

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ «СЖИМАЮЩЕЕСЯ ЯДРО» ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССА ВЫЩЕЛАЧИВАНИЯ ЗОЛОТА ИЗ ПОЛИФРАКЦИОННОЙ РУДЫ

Н. В. Ковалев<sup>1</sup>, В. Н. Ковалев<sup>2</sup>, В. А. Холоднов<sup>1</sup>, М. Ю. Лебедева<sup>3</sup>

*Кафедра «Системный анализ», ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет)» (1);  
АО «Полиметалл – Инжиниринг» (2), Санкт-Петербург, Россия;  
филиал Национального исследовательского университета  
«Московский энергетический институт», г. Смоленск, Россия (3);  
nkovalev05@gmail.com*

**Ключевые слова:** влияние температуры на степень извлечения; внутридиффузионная область; выщелачивание; золото; модифицированная математическая модель «сжимающееся ядро»; цианирование.

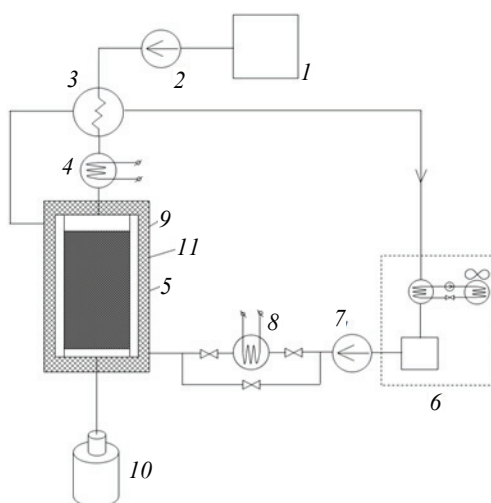
**Аннотация:** Представлено выщелачивание золота из полифракционной руды при пониженной температуре. Дано описание экспериментальных данных и предложена модификация модели «сжимающееся ядро», заключающаяся во введении функции, учитывающей зависимость степени извлечения золота от размера частицы руды и начального содержания металла в частице. Опираясь на данные, полученные в двух параллельных экспериментах, выполненных при различных температурах, предложена модель позволяющая рассчитать эволюции степени извлечения золота при температурах, отличных от экспериментально исследованных как из отдельных фракций, так и из их смеси – руды.

---

Рост производства золота в последние два десятилетия прошлого века во многом связан с широким внедрением в промышленность технологии кучного выщелачивания (КВ) [1]. Кучное выщелачивание оказалось не только надежной технологией извлечения металлов из небольших месторождений, но и привлекательным способом переработки низкосортных руд крупных месторождений [1, 2].

Кучное выщелачивание имеет ряд преимуществ по сравнению с обычной технологией производства драгоценных металлов, включающей дробление, измельчение и агитационное выщелачивание. Эти преимущества состоят в простоте технологии, низких капитальных и эксплуатационных затратах, более быстром во времени начале эксплуатации и менее сложной системе охраны окружающей среды [1, 2]. Основным недостатком технологии кучного выщелачивания на территории криолитозоны является потенциально более низкая степень извлечения металла из руды по сравнению с обычной, стандартной технологией. Извлечение золота предприятиями, расположенными в криолитозоне, не превышает 70 % и связано, прежде всего, с отрицательной среднегодовой температурой воздуха [1, 2].

Характерной чертой развития производства драгоценных металлов в настоящее время является «продвижение» предприятий КВ в восточные и северные регионы Российской Федерации – зоны более сурового климата. Это объясняется



**Рис. 1. Принципиальная схема экспериментальной установки низкотемпературного выщелачивания драгоценных металлов**

КВ (рис. 1). Установка позволяет проводить испытания при температурах руды и выщелачивающего раствора от 1 до 20 °С.

Системы регулирования температуры руды и выщелачивающего раствора построены следующим образом: выщелачивающий раствор и хладагент предварительно охлаждаются несколько ниже задания, затем посредством электрических нагревателей данные потоки подогреваются до требуемых температур. Пониженные температуры создаются холодильным агрегатом – чиллером 6, охлаждающим промежуточный теплоноситель – водный раствор пропиленгликоля (хладагента). Выщелачивающий раствор из емкости 1 перистальтическим насосом 2 дозируют в теплообменник 3, затем раствор поступает в корректирующий электрический нагреватель 4 и далее в перколятор 5 на орошение руды. Охлажденный раствор пропиленгликоля из чиллера 6 циркуляционным насосом 7 подается в корректирующий электрический нагреватель 8, далее хладагент с заданной температурой поступает в рубашку перколятора 9 и затем в теплообменник 3. Суточная проба продуктивных растворов накапливается в сборнике 10.

В качестве датчиков температуры на установке используются термопары типа ХК (хромель-копель), вторичные приборы – контроллеры температуры типа ТРМ. Регулирование температуры хладагента на входе в рубашку перколятора осуществляется по ПИД-закону. Контроль и регистрация температуры руды проводится в шести точках по высоте слоя руды.

Экспериментально изучено выщелачивание золота из руды месторождения Светлое. Усредненная по времени выщелачивания температура руды составила 10 °С в эксперименте с искусственным охлаждением и 19,2 °С в опыте выполненном при «комнатной» температуре. Далее по тексту приняты обозначения:  $t = 10$  °С – для выщелачивания при искусственном охлаждении и  $t = 20$  °С – для эксперимента, выполненного при «комнатной» температуре.

Расход выщелачивающего раствора поддерживался постоянным и равным  $5 \cdot 10^{-8}$  м<sup>3</sup>/с (0,18 л/ч), плотность орошения составила  $1,36 \cdot 10^{-6}$  м<sup>3</sup>/(м<sup>2</sup>·с) (5 л/(м<sup>2</sup>·ч)). Концентрация цианида натрия в выщелачивающем растворе поддерживалась в диапазоне  $(10,5 \pm 0,7)$  моль/м<sup>3</sup> ( $(0,52 \pm 0,04)$  г/л). Концентрация кислорода в выщелачивающем и продуктивном растворах измерялась периодически и находилась в диапазоне  $(0,34 \pm 0,03)$  моль/м<sup>3</sup> ( $(10,8 \pm 1)$  мг/л) в эксперименте

тем, что значительное число крупных месторождений цветных, драгоценных и редких металлов находится в условиях развития криолитозоны, характеризующейся отрицательными значениями среднегодовой температуры [2].

Одним из приоритетных путей повышения извлечения золота является оптимизация температурного режима КВ, которая может быть выполнена лишь при наличии кинетической модели, учитывающей влияние температуры на скорость извлечения металла из руды. В АО «Полиметалл инжиниринг» (Санкт-Петербург) создана установка низкотемпературного выщелачивания золота для изучения влияния температуры руды на основные технологические параметры процесса

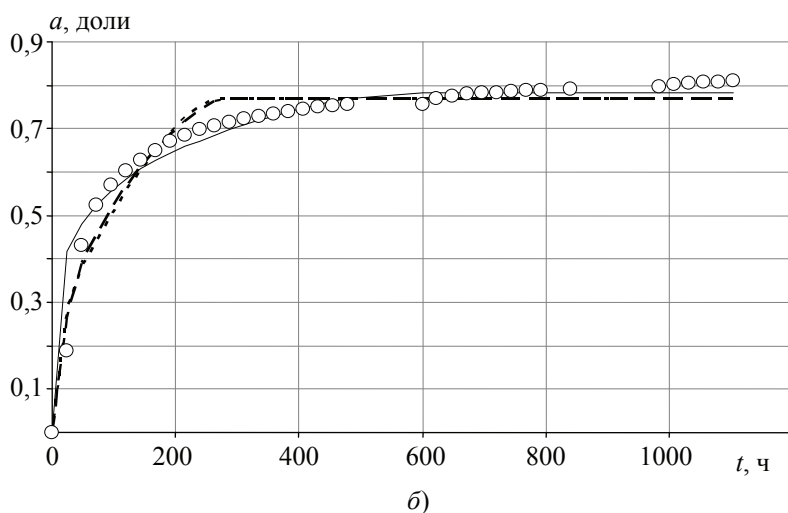
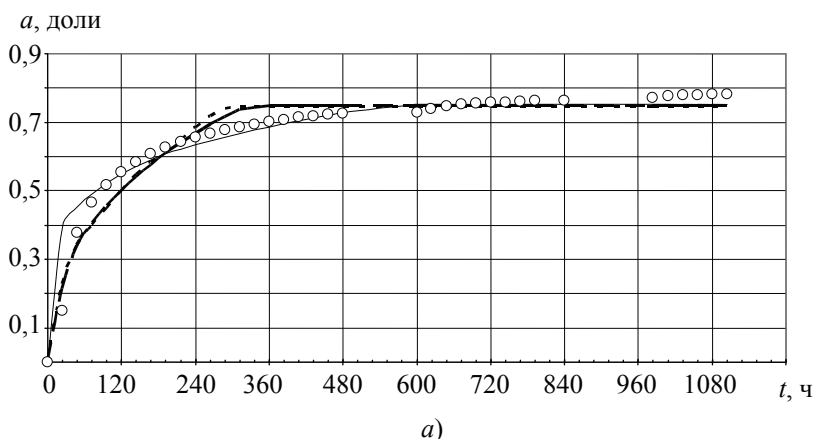
при  $t = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$  и  $(0,29 \pm 0,01)$  моль/м<sup>3</sup> ( $(9,2 \pm 0,4)$  мг/л) в эксперименте при  $t = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Продолжительность выщелачивания в обоих экспериментах составила 1104 ч.

Результаты экспериментов представлены на рис. 2 [3]. Масса руды в перколяторе 75 кг, гранулометрический состав руды и начальное содержание золота в фракциях приведены в табл. 1.

Степень извлечения золота  $x_k$  в  $k$ -й временной точке рассчитывали по формуле

$$x_k = \frac{\sum_{j=1}^k z_j V_j}{Z_s M + \sum_{j=1}^N z_j V_j}, \quad (1)$$

где  $z_j$  – концентрация золота в  $j$ -й суточной пробе продуктивного раствора, мг/л;  $V_j$  – объем  $j$ -й суточной пробы продуктивного раствора, л;  $M$  – масса руды, кг;  $Z_s$  – содержание золота в выщелоченной руде, мг/кг;  $N$  – число суточных проб продуктивного раствора.



**Рис. 2. Экспериментальная и расчетные степени извлечения золота (эксперименты при  $t = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$  (а) и  $t = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$  (б)):**

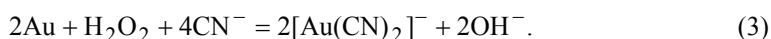
○ – экспериментальные значения; расчетные значения: - - - - внешнEDIффузионная; — — — — внутрEDIдиффузионная; — — — — кинетическая области

Таблица 1

## Характеристика рудной загрузки в перколяторы

Номер фракции	Диаметр частицы, мм			Фракция, доли	Содержание золота в исходной руде, г/т	
	min	max	среднее		$t = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$	$t = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$
1	10	20	15	0,604	1,496	1,662
2	5	10	7,5	0,156	1,613	1,793
3	2	5	3,5	0,097	1,767	1,964
4	1	2	1,5	0,047	1,678	1,865
5	0,5	1	0,75	0,035	1,929	2,144
6	0	0,5	0,25	0,061	5,075	5,641
Среднее по навеске руды					1,781	1,979

Выщелачивание золота принято описывать уравнениями [4, 5]:



Основное количество золота окисляется согласно уравнению (2) [1, 4, 5]. Отметим, что в процессе эксперимента цианид и кислород находились в значительном избытке по отношению к золоту.

Масса золота в навеске руды, рассчитанная по содержанию 1,979 г/т, составляет  $7,535 \cdot 10^{-4}$  моль ( $1,484 \cdot 10^{-4}$  кг). Объем раствора, удерживаемого исследуемой рудой, в процессе выщелачивания составил примерно  $3,947 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ , что соответствует 5 % влажности руды. При этом в перколяторе содержалось 0,039 моль ( $1,895 \cdot 10^{-3}$  кг) цианида натрия. Количество растворенного кислорода в выщелачивающем растворе, рассчитанное по концентрации 0,27 моль/м<sup>3</sup>, равно  $1,066 \cdot 10^{-3}$  моль. Избыток над стехиометрией реакции (2) по цианиду натрия составил 25,653, по кислороду – 2,829.

В течение 1104 ч непрерывного орошения в перколятор было подано 0,199 м<sup>3</sup> выщелачивающего раствора. С этим объемом раствора в руду введено 1,946 моль цианида натрия и 0,054 моль кислорода. В данном случае избыток реагентов над стехиометрией реакции (2) может быть оценен как 1291 по цианиду натрия и 142 по кислороду. Для обработки экспериментальных данных использована модель сжимающегося ядра (Shrinking Core Model) [6].

В соответствии с положениями данной модели, зона реакции постепенно продвигается вглубь частицы, оставляя за собой инертную часть твердого вещества, условно называемого «золотом». В любой момент времени имеется ядро еще не вступившего в реакцию материала, размер которого постоянно уменьшается.

Для описания процесса выщелачивания металла из полифракционной руды моделью «сжимающееся ядро» сделаем ряд допущений:

- 1) золото выщелачивается в соответствии с реакцией (2);
- 2) порядок реакции (2) по цианиду равен нулю, так как цианид натрия находится в значительном избытке по отношению к золоту [4, с. 162, 5, 7, 8];
- 3) концентрация растворенного кислорода в выщелачивающем растворе в перколяторе постоянна, поскольку кислород находится в значительном избытке по отношению к золоту;
- 4) реакция (2) имеет первый порядок по кислороду [4, с. 162, 5, 7, 8];
- 5) реакция (2) является необратимой;
- 6) температурные условия эксперимента – изотермические;
- 7) частица руды имеет сферическую форму.

В рамках данной модели взаимосвязь времени процесса и степени превращения ключевого компонента записывается для областей [6]:

– внешнедиффузионной

$$\theta(x) = x; \quad (4)$$

– внутридиффузионной

$$\theta(x) = 1 - 3 \cdot (1 - x)^{2/3} + 2 \cdot (1 - x); \quad (5)$$

– кинетической

$$\theta(x) = 1 - 3 \cdot (1 - x)^{1/3}, \quad (6)$$

где  $x$  – степень извлечения металла;  $\theta$  – приведенное время процесса

$$\theta = \frac{t}{\tau}, \quad (7)$$

здесь  $t$  – время процесса выщелачивания, с;  $\tau$  – время, за которое вещество, находящееся в частице, полностью прореагирует (время завершения процесса выщелачивания), с.

Определим время протекания процесса  $\tau$  для различных областей [6]:

– внешнедиффузионной

$$\tau = \frac{\rho_0 R}{\nu 3 k_g C} = \frac{\rho_0 R}{b_{\text{exd}}}; \quad (8)$$

– внутридиффузионной

$$\tau = \frac{\rho_0 R^2}{\nu 6 D C} = \frac{\rho_0 R^2}{b_{\text{ind}}}; \quad (9)$$

– кинетической

$$\tau = \frac{\rho_0 R}{\nu k_C C} = \frac{\rho_0 R}{b_{\text{kin}}}, \quad (10)$$

где  $\rho_0$  – начальная концентрация золота в твердой фазе, моль/м<sup>3</sup>;  $R$  – радиус сферической частицы, м;  $\nu$  – коэффициент стехиометрический золота в реакции (2);  $k_g$  – коэффициент массопередачи, м/с;  $C$  – концентрация кислорода в жидкой фазе, моль/м<sup>3</sup>;  $D$  – эффективный коэффициент диффузии кислорода в слое «золы», м<sup>2</sup>/с;  $k_C$  – константа скорости реакции (2), м/с;  $b$  – параметры минимизации по областям

$$b = \begin{cases} b_{\text{exd}} - \text{внешнедиффузионная область;} \\ b_{\text{ind}} - \text{внутридиффузионная область;} \\ b_{\text{kin}} - \text{кинетическая область.} \end{cases} \quad (11)$$

Скорость отнесена к единице поверхности сжимающегося ядра. Числители выражений (8) – (10) представляют собой константы, характеризующие частицы руды, и включают величины, определяемые перед экспериментом по перколяционному выщелачиванию. В рамках принятых допущений знаменатели данных выражений также являются константами, но в отличие от числителя, их значения могут быть получены лишь косвенным путем при обработке экспериментальных данных по завершению исследования.

Для частиц одинакового размера в качестве аргумента может быть использована как степень превращения, так и время. Для смеси частиц разного размера функцией является наблюдаемая степень извлечения металла одновременно из всех фракций смеси, поэтому в качестве аргумента следует принять время.

Таким образом, при обработке данных, полученных при исследовании процесса выщелачивания из смеси частиц, вместо уравнений (4) – (6) следует использовать обратные им функции вида

$$x(\theta) = \varphi(\theta). \quad (12)$$

При обработке экспериментальных данных использованы обратные функции, полученные табулированием уравнений (4) и (5).

В соответствии с [6] для дальнейшего анализа экспериментальных данных выбираем функцию

$$y(t) = 1 - x(t), \quad (13)$$

где  $x(t)$  – степень извлечения металла из одной фракции руды.

Часть золота, содержащегося в рудах, находится в неизвлекаемом при цианидном выщелачивании виде, так называемое «нецианируемое» золото [9]. Опыт перколяционного выщелачивания показывает, что в отработанных рудах неизвлеченное золото сосредоточено в крупных фракциях, мелкие же фракции руды выщелачиваются практически полностью.

В настоящей работе предпринята попытка учесть зависимость степени выщелачивания от размера частицы и начального содержания целевого компонента (золота) в ней.

Задав максимальную степень превращения ключевого компонента в виде

$$x_{\max} = 1 - \Delta x \quad (14)$$

принимаем, что величина «недоизвлечения»  $\Delta x$  прямо пропорциональна содержанию ключевого компонента в частице  $\rho_0 V$ , ее радиусу и обратно пропорциональна внешней поверхности частицы

$$\Delta x \sim \frac{\rho_0 V R}{S} = B \rho_0 R^2, \quad (15)$$

где  $V$  – объем сферической частицы,  $m^3$ ;  $S$  – внешняя поверхность сферической частицы,  $m^2$ ;  $B$  – коэффициент пропорциональности,  $m/\text{моль}$ .

Вид зависимости (14) можно объяснить следующим образом. Количество «нецианируемого» золота пропорционально содержанию металла в частице  $\rho_0 V$ . С ростом радиуса частицы увеличивается путь диффузии, что, с одной стороны, приводит к увеличению «недоизвлечения», с другой, – увеличение размера частицы приводит к росту поверхности массообмена, что снижает «недоизвлечение»  $\Delta x$ .

Введение в модель параметра  $B$ , определяющего максимальную степень извлечения золота, приводит к изменению метода расчета времени завершения процесса  $t_{\max}$ . В этом случае время завершения процесса рассчитывается

$$t_{\max} = \theta_{\max} \tau \quad (16)$$

откуда

$$\theta_{\max} = \theta(x_{\max}), \quad (17)$$

где  $\theta_{\max}$  – безразмерное время полного завершения процесса, в зависимости от области протекания процесса рассчитывается по уравнениям (4) – (6);  $\tau$  – время, за которое вещество, находящееся в частице, полностью прореагирует, определяется в зависимости от области протекания процесса уравнениями (8) – (10).

Вычисление функции  $y$  для каждой фракции руды производили численно. Блок-схема алгоритма расчета функции  $y$  приведена на рис. 3.

Реализация функции  $y(t)$  в виде процедуры позволяет:

- 1) рассчитывать значения функции  $y$  для одной фракции руды;

2) наложить ограничения на степень извлечения металла  $x \leq 1$ ;

3) обрабатывать экспериментальные данные в любой области протекания процесса: внешнедиффузионной, внутريدиффузионной и кинетической, для этого в операторах 3 и 5 необходимо использовать выражения, соответствующие области протекания процесса (см. рис. 3).

*Замена выражения в операторе*

3. При расчете времени полного превращения во внешнедиффузионной, внутريدиффузионной или кинетической областях в операторе 3 используются уравнения (8), (9) или (10) соответственно.

*Замена функции в операторе 5.*

При расчете степени извлечения в предположении о течении процесса во внешнедиффузионной области в операторе 5 используется уравнение (4). В предположении о течении процесса во внутريدиффузионной или кинетической области в операторе 5 используется обратная функция (табличная), полученная из уравнений (5) или (6).

Полагая, что каждая фракция руды вносит аддитивный вклад в наблюдаемую степень выщелачивания, запишем функцию  $Y(t)$  для смеси фракций руды в виде [6]

$$Y(b, B, t) = \sum_{i=0}^n a_i y(\rho_{0i}, R_i, b, B, t), \quad (18)$$

где  $y(\rho_{0i}, R_i, b, B, t)$  – функция  $y$  для  $i$ -й фракции руды;  $a_i$  – доля золота в  $i$ -й фракции руды

$$a_i = \frac{\rho_{0i} a v_i}{\sum_{i=1}^n \rho_{0i} a v_i} = \frac{z_{0i} a m_i}{\sum_{i=1}^n z_{0i} a m_i} = \frac{z_{0i} a m_i}{z m}, \quad (19)$$

где  $a v_i$  – объемная доля  $i$ -й фракции руды;  $a m_i$  – массовая доля  $i$ -й фракции руды;  $z_{0i}$  – начальное содержание золота в  $i$ -й фракции руды, г/т;  $z m$  – среднее содержание золота в смеси фракций руды, г/т.

Целевая функция минимизации

$$SSE = \sum_{i=0}^n [Y_{\text{эксп}}(t) - Y(b, B, t)]^2 = \min, \quad (20)$$

где  $Y_{\text{эксп}}(t)$  – функция, определенная из экспериментальной степени выщелачивания из смеси фракций руды

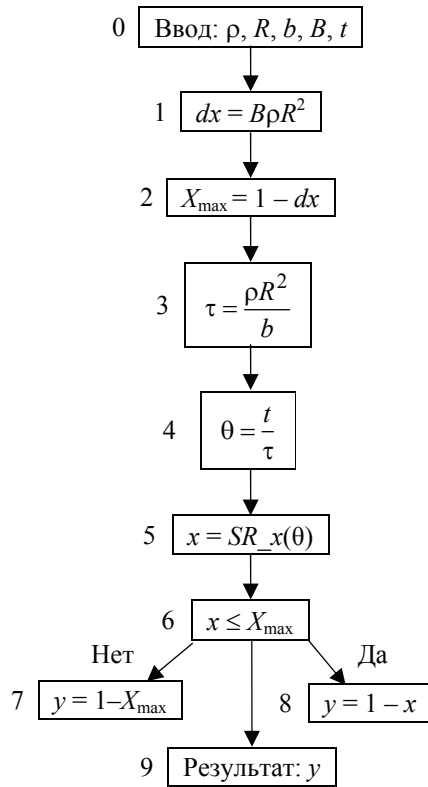


Рис. 3. Блок-схема алгоритма расчета функции  $y$  во внутريدиффузионной области (параметры минимизации  $b$  и  $B$ )

$$Y_{\text{экс}}(t) = 1 - X(t), \quad (21)$$

где  $X(t)$  – наблюдаемая степень извлечения металла из смеси всех фракций руды.

При обработке экспериментальных данных в качестве параметров минимизации использовали константы  $b$  (20) и  $B$ , определяющую «недоизвлечение» золота из каждой фракции руды (15).

Значения констант  $b$  и  $B$ , доставляющие минимум функции  $SSE$ , приведены в табл. 2, минимальные значения функции  $SSE$ , полученные в предположениях о различных лимитирующих стадиях процесса выщелачивания, – табл. 3.

Сравнение экспериментальных и расчетных степеней извлечения золота, полученных для трех областей протекания процесса: внешнедиффузионной, внутридиффузионной и кинетической, показывает, что предположение о протекании процесса во внутридиффузионной области позволяет наилучшим образом аппроксимировать экспериментальные данные (см. рис. 2).

Из данных табл. 2 следует, что коэффициенты  $b$  и  $B$  зависят от температуры.

В соответствии с положениями модели «сжимающегося ядра» температурная зависимость коэффициента  $b$  определяется во внешнедиффузионной области – температурной зависимостью коэффициента массопередачи  $k_g$ , во внутридиффузионной области – коэффициента диффузии  $D$ , в кинетической области – константой скорости химической реакции  $k_c$ . Предположив для коэффициентов  $b$  температурную зависимость вида

$$b(T) = b_0 e^{\frac{-E}{RT}}, \quad (22)$$

Таблица 2

**Константы  $b$  и  $B$  для различных областей протекания процесса**

Эксперимент	Температура руды, °С	Область протекания процесса выщелачивания					
		внешне-диффузионная		внутри-диффузионная		кинетическая	
		$b_{\text{exd}}$	$B$	$b_{\text{ind}}$	$B$	$b_{\text{kin}}$	$B$
$t = 10\text{ °С}$	9,9	7,79E-11	4,02E+05	7,83E-14	3,87E+05	3,13E-11	3,97E+05
$t = 20\text{ °С}$	19,1	1,09E-10	3,29E+05	1,17E-13	3,07E+05	4,65E-11	3,28E+05

Таблица 3

**Минимальные значения функции  $SSE$  (20), полученные при различных вариантах расчета**

Эксперимент	Область протекания процесса выщелачивания			Примечание
	внешне-диффузионная	внутри-диффузионная	кинетическая	
$t = 10\text{ °С}$	0,0470	0,0750	0,0390	При расчете $SSE$ использованы все экспериментальные точки
$t = 20\text{ °С}$	0,0550	0,0640	0,0430	
$t = 10\text{ °С}$	0,0403	0,0096	0,0333	При расчете $SSE$ отброшены точки 24 и 48 ч
$t = 20\text{ °С}$	0,0431	0,0089	0,0359	



где

$$b_0 = \begin{cases} \sqrt{3} C k_{g0} & \text{– внешнедиффузионная область;} \\ \sqrt{6} C D_0 & \text{– внутридиффузионная область;} \\ \sqrt{C} k_{C0} & \text{– кинетическая область,} \end{cases} \quad (23)$$

определим величины  $b_0$  и  $E$  (табл. 4).

Количество не выщелоченного из руды золота также зависит от температуры. Увеличение температуры увеличивает степень извлечения золота из руды, что в модели выражается уменьшением коэффициента  $B$ . Оценка величин  $B_0$  и  $Q$  (табл. 4) выполнена для температурной зависимости вида

$$B(T) = B_0 e^{\frac{Q}{RT}}. \quad (24)$$

В работе [7] процесс цианирования золота изучался методом вращающегося диска. Для внешнедиффузионной области получено значение энергии активации 14550 Дж/моль при условии лимитирования процесса цианирования диффузией цианида и 15350 Дж/моль при лимитировании процесса диффузией кислорода.

Для кинетической области [7] получили значения  $E = 59184$  Дж/моль при избытке кислорода и недостатке цианида и  $E = 40936$  Дж/моль при недостатке кислорода и избытке цианида. Сравнивая энергии активации  $E$  из работы [7] со значениями, полученными в настоящей работе (см. табл. 4), можно сделать заключение о том, что процесс выщелачивания золота из руды месторождения Светлое не лимитируется ни скоростью химической реакции окисления золота, ни подводом реагентов к поверхности частиц руды – внешней диффузией.

В ряде работ [6; 10, с. 138; 11, с. 209; 12, с. 245] показано, что при значительной роли диффузии в порах, кажущаяся энергия активации, найденная из аррениусовского графика, будет представлять собой среднее арифметическое истинной энергии активации и энергии активации диффузии.

Если принять, что процесс лимитирует диффузия кислорода, то определенная по данным [7], кажущаяся энергия активации для процесса во внутридиффузионной области составит

$$E = \frac{40936 + 15350}{2} = 28143, \text{ Дж/моль,} \quad (25)$$

что весьма близко к величине, полученной при обработке экспериментальных данных в предположении о протекании процесса во внутридиффузионной области  $E = 30090$  Дж/моль (см. табл. 4).

В работе [13] изучена наблюдаемая скорость выщелачивания золота из частиц руды различных размеров. Получено эмпирическое уравнение для определения степени извлечения золота в зависимости от температуры и времени выщелачивания. Эффективная энергия активации, входящее в это уравнение, составляет  $E = 36600$  Дж/моль.

Таблица 4

Параметры уравнений (22) и (24)

Область протекания процесса выщелачивания	$b_0$	$E$ , Дж/моль	$B_0$ , м/моль	$Q$ Дж/моль
Внешнедиффузионная	3,43E–06	25170	683	15010
Внутридиффузионная	2,79E–08	30090	244	17350
Кинетическая	9,27E–06	29660	911	14300

Примечание: коэффициент  $b_0$  имеет размерность моль/(с·м<sup>2</sup>) во внешнедиффузионной и кинетической области и моль/(с·м) во внутридиффузионной области.

Информация о температурных зависимостях коэффициентов  $b$  и  $B$  (уравнения (22) – (24), см. табл. 4) позволяет выполнить прогнозные расчеты эволюций степени извлечения золота при температурах, отличных от экспериментально исследованных температур, как из отдельных фракций, так и из их смеси – руды. Блок-схема алгоритма процедуры расчета степени извлечения золота из конкретной фракции руды при протекании процесса выщелачивания золота во внутридиффузионной области приведена на рис. 4. В предлагаемой модификации модели «сжимающееся ядро» процесс выщелачивания из  $i$ -й фракции руды прекращается по достижению  $x_{\max_i}$ , поэтому расчет степени выщелачивания золота  $x$  выполнялся численно (табл. 5). Степень извлечения золота из руды (смеси фракций) рассчитывалась как аддитивная величина

$$x_{\text{изв}}(T_j, t) = \sum_{i=1}^6 a_i x_i(T_j, t), \quad (26)$$

где  $x_{\text{изв}}(T_j, t)$  – степень извлечения золота из руды при температуре  $T_j$  к моменту

времени  $t$ ;  $x_i(T_j, t)$  – степень извлечения золота из  $i$ -й фракции руды при температуре  $T_j$  к моменту времени  $t$ ;  $a_i$  – начальная массовая доля золота в  $i$ -й фракции руды.

Сравнение расчетных степеней извлечения золота с экспериментальными данными (табл. 6) иллюстрирует возможность использования модифицированной модели «сжимающееся ядро» для описания процесса выщелачивания золота из руды (смеси фракций) месторождения Светлое при различных температурах. Расчет выполнен для внутридиффузионной области.

Повышение температуры руды увеличивает степень извлечения золота и ускоряет выщелачивание – уменьшает время завершения процесса. Чем крупнее фракция руды, тем заметнее влияние температуры на характеристики процесса.

Уменьшение среднего радиуса фракции также благоприятно сказывается на характеристиках процесса выщелачивания. Так, фракции 5 и 6 выщелачиваются практически полностью в течение очень короткого времени.

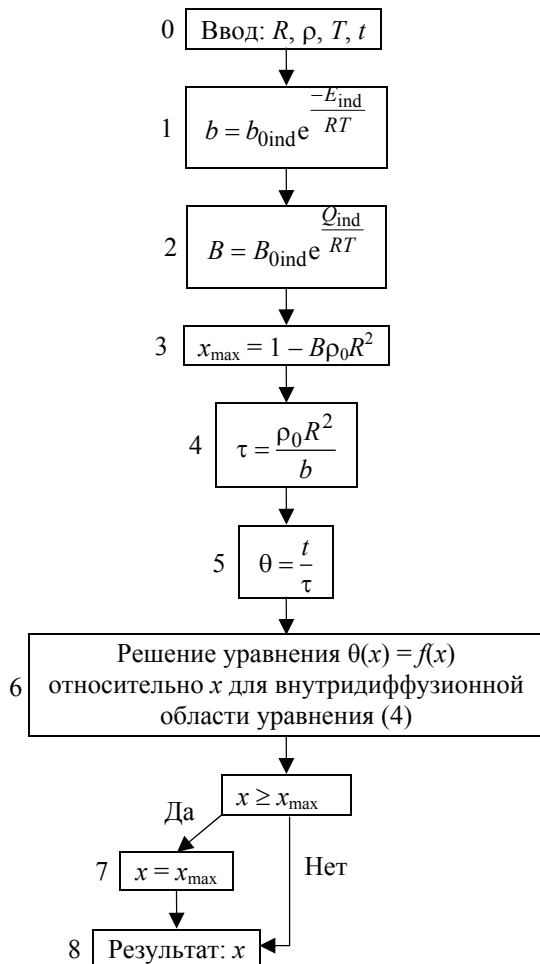


Рис. 4. Блок-схема алгоритма расчета степени извлечения золота из конкретной фракции руды (внутридиффузионная область)

Таблица 5

**Зависимость степени извлечения золота из рудных фракций месторождения  
Светлое от времени выщелачивания при различных температурах**

Время выщелачивания, ч	Температура, К				Время выщелачивания, ч	Температура, К			
	273,1 5	283, 15	293,1 5	303,1 5		273, 15	283,1 5	293,1 5	303,1 5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Фракция № 1 ( $R_{cp} = 7,5$ мм)					Фракция № 2 ( $R_{cp} = 3,75$ мм)				
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0	0,000	0,000	0,000	0,000
73	0,176	0,220	0,270	0,326	44	0,256	0,318	0,387	0,463
147	0,245	0,304	0,371	0,442	87	0,352	0,434	0,523	0,617
220	0,296	0,366	0,442	0,527	130	0,422	0,516	0,617	0,720
294	0,338	0,416	0,502	0,594	174	0,478	0,581	0,689	0,796
367	0,373	0,456	0,551	0,649	217	0,525	0,635	0,747	0,853
441	0,405	0,496	0,593	0,695	261	0,566	0,681	0,795	0,899
514	<b>0,416</b>	0,528	0,631	<b>0,726</b>	304	0,603	0,721	0,835	<b>0,926</b>
588		<b>0,554</b>	<b>0,653</b>		348	0,635	0,756	0,869	
735					435	0,692	0,815	<b>0,906</b>	
955	0,416	0,554	0,653	0,726	565	0,761	<b>0,880</b>	0,906	0,926
1323					783	<b>0,842</b>	0,880		
Фракция № 3 ( $R_{cp} = 1,75$ мм)					Фракция № 4 ( $R_{cp} = 0,75$ мм)				
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0	0,000	0,000	0,000	0,000
14	0,294	0,363	0,441	0,525	3	0,311	0,384	0,465	0,553
28	0,402	0,493	0,590	0,691	6	0,425	0,519	0,620	0,724
42	0,480	0,583	0,691	0,797	8	0,506	0,613	0,723	0,830
56	0,541	0,653	0,766	0,872	11	0,570	0,685	0,799	0,903
70	0,593	0,710	0,825	0,925	14	0,623	0,743	0,857	0,952
84	0,637	0,758	0,871	0,963	17	0,669	0,791	0,902	0,984
98	0,676	0,799	0,909	<b>0,982</b>	19	0,708	0,831	0,937	<b>0,997</b>
112	0,711	0,834	0,939		25	0,774	0,895	0,983	
139	0,769	0,890	<b>0,978</b>	0,982	28	0,802	0,920	<b>0,996</b>	
209	0,875	<b>0,971</b>	0,978		44	0,920	<b>0,995</b>		0,997
321	<b>0,962</b>	0,971			52	0,957		0,996	
					66	<b>0,993</b>	0,995		
Фракция № 5 ( $R_{cp} = 0,375$ мм)					Фракция № 6 ( $R_{cp} = 0,125$ мм)				
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000
0,8	0,316	0,390	0,472	0,560	0,2	0,318	0,393	0,475	0,563
1,6	0,431	0,526	0,628	0,732	0,5	0,434	0,530	0,632	0,736
2,5	0,513	0,621	0,732	0,839	0,7	0,516	0,624	0,736	0,843

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3,3	0,578	0,693	0,808	0,910	1,0	0,581	0,697	0,811	0,914
4,1	0,631	0,751	0,865	0,958	1,2	0,635	0,755	0,869	0,961
4,9	0,677	0,799	0,910	0,988	1,5	0,681	0,803	0,913	0,990
5,7	0,717	0,840	0,944	<b>0,999</b>	1,7	0,721	0,844	0,947	<b>1,000</b>
8,2	0,811	0,927	0,998		2,4	0,815	0,930	0,999	
9,0	0,836	0,947	<b>0,999</b>		2,7	0,839	0,950	<b>1,000</b>	
13,1	0,928	<b>0,999</b>		0,999	3,9	0,931	<b>1,000</b>		1,000
15,5	0,963		0,999		4,6	0,966		1,000	
20,5	<b>0,998</b>	0,999			6,1	<b>0,999</b>	1,000		

Таблица 6

**Экспериментальные и расчетные эволюции степени извлечения золота  
при различных температурах (руда – смесь фракций № 1 – 6)**

Время выщелачивания, ч	Расчет при температуре, К				Эксперимент при температуре, К	
	273,15	283,15	293,15	303,15	283,15 ( <i>t</i> = 10 °С)	293,15 ( <i>t</i> = 20 °С)
1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0
12	0,283	0,303	0,322	0,341	–	–
24	0,330	0,356	0,382	0,407	0,150	0,188
48	0,397	0,434	0,471	0,511	0,379	0,432
72	0,445	0,489	0,537	0,587	0,466	0,524
96	0,472	0,520	0,572	0,623	0,517	0,570
120	0,494	0,546	0,600	0,650	0,555	0,602
144	0,515	0,570	0,626	0,677	0,584	0,628
168	0,532	0,589	0,644	0,697	0,607	0,649
192	0,548	0,606	0,660	0,716	0,627	0,670
216	0,563	0,622	0,676	0,735	0,643	0,685
240	0,575	0,634	0,691	0,750	0,657	0,697
264	0,588	0,646	0,704	0,764	0,668	0,707
288	0,599	0,657	0,717	0,778	0,679	0,715
312	0,609	0,667	0,729	0,789	0,687	0,722
336	0,618	0,677	0,740	0,798	0,695	0,728
360	0,626	0,686	0,750	0,807	0,702	0,734
384	0,634	0,695	0,760	0,815	0,708	0,740
408	0,641	0,704	0,768	0,822	0,714	0,745
432	0,649	0,712	0,775	0,830	0,719	0,750
456	0,654	0,720	0,782	0,836	0,724	0,754
480	0,657	0,727	0,788	0,841	0,726	0,755
504	0,661	0,735	0,795	0,846	–	–
528	0,663	0,741	0,799	<b>0,849</b>	–	–

Продолжение табл. 6

1	2	3	4	5	6	7
552	0,665	0,747	0,803		–	–
576	0,667	0,752	0,807		–	–
600	0,668	<b>0,754</b>	<b>0,808</b>		0,728	0,756
624	0,670				0,739	0,769
648	0,671				0,747	0,775
672	0,672				0,752	0,779
696	0,674				0,756	0,782
720	0,675				0,758	0,784
744	0,676				0,759	0,785
768	<b>0,677</b>				0,761	0,787
792					0,763	0,788
816				0,849	–	–
840					0,764	0,790
864		0,754	0,808		–	–
888					–	–
912					–	–
936					–	–
960	0,677				–	–
984					0,771	0,797
1008					0,777	0,802
1032					0,779	0,805
1056					0,780	0,806
1080					0,782	0,808
1104					0,782	0,809

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

– модель «сжимающееся ядро» может быть использована для описания процесса выщелачивания (цианирования) золота из руды;

– модифицирование модели «сжимающееся ядро» заключается во введении функции, учитывающей зависимость степени выщелачивания от размера частицы и начального содержания металла (золота) в ней;

– модифицированная модель «сжимающееся ядро» позволяет рассчитать степень извлечения металла и время завершения процесса выщелачивания как для отдельно взятой фракции, так и смеси фракций руды, опираясь на экспериментальные данные, полученные в двух параллельных изотермических экспериментах по выщелачиванию смеси фракций руды, выполненных при различных температурах;

– процесс выщелачивания золота в диапазоне температур 10...20 °С из руды месторождения Светлое исследованного фракционного состава протекает во внутридиффузионной области;

– выщелачивающие растворы КВ необходимо подогревать как для ускорения процесса, так и увеличения степени извлечения;

– кучное выщелачивание в зонах холодного климата требует более мелкого дробления руды, поскольку не выщелоченное золото сосредоточено в крупных фракциях. Мелкие фракции руды выщелачиваются практически полностью.

#### Список литературы

1. Кучное выщелачивание благородных металлов / под ред. М. И. Фазлулина. – М. : Изд-во Академии горных наук, 2001. – 647 с.

2. Шестернев, Д. М. Кучное выщелачивание золота в криолитозоне России / Д. М. Шестернев, В. П. Мязин, А. Е. Баянов // Гор. журн. – 2015. – № 1. – С. 49 – 54.
3. Ковалев, Н. В. Экспериментальная установка для низкотемпературного выщелачивания золота / Н. В. Ковалев, В. А. Холоднов, В. Н. Ковалев / Изв. Смол. гос. университета. – 2015. – № 2-1. – С. 247 – 257.
4. Вольдман, Г. М. Теория гидрометаллургических процессов : учеб. пособие для вузов / Г. М. Вольдман, А. Н. Зеликман. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Интермет Инжиниринг, 2003. – 464 с.
5. Каковский, И. А. Термодинамика и кинетика гидрометаллургических процессов / И. А. Каковский, С. С. Набойченко. – Алма-Ата : Наука, 1986. – 272 с.
6. Levenspiel, O. Chemical Reaction Engineering / O. Levenspiel. – 3<sup>rd</sup> ed. – New York ; Chichester ; Weinheim ; Brisbane ; Singapor ; Toronto : John Wiley ; Sons Inc, 1999. – 684 p.
7. An Improved Rate Equation for Cyanidation of a Gold Ore / P. Ling [et al.] // Canadian Metallurgical Quarterly. – 1996. – Vol. 35, No. 3. – P. 225 – 234.
8. Kondos, P. D. Process Optimization Studies in Gold Cyanidation / P. D. Kondos, G. Deschênes, R. M. Morrison // Hydrometallurgy. – 1995. – Vol. 39. – P. 235 – 250.
9. Шумилова, Л. В. Анализ причин упорности руд с дисперсным золотом при цианировании / Л. В. Шумилова // Гор. информ.-аналит. бюл. (науч.-техн. журн.). – 2009. – № 6. – С. 184 – 193.
10. Саттерфилд, Ч. Массопередача в гетерогенном катализе. – Пер. кн. А. Р. Брун-Цехового. – М. : Химия, 1976. – 240 с.
11. Закгейм, А. Ю. Введение в моделирование химико-технологических процессов / А. Ю. Закгейм. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Химия, 1982. – 288 с.
12. Семиохин, И. А. Кинетика химических реакций : учеб. пособие / И. А. Семиохин, Б. В. Страхов, А. И. Осипов. – М. : Изд-во МГУ, 1995. – 351 с.
13. Boufferd, S. C. Evaluation of Kinetic and Diffusion Phenomena in Cyanide Leaching of Crushed and Run-of-Mine Gold Ores / S. C. Boufferd, D. G. Dixon // Hydrometallurgy. – 2007. – Vol. 86. – P. 63 – 71.

## Mathematical Model “Shrinking Core” Describing the Process of Gold Leaching from Multifractional Ore

N. V. Kovalev<sup>1</sup>, V. N. Kovalev<sup>2</sup>, V. A. Holodnov<sup>1</sup>, M. Yu. Lebedeva<sup>3</sup>

*Department “System Analysis”, Saint-Petersburg State Technological Institute (Technical University) (1); JSC “Polymetal – Engineering” (2), St. Petersburg, Russia; Branch of the National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Smolensk, Russia (3); nkovalev05@gmail.com*

**Keywords:** cyanidation; gold; internal diffusion zone; leaching; low temperature; “Shrinking core” model modification.

**Abstract:** The paper describes the findings of experimental studies of multifractional low temperature gold leaching from the ore. “Shrinking core” model modification allows calculating the metal extraction rate of the leaching process and completion time for individual fractions and mixture of fractions of ore based on the experimental data obtained in a single experiment of leaching ore mixture fractions. The model is modified by including the function that takes into account the dependence between maximum gold extraction rate and the ore particle size and initial metal concentration. It is shown that in the temperature range 10 – 20 °C the leaching process

of the studied fractional composition of gold from “Svetloe” ore field takes place in the internal diffusion zone. To increase the volume of extraction and the leaching rate of gold in the areas of cold climate heating of solutions and finer crushing of ore are required.

### References

1. Fazlullina M.I. *Kuchnoe vyshchelachivanie blagorodnykh metallov* [Heap leaching of noble metals], Moscow: Akademii gornykh nauk, 2001, 647 p. (In Russ.)
2. Shesternev D.M., Myazin V.P., Bayanov A.E. [Heap leaching of gold in the permafrost zone of Russia], *Gornyi zhurnal* [Mining Journal], 2015, no. 1, pp. 49-54, doi: 10.17580/gzh.2015.01.09 (In Russ.)
3. Kovalev N.V., Kholodnov V.A., Kovalev V.N. [Pilot unit for low temperature gold leaching], *Izvestiya Smolenskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2015, no. 2-1, pp. 247-257. (In Russ., abstract in Eng.)
4. Vol'dman G.M., Zelikman A.N. *Teoriya gidrometallurgicheskikh protsessov : ucheb. posobie dlya vuzov* [Theory of hydrometallurgical processes: proc. manual for schools], Moscow: Internet Inzhiniring, 2003, 464 p. (In Russ.)
5. Kakovskii I.A., Naboichenko S.S. *Termodinamika i kinetika gidrometallurgicheskikh protsessov* [Thermodynamics and Kinetics of hydrometallurgical processes], Alma-Ata: Nauka, 1986, 272 p. (In Russ.)
6. Levenspiel O. *Chemical Reaction Engineering*, 3rd ed., New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Singapor, Toronto: John Wiley, Sons Inc, 1999, 684 p.
7. Ling P., Papangelakis V.G., Argyropoulos S.A., Kondos P.D. An Improved Rate Equation for Cyanidation of a Gold Ore, *Canadian Metallurgical Quarterly*, 1996, vol. 35, no. 3, pp. 225-234.
8. Kondos P.D., Deschênes G., Morrison R.M. Process Optimization Studies in Gold Cyanidation, *Hydrometallurgy*, 1995, vol. 39, pp. 235-250.
9. Shumilova L.V. [Analysis of the causes of refractory ores with dispersed gold cyanidation], *Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten' (nauchno-tekhnicheskii zhurnal)* [Mining Informational and Analytical Bulletin (Scientific and Technical Journal)], 2009, no. 6, pp. 184-193. (In Russ.)
10. Satterfield Ch., Brun-Tsekhovogo A.R. *Massoperedacha v geterogennom katalize* [Mass transfer in heterogeneous catalysis], Moscow: Khimiya, 1976, 240 p.
11. Zakgeim A.Yu. *Vvedenie v modelirovanie khimiko-tekhnologicheskikh protsessov* [Introduction to the modeling of chemical-engineering processes], Moscow: Khimiya, 1982, 288 p. (In Russ.)
12. Semiokhin I.A., Strakhov B.V., Osipov A.I. *Kinetika khimicheskikh reaktsii : ucheb. posobie* [Kinetics of chemical reactions : proc. benefit], Moscow: Izd-vo MGU, 1995, 351 p. (In Russ.)
13. Boufferd S.C., Dixon D.G. Evaluation of Kinetic and Diffusion Phenomena in Cyanide Leaching of Crushed and Run-of-Mine Gold Ores, *Hydrometallurgy*, 2007, vol. 86, pp. 63-71.

---

## Mathematische Modell “der zusammengepresste” Kern für die Beschreibung des Prozesses des Auslösens des Goldes aus dem Polyphrasieerz

**Zusammenfassung:** Es ist das Auslösen des Goldes aus dem Polyphrasieerz bei der herabgesetzten Temperatur dargelegt. Es ist die Beschreibung der experimentalen Daten gegeben und es ist die Modifikation des Modells “der zusammengepresste Kern”

vorgeschlagen, das in der Einführung der Funktion besteht und die Abhängigkeit der Stufe der Extraktion des Goldes vom Umfang des Teilchens des Erzes und des Anfangsmetallgehaltes im Teilchen berücksichtigt.

Sich auf die in zwei parallelen Experimenten bekommenen Daten stützend, die bei den verschiedenen Temperaturen erhalten wurden, ist das Modell vorgeschlagen, das die Evolutionen der Stufe der Extraktion des Goldes bei den experimentell untersuchten unterscheidenden Temperaturen zu berechnen zulässt, wie aus den abgesonderten Fraktionen, als auch aus ihrer Mischung – des Erzes. Im Umfang der Temperaturen 10...20 °C verläuft der Prozess des Auslösens des Goldes aus dem Erz des Vorkommens “das Helle” des untersuchten Fraktionsbestandes in dem Innendiffusionsgebiet. Für die Vergrößerung der Stufe der Extraktion und der Geschwindigkeit des Auslösens des Goldes in den Bezirken des kalten Klimas ist die Anwärmung der Lösungen und die kleinere Zerkleinerung des Erzes nötig.

---

### **Modèle mathématique “noyau serrant” pour la description du processus de l’alcalisation de l’or à partir du minerai polyfractionné**

**Résumé:** Est présentée l’alcalisation de l’or à partir du minerai polyfractionné à basse température. Est donnée la description des données expérimentales, est proposée la modification du modèle “noyau serrant” consistant l’introduction de la fonction tenant compte du degré de la dépendance de l’extraction de l’or des particules du minerai de fer et de la teneur initiale du métal dans une particule. En s’appuyant sur les données obtenues lors des deux expériences parallèles effectuées à différentes températures, est proposé le modèle permettant de calculer l’évolution du degré d’extraction de l’or à températures autres que celles expérimentales. Pour augmenter le degré de l’extraction et la vitesse de l’alcalisation de l’or dans les zones au climat froid sont nécessaire le chauffage des solutions et le moindre broyage du minerai.

---

**Авторы:** *Ковалев Николай Васильевич* – аспирант кафедры «Системный анализ», ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет)», г. Санкт-Петербург, Россия; *Ковалев Василий Николаевич* – кандидат технических наук, начальник лаборатории гидрометаллургического управления АО «Полиметалл – Инжиниринг», г. Санкт-Петербург, Россия; *Холоднов Владислав Алексеевич* – доктор технических наук, профессор кафедры «Системный анализ», ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет)», г. Санкт-Петербург, Россия; *Лебедева Марина Юрьевна* – кандидат технических наук, доцент кафедры «Менеджмент в информационной технологии», филиал НИУ «Московский энергетический институт», г. Смоленск, Россия.

**Рецензент:** *Туголуков Евгений Николаевич* – доктор технических наук, профессор кафедры «Техника и технологии производства нанопродуктов», ФГБОУ ВО «ТГТУ».