-thermostating of microbial populations and its effect on the growth and gas exchange of microorganisms], *Mikrobiologiya* [Microbiology], 1973, vol. 42, pp. 445-451. (In Russ.)
3. Arzamastsev A.A., Al'bitskaya E.N. Teplyakov D.V. [Mathematical model of temperature autostabilization in a cellular fabric], *Vestn. Tamb. universiteta. Ser. : Estestvennye i tekhnicheskie nauki* [Tambov University Reports. Series Natural and Technical Sciences], 2010, vol. 15, issue 1, pp. 284-286. (In Russ., abstract in Eng.)
4. Arzamastsev A. A., Al'bitskaya E.N. [Investigation of temperature self-regulation phenomena in distributed cellular tissue], *Vestn. Tamb. universiteta. Ser. : Estestvennye i tekhnicheskie nauki* [Tambov University Reports. Series Natural and Technical Sciences], 2011, vol. 16, issue 3, pp. 776-783. (In Russ., abstract in Eng.)
5. Farlou S. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Partial differential equations for scientists and engineers], Moscow: Mir, 1985, 384 p. (In Russ.)
6. Albitskaya E.N., Arzamastsev A.A. Simulation of Temperature Self-Regulation in a Bioreactor, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2011, vol. 3, no. 3, pp. 299-310, doi: 10.1134/S2070048211030021
7. Zalevskii D.V., Arzamastsev A.A. [Mathematical modeling of auto-stabilization of temperature in cell tissue for one-dimensional case on the basis of implicit difference schemes], *Vestn. Tamb. universiteta. Ser. : Estestvennye i tekhnicheskie nauki* [Tambov

University Reports. Series Natural and Technical Sciences], 2014, vol. 19, issue 6, pp. 80-83. (In Russ., abstract in Eng.)

8. Arzamastsev A.A., Al'bitskaya E.N. [Mathematical modelling of temperature self-regulation of a population of microorganisms: a continuous mode], *Vestn. Tamb. universiteta. Ser. : Estestvennye i tekhnicheskie nauki* [Tambov University Reports. Series Natural and Technical Sciences], 2007, vol. 12, issue 6, pp. 709-714. (In Russ., abstract in Eng.)

Numerische Forschung der mathematischen Modelle der verteilten multidimensionalen Objekte aufgrund der impliziten Differenzschemen

Zusammenfassung: Es ist das mathematische Modell des Prozesses der Autostabilität der Temperatur im Zellstoff mittels der Einführung der zusätzlichen Gleichungen in die Kinetik des Prozesses, die das Limitieren vom Substrat und vom Sauerstoff berücksichtigen, es sind die verteilten Funktionen der Quellen für die Temperatur des Substrates und des Sauerstoffes präzisiert; es ist der Algorithmus der Berechnung des Systems der Gleichungen aufgrund der impliziten Differenzschemen entwickelt. Es ist das Vorhandensein des Prozesses der Autostabilität der Temperatur im Zellstoff aufgrund des entwickelten mathematischen Modells enthüllt und bestätigt. Es sind die Hauptparameter, die die Geschwindigkeit des Prozesses der Autostabilität beeinflussen, bestimmt; es sind die wirksamen Algorithmen der numerischen Lösung der Anfangs-Grenzaufgaben, die die mathematischen Modelle der Autostabilität der Temperatur in den verteilten multidimensionalen Objekten beschreiben, entworfen und untersucht.

Recherche numérique des modèles mathématique des objets multidimensionnels distribués à la base de différents schémas implicites

Résumé: Est modifié le modèle mathématique du processus d'autostabilisation de la température dans le tissu cellulaire par l'introduction des équations supplémentaires dans la cinétique du processus en tenant compte des limitations par le substrat et l'oxygène; sont précisées les fonctions distribuées des sources pour la température du substrat et de l'oxygène; est développé l'algorithme du calcul du système des équations à la base de différents schémas implicites. Est montrée et confirmée la présence du processus d'autostabilisation de la température dans le tissu cellulaire à la base du modèle mathématique élaboré. Sont définis les principaux paramètres influençant la vitesse du processus d'autostabilisation; sont conçus et étudiés les algorithmes efficaces de la solution numérique des problèmes initiaux de limite décrivant les modèles mathématiques d'autostabilisation de la température dans la distribution des objets multidimensionnels.

Авторы: Арзамасцев Александр Анатольевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и информационных технологий; Залевский Дмитрий Вадимович – аспирант кафедры математического моделирования и информационных технологий, ФГБОУ ВО «ТГГУ им. Г.Р. Державина», г. Тамбов, Россия.

Рецензент: Ковалев Сергей Владимирович – доктор технических наук, доцент кафедры «Прикладная геометрия и компьютерная графика», ФГБОУ ВО «ТГГУ», г. Тамбов, Россия.