УДК 66.01.011
DOI: 10.17277/vestnik.2016.04.pp.596-601

СПОСОБ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ

Е. Н. Туголуков[1], А. В. Непрокин[2], А. В. Горбунов[2], В. М. Нечаев[3]

Кафедры: «Техника и технологии производства нанопродуктов» (1); tugolukov.en@mail.ru; «Биомедицинская техника» (2); «Технологические процессы, аппараты и техносферная безопасность» (3), ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия

Ключевые слова: аналитическое решение; математическое моделирование; метод конечных интегральных преобразований; сходимость рядов; температурные поля.

Аннотация: На примере задачи нестационарной теплопроводности для многослойной неограниченной пластины с произвольными начальными и неоднородными граничными условиями показан способ улучшения результатов компьютерной реализации аналитических решений задач математической физики. Представлен алгоритм использования метода конечных интегральных преобразований по координате, вдоль которой теплофизические характеристики рассматриваемого объекта меняются ступенчато. Проведено сравнение видов решений, полученных с выделением стационарной составляющей и без него.

Применение современных средств компьютерной техники позволяет использовать задачи математической физики в частных производных для решения широкого круга инженерных и научно-исследовательских задач. Достоинство аналитических подходов при математическом моделировании сложных процессов переноса, помимо отсутствия систематических погрешностей методов решений, – относительно малый объем вычислений и, как следствие, малое время получения результатов расчетов, что позволяет использовать аналитические подходы в системах реального времени. Для решения рассматриваемого класса задач наиболее целесообразным представляется метод конечных интегральных преобразований, теория которого разработана Н. С. Кошляковым [1].

Компьютерная реализация аналитических решений задач математической физики в частных производных имеет свои особенности, в частности, связанные с необходимостью суммирования рядов, входящих в решения. Мероприятия, направленные на повышение сходимости рядов, позволяют повысить качество результатов расчетных работ.

Рассмотрим задачу теплопроводности для n-слойной неограниченной пластины с произвольным начальным и неоднородными граничными условиями [2]:

$$\frac{\partial t_i\left(x_i,\tau\right)}{\partial\tau}=a_i^2\,\frac{\partial^2 t_i\left(x_i,\tau\right)}{\partial x_i^2},\quad i=1,2,...,N,\quad 0\le x_i\le R_i,\quad \tau>0; \tag{1}$$

$$t_i\left(x_i,0\right)=f_i\left(x_i\right); \tag{2}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(0,\tau)}{\partial r_1} - \alpha_1 \left(t_1(0,\tau) - t_{c1}\right) = 0; \tag{3}$$

$$\lambda_N \frac{\partial t_N(R_N,\tau)}{\partial r_N} + \alpha_N \left(t_N(R_N,\tau) - t_{cN}\right) = 0; \tag{4}$$

$$t_j\left(R_j,\tau\right) = t_{j+1}\left(R_j,\tau\right); \quad \lambda_j \frac{\partial t_j\left(R_j,\tau\right)}{\partial r_j} = \lambda_{j+1} \frac{\partial t_{j+1}(0,\tau)}{\partial r_{j+1}}, \quad j = 1, 2, ..., N-1, \tag{5}$$

где $t_i(x_i,\tau)$ – температурное поле i-й области; x – пространственная координата; τ – время; λ_i, a_i^2 – соответственно коэффициенты теплопроводности и температуропроводности i-й области; N – число слоев многослойной области; R_i – координата границы i-й области; α_1, α_N – коэффициенты конвективной теплоотдачи от внешних поверхностей в окружающую среду; t_{c1}, t_{cN} – температуры окружающей среды на внешних границах области.

Для исключения координаты x, вдоль которой свойства пластины изменяются ступенчато, используем формулу перехода к изображениям

$$U(\mu,\tau) = \sum_{m=1}^{N} \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_0^{R_m} t_m(x_m,\tau) W_m(x_m,\mu)\, dx_m. \tag{6}$$

Ядро интегрального преобразования $W_m(x_m,\mu)$ – решение задачи Штурма–Лиувилля с соответствующими однородными граничными условиями, определяемое с точностью до постоянного множителя (здесь μ – параметр):

$$\frac{d^2 W_m(x_m,\mu)}{d r_m^2} + \frac{\mu^2}{a_m^2} W_m(x_m,\mu) = 0, \quad m = 1, 2, ..., N, \quad 0 \le x_m \le R_m; \tag{7}$$

$$\lambda_1 \frac{d W_1(R_0,\mu)}{d r_1} - \alpha_1 W_1(R_0,\mu) = 0; \tag{8}$$

$$\lambda_N \frac{d W_N(R_N,\mu)}{d r_N} + \alpha_N W_N(R_N,\mu) = 0; \tag{9}$$

$$W_j\left(R_j,\mu\right) = W_{j+1}(0,\mu); \quad \lambda_j \frac{d W_j(0,\mu)}{d r_j} = \lambda_{j+1} \frac{d W_{j+1}(0,\mu)}{d r_{j+1}}, \quad j = 1, 2, ..., N-1. \tag{10}$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$W_m(x_m,\mu) = C_m \sin\left(\frac{\mu x_m}{a_m} + \varphi_m\right). \tag{11}$$

Из граничных условий (8) – (10) определим числа φ_m, C_m, μ, причем $C_1 = 1$:

$$\varphi_1 = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_1 \mu}{\alpha_1 a_1}\right); \tag{12}$$

$$\varphi_{j+1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_{j+1} a_j}{\lambda_j a_{j+1}} \operatorname{tg}\left(\frac{\mu R_j}{a_j} + \varphi_j\right)\right), \quad j = 1, 2, ..., N-1; \tag{13}$$

$$C_{j+1} = C_j \frac{\sin\left(\dfrac{\mu R_j}{a_j} + \varphi_j\right)}{\sin\left(\varphi_{j+1}\right)}; \tag{14}$$

μ – последовательные положительные корни уравнения

$$\frac{\lambda_N \mu}{a_N}\cos\left(\frac{\mu R_N}{a_N}+\varphi_N\right)+\alpha_N \sin\left(\frac{\mu R_N}{a_N}+\varphi_N\right)=0. \qquad (15)$$

Для перехода к изображениям необходимо формулу (6) применить почленно к уравнению (1) и начальному условию (2).

В изображениях получаем задачу:

$$\frac{dU(\mu,\tau)}{d\tau}+\mu^2 U(\mu,\tau)=\frac{\alpha_N}{\lambda}W(R_N,\mu)t_{cN}+\frac{\alpha_1}{\lambda}W(R_1,\mu)t_{c1}; \qquad (16)$$

$$U(\mu,0)=\sum_{m=1}^{N}\frac{\lambda_m}{a_m^2}\int\limits_{R_{m-1}}^{R_m} f_m(x_m)W_m(x_m,\mu)\,dx_m. \qquad (17)$$

Решение задачи (16) – (17) в изображениях имеет вид

$$U(\mu,\tau)=\exp\left(-\mu^2\tau\right)\left(U(\mu,0)+\frac{1}{\mu^2\lambda}\left(\alpha_N W(R_N,\mu)t_{cN}+\alpha_1 W(R_0,\mu)t_{c1}\right)\left(\exp\left(\mu^2\tau\right)-1\right)\right). \qquad (18)$$

Обратный переход для задачи (1) – (5) осуществляется по формуле

$$t_m(r_m,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U(\mu,\tau)\,W_m(r_m,\mu)}{Z}, \qquad (19)$$

где

$$Z=\sum_{m=1}^{N}\frac{\lambda_m}{a_m^2}\int\limits_{0}^{R_m} W_m^2(x_m,\mu)\,dx_m=0,5\sum_{m=1}^{N}\frac{\lambda_m}{a_m^2}C_m^2\times$$

$$\times\left(R_m-\frac{a_m}{\mu}\left(\sin\left(\frac{\mu R_m}{a_m}+\varphi_m\right)\cos\left(\frac{\mu R_m}{a_m}+\varphi_m\right)-\sin(\varphi_m)\cos(\varphi_m)\right)\right). \qquad (20)$$

Суммирование в выражении (19) проводится по значениям собственных чисел μ. Компьютерная реализация решения (19) задачи (1) – (5) показывает, что наличие слагаемого $\frac{1}{\mu^2\lambda}\left(\alpha_N W(R_N,\mu)t_{cN}+\alpha_1 W(R_0,\mu)t_{c1}\right)\left(\exp\left(\mu^2\tau\right)-1\right)$ в формуле (18) заметно ухудшает сходимость ряда в (19).

Улучшить сходимость ряда в решении задачи (1) – (5) и, как следствие, повысить качество компьютерной реализации решения можно, предварительно выделив стационарную составляющую решения

$$t_i(x_i,\tau)=S_i(x_i)+P_i(x_i,\tau), \qquad i=1,2,...,N, \qquad (21)$$

где $S_i(x_i)$ – решение стационарной задачи с неоднородными граничными условиями:

$$\frac{d^2S_i(x_i)}{dx_i^2}=0, \qquad i=1,2,...,N, \qquad 0\le x_i\le R_i; \qquad (22)$$

$$\lambda_1\frac{dS_1(0)}{dx_1}-\alpha_1\left(S_1(0)-t_{c1}\right)=0; \qquad (23)$$

$$\lambda_N\frac{dS_N(R_N)}{dx_N}+\alpha_N\left(S_N(R_N)-t_{cN}\right)=0; \qquad (24)$$

$$S_j\left(R_j\right)=S_{j+1}(0);\qquad \lambda_j \frac{d\,S_j\left(R_j\right)}{d\,x_j}=\lambda_{j+1}\frac{d\,S_{j+1}(0)}{d\,x_{j+1}},\qquad j=1,2,...,N-1,\quad (25)$$

тогда решение стационарной задачи (22) – (25) примет вид:

$$S_i\left(x_i\right)=A_i\,x_i+B_i; \quad (26)$$

$$A_i=\frac{t_{cN}-t_{c1}}{\lambda_i\left(\dfrac{1}{\alpha_1}+\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{R_k}{\lambda_k}+\dfrac{1}{\alpha_N}\right)}; \quad (27)$$

$$B_i=t_{cN}-\frac{\left(t_{cN}-t_{c1}\right)\left(\dfrac{R_i}{\lambda_i}+\sum\limits_{k=i+1}^{N}\dfrac{R_k}{\lambda_k}+\dfrac{1}{\alpha_N}\right)}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{R_k}{\lambda_k}+\dfrac{1}{\alpha_N}}; \quad (28)$$

$P_i\left(x_i,\tau\right)$ – решение нестационарной задачи с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial P_i\left(x_i,\tau\right)}{\partial\tau}=a_i^2\frac{\partial^2 P_i\left(x_i,\tau\right)}{\partial x_i^2},\ i=1,2,...,N,\quad 0\le x_i\le R_i,\quad \tau>0; \quad (29)$$

$$P_i\left(x_i,0\right)=f_i\left(x_i\right)-S_i\left(x_i\right); \quad (30)$$

$$\lambda_1\frac{\partial P_1(0,\tau)}{\partial x_1}-\alpha_1 P_1(0,\tau)=0; \quad (31)$$

$$\lambda_N\frac{\partial P_N\left(R_N,\tau\right)}{\partial x_N}+\alpha_N P_N\left(R_N,\tau\right)=0; \quad (32)$$

$$P_j\left(R_j,\tau\right)=P_{j+1}(0,\tau);\qquad \lambda_j\frac{\partial P_j\left(R_j,\tau\right)}{\partial x_j}=\lambda_{j+1}\frac{\partial P_{j+1}(0,\tau)}{\partial x_{j+1}},\qquad j=1,2,...,N-1.\quad (33)$$

Решение задачи (29) – (33) может быть получено методом конечных интегральных преобразований с использованием формулы перехода к изображениям (6) относительно функции $P_i\left(x_i,\tau\right)$

$$U(\mu,\tau)=\sum_{m=1}^{N}\frac{\lambda_m}{a_m^2}\int_0^{R_m}P_m\left(x_m,\tau\right)W_m\left(x_m,\mu\right)dx_m. \quad (34)$$

Обратный переход для задачи (29) – (33) осуществляется аналогично формуле (19)

$$P_i\left(x_i,\tau\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_1(\mu,\tau)\,W_i\left(x_i,\mu\right)}{Z}, \quad (35)$$

где $U_1(\mu,\tau)$ – решение задачи в изображениях:

$$\frac{d\,U_1(\mu,\tau)}{d\,\tau}+\mu^2U_1(\mu,\tau)=0; \quad (36)$$

$$U_1(\mu,0)=\sum_{m=1}^{N}\frac{\lambda_m}{a_m^2}\int_0^{R_m}\left(f_m\left(x_m\right)-S_m\left(x_m\right)\right)W_m\left(x_m,\mu\right)dx_m. \quad (37)$$

Решением задачи (36) – (37) является функция

$$U_1(\mu,\tau)=U_1(\mu,0)\exp\left(-\mu^2\tau\right). \quad (38)$$

Таким образом, решение исходной задачи (1) – (5), полученное при выделении стационарной составляющей, имеет вид

$$t_i(x_i,\tau)=A_i x_i+B_i+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_1(\mu,\tau)W_i(x_i,\mu)}{Z}. \quad (39)$$

Результатом выделения стационарной составляющей при решении задачи (1) – (5) является то, что ряд в решении (39) имеет существенно лучшую сходимость. Благодаря этому повышается качество компьютерной реализации решения исходной задачи теплопроводности, так как снижаются объем вычислений и общая вычислительная погрешность. Кроме того, процедура получения решения $P_i(x_i,\tau)$ нестационарной задачи теплопроводности значительно упрощается, а решение $S_i(x_i)$ стационарной задачи (22) – (25) может иметь самостоятельную ценность при расчетах стационарных процессов.

Аналогичный подход при получении аналитических решений других задач нестационарной теплопроводности в ходе разработки математических моделей температурных полей использован в ряде работ [3, 4].

Список литературы

1. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М.Смирнов. – М. : Высшая школа, 1970. – 712 с.
2. Туголуков, Е. Н. Математическое моделирование технологического оборудования многоассортиментных химических производств : монография / Е. Н. Туголуков. – М. : Машиностроение, 2004. – 100 с.
3. Коновалов, В. И. О возможностях использования точных, интервальных и приближенных аналитических методов в задачах тепло- и массопереноса в твердых телах. Часть 1: Постановка проблемы. Точные аналитические методы / В. И. Коновалов, Е. Н. Туголуков, Н. Ц. Гатапова // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 1995. – Т. 1, № 1–2. – С. 75 – 90.
4. Туголуков, Е. Н. Моделирование теплопередачи в биметаллических аппаратах с каналами охлаждения в стенках / Е. Н. Туголуков, В. А. Богуш, А. Г. Ткачев // Вестн. Тамб. гос. тнхн. ун-та. – 2003. – Т. 9, № 1. – С. 42 – 49.

Method for Improving the Quality of Mathematical Modeling of Unsteady Temperature Fields

E.N. Tugolukov[1], A.V. Neprokin[2], A.V. Gorbunov[2], V. M. Nechaev[3]

Departments: "Technology and Manufacturing of Nanoproducts" (1); tugolukov.en@mail.ru; "Biomedical Engineering" (2); "Technological Processes, Devices and Technosphere Safety" (3), TSTU, Tambov, Russia

Keywords: analytical solution; mathematical modeling; method of finite integral transformations; convergence of series; temperature fields.

Abstract: Using the example of transient heat conduction problem for the multilayer infinite plate with arbitrary initial and inhomogeneous boundary conditions, we showed how to improve the results of the computer implementation of analytical solutions of mathematical physics problems with inhomogeneous boundary conditions. The algorithm for the method of integral transformations in the coordinate along which the thermal characteristics of the object change in steps. A comparison of the types of solutions obtained without isolation and separation of the stationary component is made.

References

1. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki* [Partial differential equations of mathematical physics], Moscow: Vysshaya shkola, 1970, 712 p. (In Russ.)
2. Tugolukov E.N. *Matematicheskoe modelirovanie tekhnologicheskogo oborudovaniya mnogoassortimentnykh khimicheskikh proizvodstv* [Mathematical modeling of technological equipment of chemical manufactures mnogoassortimentnyh], Moscow: Mashinostroenie, 2004, 100 p. (In Russ.)
3. Konovalov V.I., Tugolukov E.N., Gatapova N.Z. [Possibilities for the Use of Some Exact, Interval and Approximate Analytical Methods for Heat and Mass Transfer Problems in Solids. Part 1: Statement of Problem. The Exact Analytical Methods], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 1995, vol. 1, no. 1-2, pp. 75-90. (In Russ., abstract in Eng.)
4. Tugolukov E.N., Bogush V.A., Tkachyov A.G. [Modeling of Heat Transfer in Bimetal Apparatuses with Canals of Cooling in Walls], *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2003, vol. 9, no. 1, pp. 42-49. (In Russ., abstract in Eng.)

Weise der Erhöhung der Qualität der mathematischen Modellierung der nichtstationären Temperaturfelder

Zusammenfassung: Am Beispiel der Aufgabe der nichtstationären Wärmeleitfähigkeit für die mehrschichtigen unbeschränkten Platte mit den willkürlichen Anfangsbedingungen und mit den verschiedenartigen Randbedingungen ist die Weise der Verbesserung der Ergebnisse der Computerrealisierung der analytischen Lösungen der Aufgaben der mathematischen Physik mit den ungleichartigen Randbedingungen vorgeführt. Es ist der Algorithmus der Nutzung der Methode der endlichen Integralumgestaltungen nach der Koordinate, die entlang die wärme-physikalischen Charakteristiken des betrachtenden Objektes sich stufig ändern, angeführt. Es wird der Vergleich der Arten der Lösungen, die ohne Absonderung und mit der Absonderung der stationären Komponente erhalten sind, durchgeführt.

Moyen de l'augmentation de la qualité de la modélisation mathématique des champs de température non stationnaires

Résumé: A l'exemple de la tâche non-stationnaire de la conductivité thermique pour une plaque multicouche illimitée avec les conditions limites des initiales facultatives et hétérogènes est montré le moyen de l'amélioration des résultats de la réalisation informatique des solutions analytiques des problèmes de la physique mathématique avec les conditions limites hétérogènes. Est présenté l'algorithme de l'utilisation de la méthode des transformations finales intégrales sur une coordonnée le long de laquelle les caractéristiques thermophysiques de l'objet examiné changent en étapes. Est effectuée une comparaison des solutions obtenues.

Авторы: ***Туголуков Евгений Николаевич*** – доктор технических наук, профессор кафедры «Техника и технологии производства нанопродуктов»; ***Непрокин Алексей Владимирович*** – студент; ***Горбунов Алексей Викторович*** – доктор медицинских наук, доцент кафедры «Биомедицинская техника»; ***Нечаев Василий Михайлович*** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Технологические процессы, аппараты и техносферная безопасность», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.

Рецензент: ***Гатапова Наталья Цибиковна*** – доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой «Технологические процессы, аппараты и техносферная безопасность», ФГБОУ ВО «ТГТУ», г. Тамбов, Россия.