

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК  
ПРИ ОЦЕНКЕ МЕТРОЛОГИЧЕСКОЙ НАДЕЖНОСТИ  
ЭЛЕКТРОННЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СРЕДСТВ\***

**Т. И. Чернышова, М. А. Каменская, Р. Ю. Курнос**

*Кафедра «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем»,  
ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия;  
art\_mari@rambler.ru*

**Ключевые слова:** аналоговый блок; математическая модель; метрологическая надежность; метрологическая характеристика; электронное измерительное средство.

**Аннотация:** Предложены математические модели изменения во времени метрологических характеристик электронных измерительных средств (ЭИС), позволяющие оперативно оценивать требуемые в конкретной постановке задачи прогнозирования показатели метрологической надежности. Дана оценка качества проведенного прогнозирования. Выработаны рекомендации по метрологическому обслуживанию ЭИС. Приведены математические модели для проектируемых блоков аналого-цифровых преобразований, входящих в структуру ЭИС. Построение такого вида моделей базируется на применении метрологического анализа, являющегося основным методом, составляющим аппарат математической метрологии.

---

Метрологическая надежность (МН) информационно-измерительной системы (ИИС) определяется МН аналоговых блоков (АБ), входящих в измерительный канал данной системы [1]. Для исследования МН электронных измерительных средств (ЭИС) перспективными являются математические модели, связывающие выходные характеристики проектируемых ЭИС с параметрами комплектующих элементов, изменяющимися с течением времени. Анализ проблемы прогнозирования МН ЭИС показал, что наиболее приемлемый путь ее прогнозирования – реализация метода, который базируется на математическом моделировании временного изменения метрологических характеристик (МХ) ЭИС с применением приемов аналитико-вероятностного прогнозирования [1].

Суть данного метода состоит в исследовании нестационарных случайных процессов временного изменения МХ проектируемых ЭИС с помощью их математических моделей, которые получены с применением статистического моделирования на основе накопления статистических данных о процессах изменения

---

\* По материалам доклада на конференции «Актуальные проблемы энергосбережения и эффективности в технических системах», г. Тамбов, 25 – 27 апреля 2016 г.

во времени параметров элементной базы ЭИС. Такой путь решения задачи оценки состояния МХ ЭИС на первом этапе позволяет получить результаты прогноза их изменения во времени, а также определить показатели МН ЭИС при решении прямой и обратной задач прогнозирования МН без проведения длительных экспериментов на этапе проектирования. Рассмотрим основные этапы метода аналитико-вероятностного прогнозирования. Для решения задачи оценки МН ЭИС необходимы следующие априорные знания: структурные и функциональные схемы ЭИС; принципиальные электрические схемы; технические условия; техническое описание; условия эксплуатации. При формировании априорных знаний для определения метрологической надежности закон распределения параметров элементов принят нормальным, что относится к общим свойствам процессов деградации и износа, а также подтверждается статистическими данными по радиоэлектронным элементам.

Построение математической модели проводится на основе аналитических выражений для исследуемых ЭИС, зависящих от значений входного сигнала, вектора параметров комплектующих элементов исследуемого блока, а также вектора внешних влияющих факторов

$$y = F_1(x, \bar{\xi}, \bar{\varphi}), \quad (1)$$

где  $x$  – сигнал на входе исследуемого блока;  $\bar{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  – вектор параметров комплектующих элементов;  $\bar{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$  – вектор параметров внешних влияющих факторов.

В процессе эксплуатации ЭИС значения параметров комплектующих элементов изменяются в силу естественных процессов старения и износа, поэтому математическая модель метрологической характеристики  $S$  исследуемого ЭИС, полученная из (1), примет вид

$$S(t) = F_2(x, \bar{\xi}(t), \bar{\varphi}(t)). \quad (2)$$

Далее строится математическая модель изменения во времени МХ проектируемого АБ ЭИС, представляющая совокупность аналитических зависимостей, полученных для функций временного изменения математического ожидания МХ  $M_S(t)$  и функций  $\psi_{\pm\sigma}(t)$ , которые характеризуют изменение границ отклонения возможных значений МХ от среднего значения

$$\psi_{\pm\sigma}(t) = M_S(t) \pm c \sigma_S(t), \quad (3)$$

где  $t$  – время эксплуатации;  $c$  – постоянный коэффициент,  $c = 3$  при  $P = 0,997$ , выбираемый в зависимости от заданного уровня доверительной вероятности  $P$  и закона распределения МХ;  $\sigma_S(t)$  – среднеквадратическое отклонение МХ.

Экстраполяция построенной математической модели на область будущих значений времени эксплуатации ЭИС позволяет получить решение задачи оценки и прогнозирования состояния МХ ЭИС [3]. Таким образом, полученные данные о временном изменении МХ ЭИС в области контроля могут быть использованы для прогнозирования процессов изменения во времени МХ ЭИС в области значений времени предстоящей эксплуатации и определения показателей МН.

Очевидно, что математическое моделирование МХ ЭИС, заключающееся в построении математических моделей исследуемых ЭИС и статистическом моделировании временного изменения их МХ ЭИС в различных временных сечениях на этапе проектирования, является одним из основных этапов оценки и прогнозирования МХ ЭИС.

Подходы к описанию изменения параметра во времени, которые существуют в теории прогнозирования, а также анализ экспериментальных данных об изменении МХ во времени различных ЭИС показывают использование следующих нелинейных зависимостей в качестве основных моделей процессов старения:

– полиномиальные

$$M_{\delta}(t) = \sum_{i=0}^{\rho} a_i t^{\rho}, \quad \rho \leq 3, \quad (4)$$

где  $a_i$  – коэффициенты математической модели,  $i = 0, 1, \dots, \rho$ ;  $\rho$  – степень полинома.

– рациональные

$$M_{\delta}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i t^n}{1 + \sum_{j=1}^m c_j t^m}, \quad (5)$$

где  $b_i, c_j$  – коэффициенты математической модели,  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ ;  $n, m$  – степени полиномов;

– авторегрессионные

$$\begin{cases} \psi_{-\sigma}^{\text{np}}(t_j) = M_S^{\text{np}}(t_j) - 3\sigma_S(t); \\ M_S^{\text{np}}(t_j) = \overline{M_S(t)} + \varphi_1(M_S(t_{j-1}) - \overline{M_S(t)}) + \varphi_2(M_S(t_{j-2}) - \overline{M_S(t)}); \\ \psi_{+\sigma}^{\text{np}}(t_j) = M_S^{\text{np}}(t_j) + 3\sigma_S(t), \end{cases} \quad (6)$$

где  $M_S^{\text{np}}(t_j)$  – прогнозируемое значение математического ожидания МХ в момент времени  $t_j$ ;  $\overline{M_S(t)}$  – среднее значение математического ожидания МХ, рассчитываемое по выборке в предыдущие моменты времени эксплуатации  $t_{j-1}, t_{j-2}, \dots, t_{j-k}$ ;  $M_S(t_{j-k})$  – значение математического ожидания метрологической характеристики в момент времени  $t_{j-k}$  (для  $k = 1, 2$ ),  $k$  – число точек области контроля.

Использование принятых видов математических моделей изменения во времени МХ ЭИС позволяет рассчитать величины межповерочных интервалов (МПИ) при эксплуатации ЭИС с учетом дрейфа МХ, определяемого по ее математической модели. Очередной МПИ в данном случае может быть определен с учетом постоянства степени накопления метрологической нестабильности, определяемой как изменение МХ ЭИС за установленный МПИ. Данное условие с учетом выбранного вида математической модели может быть записано в виде

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} M_S(t) dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} M_S(t) dt, \quad (7)$$

где  $t_{k-1}, t_k, t_{k+1}$  – моменты времени контроля состояния МХ (времени поверки),  $M_S(t)$  – значения математического ожидания МХ в произвольные моменты времени  $t$ . Выражение (7) позволяет получить значения МПИ при выбранном виде математической модели, описывающем нестационарный случайный процесс изменения во времени МХ. Отметим, что нахождение искомого значения  $t_{k+1}$  однозначно определяется принятым видом математической модели изменения во времени МХ  $S(t)$ . Получены математические выражения для расчета величины МПИ с учетом выбранной математической модели изменения во времени МХ [4].

Оценка качества процесса проведенного прогнозирования МН на этапе проектирования ЭИС определяется прежде всего показателями эффективности и достоверности прогнозирования метрологической надежности. Использование таких показателей позволяет количественно оценить эффективность и достоверность прогнозирования и на основе их численной оценки провести выбор математической модели изменения во времени МХ ЭИС, а также оценить качество проведенного прогнозирования в целом.

Расчет показателей качества прогнозирования может быть проведен с учетом принятого вида математических моделей изменения во времени МХ ЭИС. Получены расчетные зависимости для оценки данных показателей для конкретных видов математических моделей. В частности, для математической модели (5) при  $n = 2$ ,  $m = 2$  показатели эффективности и достоверности могут быть рассчитаны следующим образом:

– при прямом прогнозировании МН критерий эффективности

$$K_3^{\text{пр}} = \frac{\left[ c_1 (b_0 + b_2 t_i^2 + \Omega + c_2 \Omega t_i^2 + c_1 \Omega) - b_1 (1 + c_2 t_i^2) \right] \pm \sqrt{D}}{2T_k [b_2 (1 + c_1 t_i) - c_2 (b_1 t_i + b_0 + \Omega + c_1 t_i \Omega + c_2 \Omega)]}, \quad (8)$$

где  $\Omega$  – разрешающая способность используемого при проверке измерительного прибора;  $D$  – коэффициент, рассчитываемый с учетом параметров принятой математической модели;  $T_k$  – момент времени контроля состояния МХ;

– при обратном прогнозировании МН критерий эффективности

$$K_3^{\text{обр}} = \frac{-(S_{\text{доп}} c_1 - b_1) \pm \sqrt{(S_{\text{доп}} c_1 - b_1)^2 - 4(S_{\text{доп}} c_2 - b_2)(S_{\text{доп}} - b_0)}}{2T_{\text{отк}} (S_{\text{доп}} c_2 - b_2)}, \quad (9)$$

где  $S_{\text{доп}}$  – допустимое значение МХ ЭИС;  $T_{\text{отк}}$  – время наступления метрологического отказа, определенное в технических условиях проектируемого ЭИС;

– расчет достоверности  $R$  проводится по формуле

$$R = \frac{\sum_{x \cap y = z} R_{1,2} \dots R_n}{1 - \sum_{x \cap y = \emptyset} R_{1,2} \dots R_n}, \quad (10)$$

где  $R_n$  – мера доверия к рассматриваемой математической модели изменения во времени МХ в конечной  $n$ -й точке контроля.

Численные значения показателей качества прогнозирования: эффективности и достоверности, рассчитанные с использованием экспериментальных данных и экспертных оценок, полученных при прогнозировании состояния МХ по приведенным выше математическим моделям, представлены в табл. 1.

Таблица 1

**Сравнительная оценка показателей качества прогнозирования**

Вид модели	Полиномиальная		Рациональная	Авторегрессионная
	$\rho = 2$	$\rho = 3$		
$K_3^{\text{пр}}$	0,1520	0,1573	0,0952	0,1716
$K_3^{\text{обр}}$	1,1420	1,1561	1,2527	1,0052
$R$	0,8400	0,8500	0,9400	0,9000

Сводный анализ показателей качества показал, что адекватное математическое описание при прямом прогнозировании метрологической надежности, то есть оценки сохранения вероятности метрологической исправности на момент времени предстоящей поверки, может быть получено с помощью модели авторегрессии. Анализ различных видов моделей при применении их для прогнозирования времени метрологического ресурса на большие интервалы времени при проведении обратного прогнозирования МН показал, что наибольшую точность дает применение рациональных зависимостей.

Отметим, что современные электронные измерительные средства в своем составе содержат блоки аналого-цифровых преобразований (АЦП), имеющие достаточно сложные структурную и схемную реализации. Изложенная процедура построения математических моделей МХ с использованием методов анализа принципиальных электрических схем не может быть применена при оценке МН АЦП, что связано с существенным усложнением их принципиальных электрических схем и алгоритмов работы. В связи с этим возможным путь для решения задачи оценки МН проектируемых АЦП, используемых в структуре ЭИС, – применение метрологического анализа, являющегося основным методом, составляющим аппарат математической метрологии [2]. Проведение метрологического анализа требует наличия соответствующих априорных знаний в виде уравнений измерений и математических моделей объектов, условий и средств измерений. При этом представляется возможным построение аналитических зависимостей, описывающих алгоритм основных преобразований в АЦП:

$$u_j^* = R_{сч}R_M R_K R_D u_j(t), \quad (11)$$

где  $R_D, R_K, R_{сч}, R_M$  – операторы дискретизации, квантования, считывания и масштабирования соответственно;  $u_j^*$  – результат измерения величины входного сигнала  $u_j$ .

Дискретизация заключается в формировании аналогового представления значения

$$u'_j = (t_j + \Delta t_D) = \int_{t_j}^{t_j + \Delta t_D} u_j(t) h_D(t_j + \Delta t_D, t') dt'. \quad (12)$$

Трансформация аналоговой величины выполняется с помощью квантования

$$R_K u'_j(t_j + \Delta t_D) = E \left[ u'_j(t_j + \Delta t_D) / \Delta_k^u u \right]. \quad (13)$$

Считывание или перенос сформированной квантователем кодовой комбинации в регистр процессора описывается выражением

$$R_{сч} \left[ u_j(t_j) \right]_{\Delta_k^u}^h = R_{сч} R_M R_K R_D u_i(t) \leq \left[ u_j(t) \right]_{\Delta_k^u}^h q_{10}. \quad (14)$$

Заключительная операция аналого-цифрового преобразования – масштабирование

$$\Delta_{02} u_j^* \leq \left[ u_j(t_j) \right]_{\Delta_k^u}^h > q_1 \Delta_m = \left( u_j(t_j + \Delta t_D) + \Delta_D u_j^* + \Delta_K u_j^* + \Delta_{01} u_j^* \right) \frac{\Delta_m}{\Delta_k^u} \cong \\ \cong u_j(t_j + \Delta t_D) \Delta_m / \Delta_k^u,$$

где  $\Delta_{02} u_j^*$  – составляющая из-за округления значения идеального интервала квантования;  $\left[ u_j(t) \right]_{\Delta_k^u}^h$  – результат дискретизации с использованием переходной

характеристики  $h(t, t')$ ;  $q_{10}$  – параметр округления результатов;  $E$  – целая часть;  $t_j$  – момент начала дискретизации;  $u_j(t)$  – входное воздействие;  $m$  – число элементарных измерительных преобразований. Сформированные таким образом априорные знания используются для формализованного представления исследуемой МХ полной погрешности исследуемого блока. Полученная математическая модель, применяемая в дальнейшем для расчета с помощью программных средств оценок основных характеристик погрешности проектируемых АЦП: математического ожидания, среднеквадратического отклонения, позволяет прогнозировать их изменения во времени предстоящей эксплуатации, и в конечном итоге оценить метрологический ресурс как основной показатель МН АЦП и ЭИС в целом.

Таким образом, предложенные виды математических моделей изменения во времени МХ могут быть использованы при оценке показателей МН аналоговых блоков, составляющих измерительные каналы проектируемых ЭИС.

#### *Список литературы*

1. Мищенко, С. В. Метрологическая надежность измерительных средств / С. В. Мищенко, Э. И. Цветков, Т. И. Чернышова. – М. : Машиностроение – 1, 2001. – 96 с.

2. Цветков Э. И. Метрология. Модели объектов, процедур и средств измерений. Метрологический анализ. Метрологический синтез / Э. И. Цветков. – СПб. : Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014. – 293 с.

3. Артемова, С. В. Математическая модель многосекционной сушильной установки на множестве состояний функционирования / С. В. Артемова, А. Н. Грибков // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2006. – Т. 12, № 4. – С. 969 – 974.

4. Чернышова, Т. И. Информационно-аналитическая система оценки метрологической надежности электронных измерительных средств / Т. И. Чернышова, М. А. Каменская // Вести высш. учеб. заведений Черноземья. – 2011. – № 1. – С. 79 – 82.

---

## **Mathematical Modeling of the Metrological Characteristics in Assessment of Electronic Metrological Reliability of Electronic Measuring Equipment**

**T. I. Chernyshova, M. A. Kamenskaya, R. Yu. Kurnosov**

*Department “Designing of Radio-Electronic and Microprocessor Systems”,  
TSTU, Tambov, Russia; art\_mari@rambler.ru*

**Keywords:** electronic measurement equipment; metrological characteristic; metrological reliability.

**Abstract:** The paper proposes mathematical models of time change of metrological characteristics of electronic measuring devices (EMD) for quick assess of required metrological reliability of EMD in a particular formulation of the forecasting problem. The developed mathematical models of time change of the EMD metrological characteristics allow evaluating the quality of forecasting, as well as making recommendations on metrological maintenance of EMD. The authors describe mathematical models for the designed analog-to-digital converters that are included in the EMD structure. The construction of this type of model is based on the application of the metrological analysis, which is the main method of mathematical metrology.

## References

1. Mishchenko S.V., Tsvetkov E.I., Chernyshova T.I. *Metrologicheskaya nadezhnost' izmeritel'nykh sredstv* [Metrological reliability of measuring equipment], Moscow: Mashinostroenie-1, 2001, 96 p. (In Russ.)
2. Tsvetkov E.I. *Metrologiya. Modeli ob"ektov, protsedur i sredstv izmerenii. Metrologicheskii analiz. Metrologicheskii sintez* [Metrology. Models of objects, procedures and measuring instruments. Metrological analysis. Metrological synthesis], St. Petersburg, 2014, 293 p. (In Russ.)
3. Artemova S.V., Gribkov A.N. [Mathematical Model of Multi-Sectional Drying Unit on the Set of Working States], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2006, vol. 12, no. 4, pp. 969-974. (In Russ., abstract in Eng.)
4. Chernyshova T.I., Kamenskaya M.A. [Information-analytical system of evaluation of the metrological reliability of electronic measuring means], *Vesti vysshikh uchebnykh zavedenii Chernozem'ya* [News of Higher Educational Institutions of the Chernozem Region], 2011, no. 1, pp. 79-82. (In Russ.)

---

### **Mathematische Modellierung der metrologischen Charakteristiken bei der Einschätzung der metrologischen Sicherheit der elektronischen Messmittel**

**Zusammenfassung:** Es sind die mathematischen Modelle der Veränderung in der Zeit der metrologischen Charakteristiken der elektronischen Messmittel (EMM), die die in der konkreten Stellung geforderten Aufgaben der Prognostizierung der Kennziffern der metrologischen Sicherheit von EMM operativ zu bewerten erlauben, vorgeschlagen. Die entwickelten mathematischen Modelle der Veränderung in der Zeit der untersuchenden metrologischen Charakteristiken von EMM lassen zu, die Qualität der durchgeführten Prognostizierung zu bewerten, sowie die Empfehlungen nach der metrologischen Bedienung von EMM zu produzieren. Es sind die mathematischen Modelle für die in die Struktur von EMM hereingehenden entwerfenden Blöcke der Analogdigitaltransformationen angeführt.

---

### **Modélisation mathématique des caractéristiques métrologiques lors de l'évaluation métrologique de la fiabilité des moyens électroniques de mesure**

**Résumé:** Sont proposés les modèles mathématiques des changements dans le temps des caractéristiques métrologiques des moyens électroniques de mesure (MEM) permettant d'évaluer rapidement les tâches nécessaires dans la définition concrète du problème de la prévision des indicateurs de la fiabilité métrologique des MEM. Les modèles mathématiques élaborés permettent d'évaluer la qualité de la prévision effectuée ainsi que de formuler des recommandations sur le maintien des MEM. Sont mentionnés les modèles mathématiques pour les blocs de convertisseur analogique-numérique inclus dans la structure des MEM.

---

**Авторы:** *Чернышова Татьяна Ивановна* – доктор технических наук, профессор кафедры «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем», директор института энергетики, приборостроения и радиоэлектроники; *Каменская Мария Анатольевна* – кандидат технических наук, ассистент кафедры «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем»; *Курнос Роман Юрьевич* – аспирант кафедры «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.

**Рецензент:** *Пудовкин Анатолий Петрович* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Радиотехника», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.