

## СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ С НЕРАВНОМЕРНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ

В. Н. Булатов, О. В. Худорожков

*Кафедра «Промышленная электроника и информационно-измерительная техника»,  
ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный университет», г. Оренбург, Россия;  
promel@unpk.osu.ru*

**Ключевые слова:** интерполяция; неравномерная дискретизация; преобразование Фурье; спектральное преобразование.

**Аннотация:** Приведено обоснование актуальности спектрального преобразования сигналов с неравномерной дискретизацией. Представлена методика составления полинома по выборкам значений сигнала с неравномерной дискретизацией на конечном интервале времени. Для аппроксимирующего полинома приведен вывод выражения спектральной плотности и на ее основе составлена формула линейчатого спектра для зарегистрированного массива выборок сигнала с неравномерной дискретизацией.

---

### Введение

В современных информационно-измерительных системах (ИИС) носителями первичной измерительной информации являются, в основном, аналоговые сигналы  $x(t)$ , которые затем подвергаются аналогово-цифровому преобразованию (АЦП). При цифровой обработке сигналов, полученных в результате АЦП с *равномерной дискретизацией*, для частотной области хорошо отработаны математические методы и их алгоритмизация, например, в виде быстрого преобразования Фурье (БПФ), основанного на методе дискретного преобразования Фурье (ДПФ) [1]. Массив выборок сигнала разбивается на окна [2] (фрагменты сигнала) с одинаковым временным интервалом  $T$ , и с помощью БПФ формируется линейчатый спектр оконного сигнала в предположении, что данный фрагмент бесконечно повторяется с периодом  $T$ .

При решении ряда задач обнаружения сильно зашумленных измерительных сигналов в виде колебаний с монотонно изменяющейся частотой, содержащей информацию (например, о движении объекта – в навигационных ИИС), возникает необходимость нелинейно изменять масштаб времени зарегистрированного оконного сигнала. Вариативное изменение масштаба времени позволяет устанавливать максимум энергии оконного сигнала в *определенной* области частот, что позволяет в целом увеличить разрешающую способность ИИС [3]. Суть и эффективность такого метода можно пояснить на следующем примере.

Пусть имеется массив  $e1$  выборок оконного сигнала с частотной модуляцией (ЧМ)

$$e1_i = \cos[(\omega_0 - kt_i)t_i] \quad (1)$$

с параметрами: частота в начале окна  $\omega_0 = 2\pi$ ; коэффициент модуляции  $k = 0,11$ ; интервал дискретизации  $dT = 0,05$ ; размер массива  $n = 512$  (размер окна  $T = ndT = 25,6$  с;  $i = 0 \dots 511$ ). Преобразуем выражение (1) в следующий вид

$$e1_i = \cos[(\omega_0 - kt_i)t_i] = \cos\left[\omega_0\left(t_i - kt_i^2/\omega_0\right)\right] \quad (2)$$

Выражение  $(t_i - kt_i^2/\omega_0)$  по смыслу есть ни что иное как функция времени, но с иным – нелинейным масштабом по отношению к реальному времени  $t$ . Введем обозначение  $tn$  для нелинейного времени

$$tn_i = t_i - kt_i^2/\omega_0 \quad (3)$$

и запишем выражение (2) с учетом (3)

$$e1_i = \cos(\omega_0 tn_i). \quad (4)$$

При таком преобразовании масштаба времени воспроизведение функции  $e1(tn)$  по исходным выборкам  $e1_i$  позволяет получить немодулированный по частоте радиоимпульс, спектр которого, естественно, будет отличаться от спектра исходного сигнала (1). Для сравнительного анализа спектров исходного и преобразованного во времени сигналов вычислим спектры дискретизированного сигнала  $e1_i$  в виде (1) и (4) для обеих системах времени.

Для времени  $t$  используем классическое выражение для определения спектральной плотности, заменяя  $t_i = idT$  на  $t$

$$S1(\omega) = \int_0^{25,6} e1(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (5)$$

Для вычисления значений функции спектральной плотности в системе времени  $tn$ , что эквивалентно неравномерной дискретизации, выражение (5) не может быть использовано, так как дифференциал  $dt$  является нелинейной переменной. Запишем для него выражение в среде дискретизированного сигнала в виде  $dt n_i = tn_{i+1} - tn_i$  и определим интегральную сумму для вычисления спектральной плотности  $S2(\omega)$  в системе времени  $tn$  с нелинейным дифференциалом  $dt n$

$$S2(\omega) = \sum_{i=0}^{510} [e1_i \exp(-j\omega tn_i) dt n_i]. \quad (6)$$

На рисунке 1 приведены графики модулей спектральных плотностей  $S1(\omega)$  и  $S2(\omega)$ , анализ которых позволяет сделать вывод о том, что подобное преобразование во времени существенно «поднимает» энергию в области начальной частоты

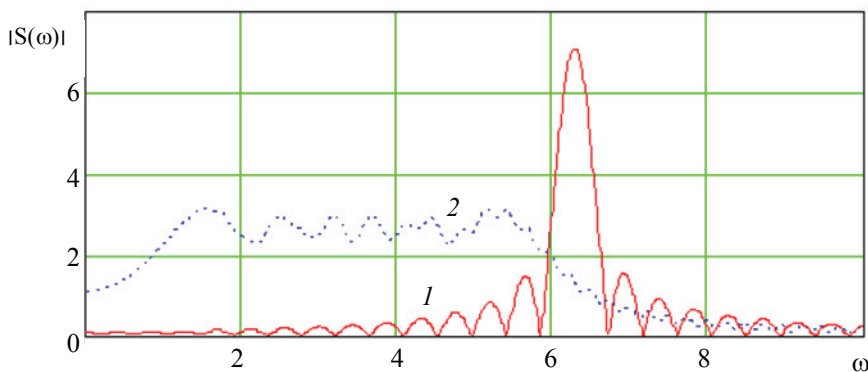


Рис. 1. Спектры ЧМ-сигнала в системах времени  $t$  и  $tn$ :  
1 –  $|S1(\omega)|$ ; 2 –  $|S2(\omega)|$

ты колебания  $\omega_0$ , что в условиях помех увеличивает разрешающую способность обнаружения исходного колебания  $e1(t)$  в частотной области, а также позволяет измерить спектральным методом значение  $\omega_0$ . Выражение (6) дает хорошие результаты только при  $(2\pi/\omega_0) > (30 \dots 50) dT$ . На практике неравенство бывает на порядок меньше и использование (6) в таких случаях в реальных ИИС становится неприемлемым.

В данной работе предлагается решение проблемы, которое заключается в новой методике вычисления спектра оконного сигнала, предусматривающей преобразование масштаба времени зарегистрированного сигнала, использующей те же выборки сигнала цифровых значений  $\{N\}$  сигнала  $x(t)$ , но которые в результате целевой временной деформации «сдвигаются» на моменты  $tn_i$  и интервал дискретизации в общем случае становится *неравномерным*. Далее для простоты обозначений вместо  $tn_i$  вводится переменная  $t_i$ , при этом имеется ввиду, что  $tn_i = t_i$ .

Задача вычисления спектра фрагмента сигнала с неравномерной дискретизацией решается в три этапа:

- полиномиальная аппроксимация фрагмента сигнала с неравномерной дискретизацией аналитическим выражением с установленной погрешностью;
- решение спектрального преобразования аппроксимированного сигнала в аналитическом виде степенным полиномом;
- получение решения спектрального преобразования для вычисления массива выборок из спектра аппроксимированного полиномом фрагмента сигнала.

### **Полиномиальная аппроксимация фрагмента сигнала с неравномерной дискретизацией**

Для того чтобы разложить в ряд Фурье функцию, представленную одномерным массивом пар чисел  $\{N; t\}$  с использованием спектрального метода, на первом этапе формируем полином, аппроксимирующий функцию  $N(t)$ , для которой выполняется условие (7)

$$N(t_0) = N_0; \dots; N(t_i) = N_i; N(t_{i+1}) = N_{i+1}; N(t_{i+2}) = N_{i+2}. \quad (7)$$

Из области математики известны несколько методов интерполяции многочленами  $N(t)$   $n$ -й степени, удовлетворяющих условию (7) в  $n + 1$  узлах интерполяции – временных отсчетах  $t_i$ , где  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , которые справедливы для случаев, когда

$$t_1 - t_0 \neq \dots \neq t_{i+1} - t_i \neq t_{i+2} - t_{i+1} \neq \dots \neq t_n - t_{n-1}, \quad (8)$$

в частности удобные для программирования интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона [4]. Анализ алгоритма формирования интерполяционных формул Лагранжа и Ньютона показал, что из указанных полиномиальных формул наилучшим образом для решения поставленной задачи подходит полином Ньютона (при необходимости изменения значения  $n$  полином Лагранжа надо строить заново).

Полином Ньютона строится на основе разделенных разностей, что при изменении значения  $n$  приводит к вычислению или исключению высшего порядка разделенных разностей [4]. В данной работе приведена методика использования интерполяционной формулы Ньютона для неравноотстоящих аргументов

$$\begin{aligned} P(t) &= N_0 + \Delta_{11}(t - t_0) + \Delta_{21}(t - t_1)(t - t_0) + \dots + \Delta_{n1} \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i) = \\ &= N_0 + \sum_{k=1}^n \left( \Delta_{k1} \prod_{i=0}^{k-1} (t - t_i) \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\Delta_{k1}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  – разделенные разности  $k$ -го порядка, которые определяются по известным формулам [4]:

– для разделенной разности  $\Delta_{11}$

$$\Delta_{11} = \frac{N(t_1) - N(t_0)}{t_1 - t_0}, \quad (10)$$

при этом вспомогательные разделенные разности первого порядка для вычисления разделенных разностей второго и выше порядков определяются аналогично

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{12} &= \frac{N(t_2) - N(t_1)}{t_2 - t_1}; \\ \Delta_{13} &= \frac{N(t_3) - N(t_2)}{t_3 - t_2}; \\ \dots &\dots \\ \Delta_{1m} &= \frac{N(t_m) - N(t_{m-1})}{t_m - t_{m-1}}; \\ \dots &\dots \\ \Delta_{1n} &= \frac{N(t_n) - N(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}}; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

– для разделенной разности  $\Delta_{21}$

$$\Delta_{21} = \frac{\Delta_{12} - \Delta_{11}}{t_2 - t_0}, \quad (12)$$

вспомогательные разделенные разности второго порядка для вычисления разделенных разностей третьего и выше порядков определяются как

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{22} &= \frac{\Delta_{13} - \Delta_{12}}{t_3 - t_1}; \\ \Delta_{23} &= \frac{\Delta_{14} - \Delta_{13}}{t_4 - t_2}; \\ \dots &\dots \\ \Delta_{2m} &= \frac{\Delta_{1(m+1)} - \Delta_{1m}}{t_{m+1} - t_{m-1}}; \\ \dots &\dots \\ \Delta_{2(n-1)} &= \frac{\Delta_{1n} - \Delta_{1(n-1)}}{t_n - t_{n-2}}; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

– для разделенной разности  $\Delta_{31}$

$$\Delta_{31} = \frac{\Delta_{22} - \Delta_{21}}{t_3 - t_0}, \quad (14)$$

вспомогательные разделенные разности третьего порядка для вычисления разделенных разностей четвертого и выше порядков

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta_{32} &= \frac{\Delta_{23} - \Delta_{22}}{t_4 - t_1}; \\
 \Delta_{33} &= \frac{\Delta_{24} - \Delta_{23}}{t_5 - t_2}; \\
 \dots\dots\dots \\
 \Delta_{3m} &= \frac{\Delta_{2(m+1)} - \Delta_{2m}}{t_{m+2} - t_{m-1}}; \\
 \dots\dots\dots \\
 \Delta_{3(n-2)} &= \frac{\Delta_{2(n-1)} - \Delta_{2(n-2)}}{t_n - t_{n-3}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Согласно алгоритму, отраженному в последовательности составления формул (9) – (15), последняя, разделенная разность  $n$ -порядка будет выглядеть следующим образом

$$\Delta_{n1} = \frac{\Delta_{(n-1)2} - \Delta_{(n-1)1}}{t_n - t_0}. \quad (16)$$

Из анализа выражений (9) – (16) для разделенных разностей следует, что для вычисления их численных значений можно составить блок-схему алгоритма с рекуррентной формулой вычисления двумерного массива с элементами  $\Delta_{k,m}$  и выделение из него массива разделенных разностей  $\Delta_{k,1}$  (рис. 2).



Рис. 2. Блок-схема алгоритма с рекуррентной формулой вычисления двумерного массива с элементами  $\Delta_{k,1}$

В качестве примера реализации данного алгоритма, на рис. 3 приведена программа в среде MathCAD (в данной статье среда программирования MathCAD выбрана для наглядности) с использованием встроенных операторов [5] для вычисления конечных разностей  $\Delta_{k,1}$  при семи парах выборок  $\{N;t\}$  с неравномерной дискретизацией из сигнала  $N(t) = \cos(0,2\pi t)$  на интервале  $T = 10$ .

Методика вычисления произведения  $\prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i)$ , входящего в выражение (15) и формирующего степенной полином, основана на свойствах одного из видов производящих функций [5]

$$F(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i = (1 + A_0 t)(1 + A_1 t) \cdots (1 + A_{n-1} t) = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + A_i t), \quad (17)$$

где  $\alpha_i$  являются коэффициентами производящей функции (17), содержащими информацию о сочетаниях числом  $\binom{n}{i}$  без повторов из  $n$  объектов  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$  в виде сумм произведений всех сочетаний

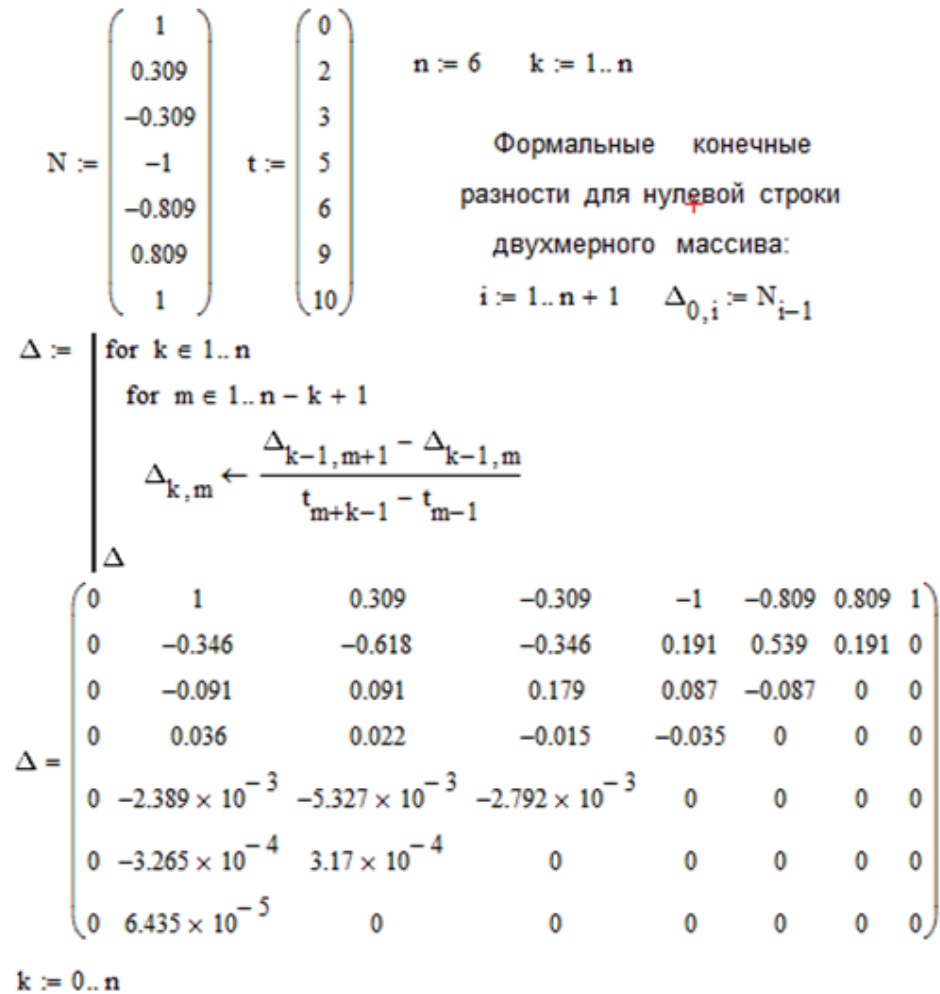


Рис. 3. Скриншот программы вычисления конечных разностей

$$\left. \begin{aligned} \binom{n}{0} &: \alpha_0 = 1; \\ \binom{n}{1} &: \alpha_1 = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1}; \\ \binom{n}{2} &: \alpha_2 = A_0A_1 + A_0A_2 + A_1A_2 + \dots + A_{n-2}A_{n-1}; \\ \binom{n}{3} &: \alpha_3 = A_0A_1A_2 + A_0A_1A_3 + A_0A_2A_3 + \dots + A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1}; \\ &\dots\dots\dots \\ \binom{n}{n} &: \alpha_n = A_0A_1A_2A_3 \dots A_{n-2}A_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Если в выражении (17) произвести замену  $A_i = -1/t_i$ , то это выражение примет вид

$$F(t) = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - A_i t) = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - t/t_i) = \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \frac{t - t_i}{t_i} = \frac{(-1)^{n+1}}{t_0 t_1 t_2 \dots t_{n-1}} \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i). \quad (19)$$

Левый множитель формулы (19) – это просто число, а второй множитель в виде  $\prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i)$  повторяет часть произведения (9). Согласно полученному выражению (19), которое является основой производящей функции  $F1(t)$  сочетаний для объектов  $\{t\}$  при соответствующей замене в (18)  $A_i = -1/t_i$

$$F1(t) = \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i) = (-1)^{n+1} t_0 t_1 t_2 \dots t_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} (1 - t/t_i). \quad (20)$$

После подстановки в (18)  $A_i = -1/t_i$  и формирования сумм произведений с общим знаменателем  $t_0 t_1 t_2 \dots t_{n-1}$  (который впоследствии сокращается) окончательно получим выражение для производящей функции  $F1(t)$

$$F1(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{n-i} t^i = (t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_{n-1}), \quad (21)$$

где для соответствующих сочетаний коэффициенты  $\beta_{k=n-i}$ , полученные из коэффициентов  $\alpha_i$  в результате замены  $A_i = -1/t_i$ , принимают значения

$$\left. \begin{aligned} \binom{n}{0} &: \beta_0^{[n]} = 1; \\ \binom{n}{1} &: \beta_1^{[n]} = -(t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1}); \\ \binom{n}{2} &: \beta_2^{[n]} = t_0 t_1 + t_0 t_2 + t_1 t_2 + t_0 t_3 + t_1 t_3 + t_2 t_3 + \dots + t_{n-2} t_{n-1}; \\ \binom{n}{3} &: \beta_3^{[n]} = -(t_0 t_1 t_2 + t_0 t_1 t_3 + t_0 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_3 + \dots + t_{n-3} t_{n-2} t_{n-1}); \\ &\dots\dots\dots \\ \binom{n}{n} &: \beta_n^{[n]} = (-1)^n t_0 t_1 t_2 t_3 \dots t_{n-2} t_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

В выражениях (22) верхний индекс в квадратных скобках введен для указания числа объектов, участвующих в соответствующих сочетаниях с числом объектов в сочетании, указанных в нижнем индексе, всегда начиная с объекта  $t_0$ , так в последующих преобразованиях число  $n$  в пределах одного выражения будет плавающим.

Выражение (9) с учетом (22) примет вид

$$P(t) = N_0 + \sum_{k=1}^n \left( \Delta_{k1} \sum_{i=0}^k \beta_{k-i}^{[k]} t^i \right). \quad (23)$$

Введя в (23) формальную величину разделенной разности  $\Delta_{01} = N_0$  и систематизируя множители при  $t^i$ , окончательно получим

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{k=0}^n \left( \Delta_{k1} \sum_{i=0}^k \beta_{k-i}^{[k]} t^i \right) = \Delta_{01} \beta_0^{[0]} t^0 + \Delta_{11} (\beta_1^{[1]} + \beta_0^{[1]} t) + \\ &+ \Delta_{21} (\beta_2^{[2]} + \beta_1^{[2]} t + \beta_0^{[2]} t^2) + \Delta_{31} (\beta_3^{[3]} + \beta_2^{[3]} t + \beta_1^{[3]} t^2 + \\ &+ \beta_0^{[3]} t^3) + \dots + \Delta_{n1} (\beta_n^{[n]} + \beta_{n-1}^{[n]} t + \beta_{n-2}^{[n]} t^2 + \dots + \beta_1^{[n]} t^{n-1} + \\ &+ \beta_0^{[n]} t^n) = \left( \sum_{i=0}^n \Delta_{i1} \beta_i^{[i]} \right) t^0 + \left( \sum_{i=1}^n \Delta_{i1} \beta_{i-1}^{[i]} \right) t^1 + \dots + \left( \sum_{i=n}^n \Delta_{i1} \beta_{i-n}^{[i]} \right) t^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \left[ \left( \sum_{i=k}^n \Delta_{i1} \beta_{i-k}^{[i]} \right) t^k \right] = \sum_{k=0}^n a_k t^k, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\Pi := \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0 \cdot t_1 & t_0 \cdot t_1 \cdot t_2 & t_0 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 & t_0 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 & t_0 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 & \\ 0 & t_1 & t_0 \cdot t_2 & t_0 \cdot t_1 \cdot t_3 & t_0 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot t_4 & t_0 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_5 & 0 & \\ 0 & t_2 & t_1 \cdot t_2 & t_0 \cdot t_2 \cdot t_3 & t_0 \cdot t_1 \cdot t_3 \cdot t_4 & t_0 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot t_4 \cdot t_5 & 0 & \\ 0 & t_3 & t_0 \cdot t_3 & t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 & t_0 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 & t_0 \cdot t_1 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 & 0 & \\ 0 & t_4 & t_1 \cdot t_3 & t_0 \cdot t_1 \cdot t_4 & t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 & t_0 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 & 0 & \\ 0 & t_5 & t_2 \cdot t_3 & t_0 \cdot t_2 \cdot t_4 & t_0 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot t_5 & t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 & 0 & \\ 0 & 0 & t_0 \cdot t_4 & t_1 \cdot t_2 \cdot t_4 & t_0 \cdot t_1 \cdot t_3 \cdot t_5 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & t_1 \cdot t_4 & t_0 \cdot t_3 \cdot t_4 & t_0 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_5 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & t_2 \cdot t_4 & t_1 \cdot t_3 \cdot t_4 & t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_5 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & t_3 \cdot t_4 & t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 & t_0 \cdot t_1 \cdot t_4 \cdot t_5 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & t_0 \cdot t_5 & t_0 \cdot t_1 \cdot t_5 & t_0 \cdot t_2 \cdot t_4 \cdot t_5 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & t_1 \cdot t_5 & t_0 \cdot t_2 \cdot t_5 & t_1 \cdot t_2 \cdot t_4 \cdot t_5 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & t_2 \cdot t_5 & t_1 \cdot t_2 \cdot t_5 & t_0 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & t_3 \cdot t_5 & t_0 \cdot t_3 \cdot t_5 & t_1 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & t_4 \cdot t_5 & t_1 \cdot t_3 \cdot t_5 & t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & t_2 \cdot t_3 \cdot t_5 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & t_0 \cdot t_4 \cdot t_5 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & t_1 \cdot t_4 \cdot t_5 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & t_2 \cdot t_4 \cdot t_5 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

Рис. 4. Скриншот матрицы вычисления произведений сочетаний  $t_i$



где коэффициенты степенного полинома  $P(t)$

$$a_k = \sum_{i=k}^n \Delta_{i1} \beta_{i-k}^{[i]}. \quad (25)$$

Существует несколько алгоритмов формирования сочетаний на основе рекуррентных методов, которые решают близкие задачи. Авторский алгоритм от традиционных отличается особенностями вычисления коэффициентов  $\beta_k$  из-за плавающего  $n$ .

Ниже (рис. 4) приведен пример формирования матрицы произведений сочетаний в среде MathCAD в продолжение примера отображено на рис. 3, отражающий эту особенность (без учета  $t_6$  – для уменьшения размера матрицы).

Номер столбца соответствует числу переменных, участвующих в сочетании, составляющих произведения, а номер строки – число произведений сочетаний, участвующих в их суммировании.

Программа в виде матрицы для среды MathCAD реализации алгоритма вычисления (22) (продолжение программы рис. 3 и 4) представлена на рис. 5.

Вычислив в среде MathCAD (продолжение программы, начало которой представлено на рис. 3, а продолжение на рис. 4 и 5) коэффициенты (25), заменив дискретную величину  $t_i$  на непрерывную  $t1$ , получим искомый полином  $P(t1)$  (рис. 6).

$$\beta := \begin{pmatrix} 1 & -\Pi_{0,1} & \Pi_{0,2} & -\Pi_{0,3} & \Pi_{0,4} & -\Pi_{0,5} & \Pi_{0,6} \\ 1 & -\sum_{i=0}^1 \Pi_{i,1} & \sum_{i=0}^2 \Pi_{i,2} & -\sum_{i=0}^3 \Pi_{i,3} & \sum_{i=0}^4 \Pi_{i,4} & -\sum_{i=0}^5 \Pi_{i,5} & 0 \\ 1 & -\sum_{i=0}^2 \Pi_{i,1} & \sum_{i=0}^5 \Pi_{i,2} & -\sum_{i=0}^9 \Pi_{i,3} & \sum_{i=0}^{14} \Pi_{i,4} & 0 & 0 \\ 1 & -\sum_{i=0}^3 \Pi_{i,1} & \sum_{i=0}^9 \Pi_{i,2} & -\sum_{i=0}^{19} \Pi_{i,3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\sum_{i=0}^4 \Pi_{i,1} & \sum_{i=0}^{14} \Pi_{i,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\sum_{i=0}^5 \Pi_{i,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 5. Скриншот матрицы для вычисления  $\beta$

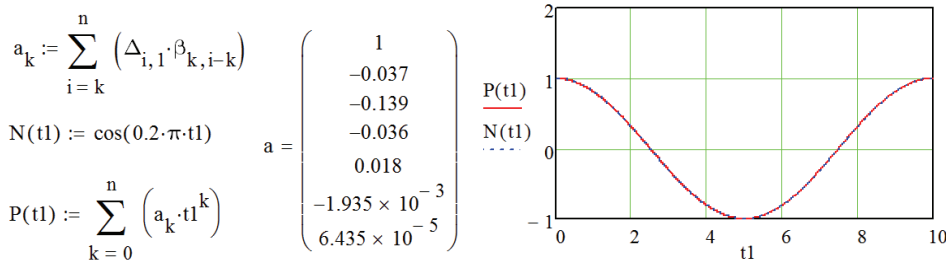


Рис. 6. Скриншот полинома  $P(t1)$

## Решение спектрального преобразования аппроксимированного сигнала в аналитическом виде степенным полиномом

При получении решения для цифрового спектрального преобразования для вычисления массива выборок комплексных значений спектра фрагмента сигнала, необходимо вывести выражение огибающей спектра, которая содержит все множество значений этого спектра, то есть получить аналитическую форму спектра. Естественно, что это может быть только спектральная плотность фрагмента сигнала, решение которой составляет второй этап исследований.

Методика спектрального преобразования основана на использовании общих теоретических положений спектрального анализа для непрерывных функций [6] и частного решения для спектральной плотности оконного сигнала  $N(t)$ , представленного на интервале  $[t_0, t_0 + T]$   $n + 1$  выборками и аппроксимированного степенным полиномом вида  $P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ . По условиям интегрируемости степенных рядов [7] спектральную характеристику сигнала  $P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$  можно записать как

$$S(\omega) = S_0(\omega) + S_1(\omega) + S_2(\omega) + S_4(\omega) + \dots + S_n(\omega) = \sum_{i=0}^n S_i(\omega), \quad (26)$$

где каждое слагаемое в общем случае можно представить интегральным преобразованием в виде первообразной (без учета пределов интегрирования) от соответствующего слагаемого  $a_i t^i$ :

$$\begin{aligned} S_0(\omega) &= \int a_0 \exp(-j\omega t) dt = \frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega} a_0; \\ S_1(\omega) &= \int a_1 t \exp(-j\omega t) dt = \frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega} a_1 \left( t - \frac{1}{-j\omega} \right); \\ S_2(\omega) &= \int a_2 t^2 \exp(-j\omega t) dt = \frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega} a_2 \left( t^2 - \frac{2t}{-j\omega} + \frac{2 \cdot 1}{(-j\omega)^2} \right); \\ S_3(\omega) &= \int a_3 t^3 \exp(-j\omega t) dt = \frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega} a_3 \left( t^3 - \frac{3t^2}{-j\omega} + \frac{3 \cdot 2t}{(-j\omega)^2} - \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{(-j\omega)^3} \right); \\ S_n(\omega) &= \int a_n t^n \exp(-j\omega t) dt = \frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega} a_n \left( t^n - \frac{nt^{n-1}}{-j\omega} + \frac{n(n-1)t^{n-2}}{(-j\omega)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n(n-1)(n-2)t^{n-3}}{(-j\omega)^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)t^{n-4}}{(-j\omega)^4} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{(-j\omega)^n} \right). \end{aligned}$$

Подставив в выражение (26) полученные выше выражения для  $S_i(\omega)$  и произведя систематизацию по  $a_i$ , получим следующее интегральное решение в виде первообразной для спектральной характеристики временной функции вида

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{k=0}^n a_k t^k \\ S(\omega) &= \sum_{i=0}^n S_i(\omega) = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \sum_{i=0}^n a_i i! \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{t^{i-k}}{(-j\omega)^k (i-k)!}. \end{aligned} \quad (27)$$

Данное выражение (27) полезно тем, что оно для функций рассматриваемого вида:

- получено в виде первообразной для неопределенного интеграла;
- не содержит погрешности спектрального преобразования;
- хорошо алгоритмируется для программирования вычисления значений

$S(\omega)$  для различных частот  $\omega$ .

При вычислении спектральной плотности «оконного» фрагмента сигнала, представленного функцией  $P(t)$ , в целях исключения накопления ошибок вычислений, связанных с возведением в степень больших значений  $t$ , кроме нормирования  $t$ , желательно привязывать окно к началу координат, используя теорему о смещении. Применяя понятие *окна* спектрального преобразования [2] длительностью

$$T = t_n - t_0, \quad (28)$$

на основе первообразной (27) получаем выражение спектральной плотности для любого отрезка  $[0, T]$  сигнала  $P(t)$ , представленного  $(n + 1)$ -выборками и отстоящего от начала координат на величину  $t_0$

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \sum_{i=0}^n S_i(\omega) = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \sum_{i=0}^n a_i i! \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{t^{i-k}}{(-j\omega)^k (i-k)!} \Big|_{t_0}^{t_0+T} = \\ &= \left\{ \left[ e^{-j\omega \tau} \sum_{i=0}^n a_i i! \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{T^{i-k}}{(-j\omega)^k (i-k)!} \right] - \left[ \sum_{i=0}^n a_i i! \frac{1}{(j\omega)^i} \right] \right\} \frac{\exp(-j\omega t_0)}{-j\omega}. \end{aligned} \quad (29)$$

### Вычисление массива выборок из спектра аппроксимированного полиномом фрагмента сигнала

Для получения массива комплексных чисел – выборок из (29), необходимого для технологии цифровой обработки спектра в ИИС, делается предположение, что фрагмент сигнала  $P(t)$  (как и в случае с ДПФ) повторяется с периодом  $T$ . В этом случае в частотной области формируется линейчатый спектр  $\dot{c}_m$  с номерами гармоник  $m$  и интервалом между ними, равным  $2\pi/T$ , который можно получить из (29) в виде следующего преобразования [6]

$$\dot{c}_m = \frac{S(\omega = 2\pi m/T)}{T} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} N_n(t) e^{-i2\pi m t/T} dt. \quad (30)$$

В этом случае временную функцию (23) на интервале  $T$  можно представить в виде ряда Фурье в экспоненциальной форме

$$P(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{c}_m e^{j2\pi m t/T}.$$

При определении постоянной составляющей спектра фрагмента оконного сигнала используем выражение (30) для формальной гармоники с номером  $m = 0$  (в системах связи телеметрических ИИС обычно равняется нулю)

$$\dot{c}_0 = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{S(\omega = 2\pi m/T)}{T} \Big|_{t_0}^{t_0+T} = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} P(t) dt}{T} \approx \frac{\sum_{i=0}^n N_i}{n+1}. \quad (31)$$

Для гармоник с номерами  $m \neq 0$  выражение спектра (24) преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned}
 \dot{c}_{m \neq 0} &= \frac{S(\omega = 2\pi m / T)}{T} \Big|_{t_0}^{t_0+T} = \frac{e^{-jm2\pi t/T}}{T(-jm2\pi/T)} \left[ \sum_{i=0}^n a_i i! \left( \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{t^{i-k}}{(-jm2\pi/T)^k (i-k)!} \right) \right] \Big|_{t_0}^{t_0+T} = \\
 &= \left\{ \frac{e^{-j2\pi m}}{-j2\pi m} \left[ \sum_{i=0}^n a_i i! \left( \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{T^{i-k}}{(-jm2\pi/T)^k (i-k)!} \right) \right] \right\} \exp(-jm2\pi t_0/T) - \\
 &\quad - \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{e^{-jm2\pi t/T}}{-j2\pi m} \left( \sum_{i=0}^n a_i i! \left( \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{t^{i-k}}{(-jm2\pi/T)^k (i-k)!} \right) \right) \right] \right\} \exp(-jm2\pi t_0/T) = \\
 &= \left\{ \frac{1}{-j2\pi m} \left[ \sum_{i=0}^n a_i i! \left( \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{T^i}{(-jm2\pi)^k (i-k)!} \right) \right] \right\} \exp(-jm2\pi t_0/T) - \\
 &\quad - \left\{ \frac{1}{-j2\pi m} \left( \sum_{i=0}^n a_i i! \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \left( \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{t^i}{t^k (-jm2\pi/T)^k (i-k)!} \right) \right) \right\} \exp(-jm2\pi t_0/T) = \\
 &= j \frac{1}{2\pi m} \left\{ \sum_{i=0}^n a_i T^i i! \left( \sum_{k=0}^i \frac{1}{(j2\pi m)^k (i-k)!} \right) - \sum_{i=0}^n \frac{a_i T^i i}{(j2\pi m)^i} \right\} \exp(-jm2\pi t_0/T) = \\
 &= j \frac{1}{2\pi m} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i T^i i! \left( \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{(j2\pi m)^k (i-k)!} \right) \right\} \exp(-jm2\pi t_0/T).
 \end{aligned} \tag{32}$$

В частности, если начало окна отнести к началу временной оси, то выражение (32) приобретет для практики цифрового спектрального анализа простую и удобную для программирования форму

$$\dot{c}_{0m} = j \frac{1}{2\pi m} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i T^i i! \left( \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{(j2\pi m)^k (i-k)!} \right) \right\}. \tag{33}$$

В случае необходимости определения фазового спектра при  $m \neq 0$  фазовый множитель  $\exp(-j2\pi m t_0/T)$  можно учитывать уже с использованием массива чисел, полученных по (33)

$$\dot{c}_m = \dot{c}_{0m} \exp(-j2\pi m t_0/T). \tag{34}$$

Таким образом, получено корректное выражение (34) для цифрового спектрального анализа оконных оцифрованных сигналов с неравномерной дискретизацией, где оконный сигнал аппроксимирован по его выборкам полиномом Ньютона.

Практический интерес для цифровой обработки в ИИС представляют сигналы, являющиеся колебаниями с *гармонической несущей*. Оценку погрешности применения рассмотренной выше методики для гармонических колебаний можно производить на основе коэффициента гармоник, которые неизбежно появляются при аппроксимации сигнала. На рисунке 7 приведен фрагмент скриншота программы вычисления коэффициента гармоник Kg по пяти гармоникам, составленной в среде MathCAD, для приведенного в статье примера аппроксимированного колебания. В общем случае, число оценочных гармоник должно определяться в каждом частном случае отдельно.

$$c0(m) := j \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \left[ a_i \cdot \Gamma^i i! \cdot \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot m)^k \cdot (i-k)!} \right]}{2 \cdot \pi \cdot m}$$

Амплитуда 1-й гармоники - основного колебания:  
 $A1 := 2 |c0(1)| \quad A1 = 0.998$

Коэффициент гармоник с учетом 2-5 гармоник  
 $Kg := \frac{\sqrt{(2 \cdot |c0(2)|)^2 + (2 \cdot |c0(3)|)^2 + (2 \cdot |c0(4)|)^2 + (2 \cdot |c0(5)|)^2}}{A1}$   
 $Kg = 2.941 \times 10^{-3}$

Рис. 7. Скриншот программы в среде MathCAD для вычисления Kg

### Выводы

Полученный в данной работе метод для дискретного преобразования Фурье позволяет производить цифровой спектральный анализ сигналов, в отличие от классического БПФ, с неравномерной по времени выборкой их значений, обеспечивая при этом высокую точность. Предложенная методика вычисления спектра оконного сигнала, предусматривающая нелинейное преобразование масштаба времени зарегистрированного сигнала, может быть использована в разработке программного обеспечения измерительных доплеровских станций, предназначенных для работы с малоразмерными, движущимися с большими ускорениями объектами.

#### Список литературы

1. Нуссбаумер, Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток / Г. Нуссбаумер ; пер. с англ. Ю. Ф. Касимов, И. П. Пчелинцева ; под ред. В. М. Амербаева, Т. Э. Кренкеля. – М. : Радио и связь, 1985. – 246 с.
2. Херрис, Ф. Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье / Ф. Дж. Херрис // ТИИРЭ. – 1978. – Т. 61, № 1. – С. 60 – 96.
3. Булатов, В. Н. Применение спектрально-временных методов в доплеровских системах : монография / В. Н. Булатов, Н. А. Косарев, О. В. Худорожков. – Оренбург : Университет, 2012. – 196 с.
4. Корн, Г. А. Справочник по математике / Г. А. Корн, Т. М. Корн ; под ред. И. Г. Арамановича. – М. : Наука, 1978. – 831 с.
5. Дьяконов, В.П. MathCAD 7.0 в математике, физике и в Internet / В.П. Дьяконов, И.В. Абраменкова. – М.: Нолидж, 1998. – 352 с.
6. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник для вузов / И. С. Гоноровский. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Сов. радио, 1977. – 608 с.
7. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1986. – 544 с.

---

## Spectral Transformation of Signals with Uneven Sampling

V. N. Bulatov, O. V. Khudorozhkov

*Department "Industrial Electronics and Data Measuring Equipment",  
 "Orenburg State University", Orenburg, Russia; promel@unpk.osu.ru*

**Keywords:** Fourier transformation; interpolation; spectral transformation; uneven discretization.

**Abstract:** The article provides the rationale for the relevance of spectral transformation of signals with uneven discretization. The method of making a polynomial on samples of signal values with uneven discretization on a finite time interval is presented. The output of expression of the spectral density for the approximating polynomial is made. It forms the basis for the expression of spectrum for a registered array of signals samples with uneven discretization. The proposed method for the discrete Fourier transformation allows producing a digital spectral analysis of signals, in contrast to the classical FFT, with uneven time sampling of their values, thus ensuring high accuracy.

### References

1. Nussbaumer G., Kasimov Yu.F., Pchelintseva I.P., Amerbaev V.M., Krenkel' T.E. *Bystroe preobrazovanie Fur'e i algoritmy vychisleniya svertok* [Fast Fourier Transform and Convolution], Moscow: Radio i svyaz', 1985, 246 p. (In Russ., abstract in Eng.)
2. Herris F.G. [The use of windows for harmonic analysis by the discrete Fourier transform], *TIIRE* [TIIRE], 1978, vol. 61, no. 1, pp. 60-96. (In Russ.)
3. Bulatov V.N., Kosarev N.A., Khudorozhkov O.V. *Primenenie spektral'no-vremennykh metodov v doplerovskikh sistemakh : monografiya* [The use of spectral-temporal methods Doppler systems: monograph], Orenburg: Universitet, 2012, 196 p. (In Russ.)
4. Korn G.A., Korn T.M., Aramanovich I.G. *Spravochnik po matematike* [Handbook of Mathematics], Moscow: Nauka, 1978, 831 p. (In Russ.)
5. D'yakov V.P., Abramenkova I.V. *MathCAD 7.0 v matematike, fizike i v Internet*, Moscow: Nolidzh, 1998, 352 p. (In Russ.)
6. Gonorovskii I.S. *Radiotekhnicheskie tsepi i signaly : uchebnik dlya vuzov* [Radio Circuits and Signals : a textbook for high schools], Moscow: Sovetskoe radio, 1977, 608 p. (In Russ.)
7. Bronshtein I.N., Semendyaev K.A. *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchaschikhsya vuzov* [Handbook of mathematics for engineers and students of technical colleges], Moscow: Nauka, 1986, 544 p. (In Russ.)

---

## Spektrale Umgestaltung der Signale mit dem ungleichdimensionalen Sampling

**Zusammenfassung:** Es ist die Begründung der Aktualität der spektralen Umgestaltung der Signale mit dem ungleichdimensionalen Sampling angeführt. Es ist die Methodik des Ausarbeitens des Polynoms nach dem Auswahl der Bedeutungen des Signals mit dem ungleichdimensionalen Sampling auf dem endlichen Intervall der Zeit dargelegt. Für das approximierenden Polynom ist die Folgerung der Formel der spektralen Dichte angeführt und es ist auf ihrer Grundlage die Formel des Linienspektrums für das registrierten Massiv der Auswähle des Signals mit dem ungleich-dimensionalen Sampling gebildet.

---

## Transformation spectrale des signaux avec une discrétisation non uniforme

**Résumé:** Est décrite la justification de l'actualité de la transformation spectrale des signaux avec une discrétisation non uniforme. Est présentée la méthodologie de la composition du polynôme d'après les échantillons des valeurs du signal avec une discrétisation non uniforme sur l'intervalle final du temps. Pour un polynôme

d'approximation est citée une conclusion l'expression de la densité spectrale et à sa base est composée la formule du spectre de raies pour l'enregistrement d'un massif d'échantillons de signal avec une discrétisation non uniforme.

---

**Авторы:** *Булатов Виталий Николаевич* – доктор технических наук, профессор кафедры «Промышленная электроника и информационно-измерительная техника»; *Худорожков Олег Викторович* – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Промышленная электроника и информационно-измерительная техника», ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный университет», г. Оренбург, Россия.

**Рецензент:** *Соловьев Николай Алексеевич* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем, ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный университет», г. Оренбург, Россия.

---