УДК 66.012-52
DOI: 10.17277/vestnik.2016.02.pp.172-181

КОНЦЕПЦИЯ ТЕОРИИ ГИБКОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д. С. Дворецкий[1], С. И. Дворецкий[1], Г. М. Островский[2], С. Г. Толстых[3]

Кафедры: «Технологии и оборудование пищевых и химических производств» (1), topt@topt.tstu.ru; «Информатика» (3), ФГБОУ ВО «ТГТУ»; ОАО «Ордена Трудового Красного Знамени научно-исследовательский физико-химический институт имени Л. Я. Карпова» (2), г. Москва

Ключевые слова: вычислительный эксперимент; гибкость; жесткие и мягкие ограничения; область неопределенности; оптимизация; техническая система.

Аннотация: Изложена концепция теории гибкости технических систем. В качестве модельного примера решены три задачи на экстремум нелинейной целевой функции двух переменных с различным набором нелинейных ограничений: жесткими, мягкими и смешанными. Показано, что решения, полученные для экстремальных задач с мягкими и смешанными ограничениями, являются более экономичными по сравнению с жесткими. При этом наиболее выгодным является решение экстремальной задачи, в которой ограничения выполняются с заданной вероятностью $\alpha = 0{,}95$.

Введение

Методы теории гибкости позволяют определить оптимальную конструкцию технической системы (**ТС**), гарантирующую сохранение ее работоспособности, удовлетворение проектным ограничениям, несмотря на изменение внутренних и внешних факторов на этапе функционирования ТС и использование при проектировании изначально неточных математических моделей [1].

Опишем факторы, влияющие на формулировку задач оптимизации ТС. Первый фактор – уровень точности применяемых математических моделей на этапе проектирования ТС, который может быть повышен за счет использования экспериментальной информации, допущенной на этапе функционирования ТС.

Второй важный фактор – характер ограничений, разделяющихся на две группы. Первая группа содержит жесткие ограничения, связанные с безопасностью функционирования ТС и качеством выпускаемой продукции; такие ограничения должны, безусловно, выполняться, несмотря на наличие неопределенности. Вторая группа включает мягкие ограничения, которые должны выполняться либо с заданной вероятностью, либо в среднем.

Третьим фактором является наличие конструктивных и режимных (управляющих) переменных, с помощью которых достигается гибкость ТС.

Источники неопределенности в задачах оптимизации ТС:

1) первоначальная неточность математических моделей, используемых для проектирования ТС. Она порождается, например, для химико-технологических систем (**ХТС**): а) неточностью эксперимента, с помощью которого определяются коэффициенты математических моделей (константы скоростей химических реакций, коэффициентов массо- и теплопереноса и т.д.); б) неточностью химических и физических закономерностей, положенных в основу математических моделей;

2) изменение внутренних факторов ХТС на этапе ее функционирования, например, активности катализатора, что приводит к изменению констант скорости химических реакций. Оседание некоторых веществ на поверхности теплообмена приводит к изменению коэффициентов теплоотдачи и теплопередачи;

3) изменение внешних факторов функционирования ТС во время ее эксплуатации;

4) неточности в реализации некоторых размеров оборудования при их изготовлении.

Обычно недостаточные знания о процессе сводятся к тому, что некоторые параметры в математических моделях на этапе проектирования технической системы известны неточно и принадлежат некоторой области неопределенности Ξ. Таким образом, при проектировании ТС используются неточные математические модели. Возникает закономерный вопрос: как можно гарантировать выполнение всех требований технического задания на проектирование ТС? Методы теории гибкости позволяют решить данную проблему.

Концепция теории гибкости ТС

Предположим, что на этапе функционирования неопределенные параметры ТС постоянны и переходными процессами можно пренебречь. Поэтому задача оптимального проектирования будет формулироваться как задача статической оптимизации:

$$\min \overline{f}(d, y, \xi); \tag{1}$$

$$d \in D, \quad y \in Y;$$

$$\varphi(d, y, \xi) = 0; \tag{2}$$

$$\overline{g}(d, y, \xi) \le 0, \tag{3}$$

где d – n_d-вектор конструктивных переменных; y – n_y-вектор переменных; которые могут изменяться на этапе функционирования системы; ξ – n_ξ-вектор неопределенных параметров; φ – p-вектор-функция ограничений типа равенства; $\overline{g}$ – m-вектор-функция ограничений типа неравенства; D, Y – области изменения переменных d и y соответственно.

Множество D конструктивных переменных d включает размеры аппаратов и структурные параметры ТС. Очевидно, что переменные d остаются постоянными на этапе функционирования ТС. Вектор изменяемых переменных на этапе функционирования системы y включает переменные, которые могут быть использованы для управления технической системой и переменные, которые характеризуют ее состояние, например, состояние потоков в химико-технологическом процессе. Целевая функция $\overline{f}(d, y, \xi)$ есть мера, оценивающая эффективность работы ТС. Это может быть прибыль, приведенные затраты и т.п. Система ограничений равенств (2) включает уравнения материального и теплового балансов, ограничения неравенства (3) представляют собой математические формулировки требований технического задания на проектирование ТС.

Число степеней свободы в задаче равно $r = \dim y - \dim \varphi$. Обычно $r << \dim y$. Разобьем вектор y на два вектора x и z, где $\dim z = \dim y - \dim x$,

$\dim x = \dim \varphi$. Вектор z – вектор управляющих переменных, вектор x – вектор переменных состояния ТС. Тогда задача (1) – (3) примет вид:

$$\min \bar{f}(d, x, z, \xi); \tag{4}$$

$$d, x, z \in Z;$$

$$\varphi(d, x, z, \xi) = 0; \tag{5}$$

$$\bar{g}(d, x, z, \xi) \le 0, \tag{6}$$

где Z – область изменения переменных z. В последующем предположим, что переменные d, z принадлежат областям D и Z соответственно, однако, не будем явно указывать наличие данной принадлежности.

Так как размерность вектора x равна размерности вектора φ, то для фиксированных d, z и ξ рассмотрим систему (5) как систему нелинейных уравнений для определения x. Следовательно, x – неявная функция переменных $d, z, \xi : x = x(d, z, \xi)$.

Явный вид функций $x(d, z, \xi)$ как правило неизвестен, поэтому для каждой совокупности d, z, ξ переменные x находят численным решением системы нелинейных уравнений (5). Для ХТС – расчет материальных и тепловых балансов.

Подставляя полученное выражение для x в соотношения (4) – (6), исключим переменные x:

$$\min f(d, z, \xi); \tag{7}$$

$$g_j(d, z, \xi) \le 0, \quad j = 1, ..., m, \tag{8}$$

где $f(d, z, \xi) \equiv \bar{f}(d, z, x(d, z, \xi), \xi), g(d, z, \xi) \equiv \bar{g}(d, z, x(d, z, \xi), \xi)$, $\varphi(d, z, x(d, z, \xi), \xi) \equiv 0$.

Область в пространстве $D \times Z$, в котором выполняются ограничения (8), называется допустимой областью задачи оптимизации ТС.

Оптимальный режим (r оптимальных значений управляющих переменных z), найденный решением задачи (7), (8), должен быть реализован с помощью системы автоматического управления.

Область неопределенности Ξ задается следующим образом: $\Xi = \{\xi : \bar{\xi} \le \xi \le \underline{\xi}\}$. Назовем ТС гибкой, а соответствующую конструкцию допустимой, если на этапе функционирования ТС можно удовлетворить все ограничения (жесткие и мягкие) при условии, что неопределенные параметры могут принимать любые решения из области неопределенности Ξ.

Таким образом, при формулировании задачи оптимизации в условиях неопределенности необходимо записать целевую функцию и ограничения. В качестве целевой функции используем некоторую оценку будущей работы ТС на этапе ее функционирования. Поскольку математическое ожидание $M_\xi\{f(d, z, \xi)\}$ дает среднее значение первоначальной целевой функции $f(d, z, \xi)$ на этапе функционирования ТС, то естественно использовать данную величину как целевую функцию задачи оптимизации в условиях неопределенности.

В качестве ограничений используем условия, гарантирующие гибкость ТС на этапе ее функционирования [1]:

$$\max_{\xi \in \Xi} g_j(d, z, \xi) \le 0, \quad j = 1, ..., m. \tag{9}$$

Объединяя целевую функцию $M_\xi\{f(d, z, \xi)\}$ и условия гибкости (9), можно сформулировать задачу оптимизации ТС с жесткими ограничениями в условиях неопределенности:

$$\min_{d, z} M_\xi\{(d, z, \xi)\}; \tag{10}$$

$$\max_{\xi \in \Xi} g_j(d, z, \xi) \le 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Если функции распределения вероятностей для ξ неизвестны, то можно использовать одну из следующих формулировок. Во-первых, решим следующую задачу:

$$\min_{d,z} F(d, z); \tag{11}$$

$$\max_{\xi \in \Xi} g_j(d, z, \xi) \le 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

где $F(d,z) = \sum_{i \in I_1} w_i(d, z, \xi^i)$; w_i – весовые коэффициенты; $\xi^i (i \in I_1)$ – аппроксимационные точки, выбранные априори; I_1 – множество индексов аппроксимационных точек.

Во-вторых, используем стратегию наихудшего случая, где $F(d,z) = \max_{\xi \in \Xi} f(d, z, \xi)$.

Задача (11) имеет решение, если выполняется условие гибкости [1]:

$$\min_{d,z} \max_{\xi \in \Xi} \max_{j \in J} g_j(d, z, \xi) \le 0, \tag{12}$$

которое гарантирует возможность удовлетворения всех ограничений задачи оптимизации для всех значений ξ из области Ξ.

При формулировании одноэтапной задачи оптимизации с мягкими ограничениями рассмотрим случай, в котором будут использоваться вероятностные ограничения. Предположим, что имеется полная информация относительно функции распределения вероятностей для ξ. В этом случае задача оптимизации имеет вид:

$$\min_{d,z} F(d, z); \tag{13}$$

$$\Pr\{g_j(d, z, \xi) \le 0\} = \int_{\Omega_j} P(\xi) d\xi \ge \alpha_j, \quad j = 1, \ldots, m; \tag{14}$$

$$\Omega_j = \{\xi : g_j(d, z, \xi) \le 0, \xi \in \Xi\},$$

где Pr – вероятность выполнения ограничения; α_j – заданное значение вероятности; $P(\xi)$ – функция плотности вероятности.

В качестве функции $F(d, z)$ можно использовать либо среднее значение первоначальной целевой функции $M_\xi\{f(d, z, \xi)\}$ на этапе функционирования ТС, либо наихудшее значение первоначальной целевой функции – $\max_{\xi \in \Xi} f(d, z, \xi)$ (стратегия наихудшего случая). Главная трудность решения задачи состоит в необходимости вычисления многомерных интегралов (13), (14).

Рассмотрим другую формулировку, в которой в качестве критерия будет использоваться его верхняя граница u, которая не может быть нарушена с заданной вероятностью α_0. В этом случае задача с вероятностными ограничениями примет вид:

$$\min_{d,z,u} u; \tag{15}$$

$$\Pr\{f(d, z, \xi) - u \le 0\} \ge \alpha_0; \tag{16}$$

$$\Pr\{g_j(d, z, \xi) \le 0\} \ge \alpha_j, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{17}$$

Сравним данную задачу с задачей (13), (14). В последней используется целевая функция $M_{\xi}\{f(d,z,\xi)\}$, где определяется режим, для которого средняя величина функции $f(d,z,\xi)$ по ξ минимальна. Если в задаче (13), (14) используется целевая функция $\max_{\xi\in\Xi} f(d,z,\xi)$, то минимизируется наихудшее значение целевой функции $f(d,z,\xi)$ по ξ. В задаче (15) – (17) находим наименьшее значение u^* переменной u, для которой условие $f(d,z,\xi)-u\le 0$ удовлетворяется с заданной вероятностью α_0. Таким образом, задача (15) – (17) позволяет найти конструкцию d^* и режим z^*, которые гарантируют, что в течение всего этапа функционирования функция $f(d^*,z^*,\xi)$ будет меньше, чем u^* с вероятностью α_0.

Используя ту же целевую функцию, можно записать задачу оптимизации со смешанными ограничениями:

$$\min_{d,z,u} u;$$

$$\Pr\{f(d,z,\xi)-u\le 0\}\ge\alpha_0;$$

$$\max_{\xi\in\Xi} g_j(d,z,\xi)\le 0,\quad j=1,\dots,m.$$

Алгоритмы решения сформулированных выше оптимизаций ТС с жесткими, мягкими и смешенными ограничениями приведены в работе [2].

Вычислительный эксперимент

В качестве модельного примера рассмотрим решение экстремальной задачи (нахождение максимума функции двух переменных) при наличии: а) жестких; б) мягких; в) смешанных ограничений. Целевая функция имеет вид:

$$f(d,z)=75{,}2+a_1d+a_2d^2-a_3d^3+a_4d^4-b_1z+b_2z^2-b_3z^3+b_4z^4+c_1dz-c_2d^2z+$$
$$+c_3dz^2-c_4dz^3-c_6d^2z^2-c_7d^3z^2+c_8d^3z^3-c_9d^4z-\frac{c_{10}}{z+1}-c_{11}\exp(0{,}0005dz), \tag{18}$$

где $a_1=-3{,}8$; $a_2=0{,}13$; $a_3=2{,}06\cdot10^{-3}$; $a_4=1{,}03\cdot10^{-5}$; $b_1=6{,}83$; $b_2=0{,}26$; $b_3=3{,}46\cdot10^{-3}$; $b_4=1{,}35\cdot10^{-5}$; $c_1=0{,}03$; $c_2=1{,}28\cdot10^{-3}$; $c_3=3{,}41\cdot10^{-4}$; $c_4=3{,}53\cdot10^{-5}$; $c_5=1{,}66\cdot10^{-6}$; $c_6=5{,}24\cdot10^{-6}$; $c_7=6{,}3\cdot10^{-8}$; $c_8=7{,}0\cdot10^{-10}$; $c_9=2{,}27\cdot10^{-7}$; $c_{10}=28{,}11$; $c_{11}=2{,}87$.

Жесткие ограничения

$$dz-700\ge 0;\ z-(0{,}04\,d)^2\ge 0;\ (z-50)^2-5(d-55)\ge 0;\ 0\le d\le 75;\ 0\le z\le 65. \tag{19}$$

Мягкие ограничения:

$$\Pr[(dz-700)\ge 0]\ge\alpha;\ \Pr[(z-(0{,}04\,d)^2)\ge 0]\ge\alpha;\ \Pr[(z-50)^2-5(d-55)\ge 0]\ge\alpha;$$
$$0\le d\le 75;\ 0\le z\le 65;\ \alpha=0{,}95. \tag{20}$$

Смешанные ограничения:

$$dz-700\ge 0;\ \Pr[(z-(0{,}04\,d)^2)\ge 0]\ge\alpha;\ \Pr[(z-50)^2-5(d-55)\ge 0]\ge\alpha;$$
$$0\le d\le 75;\ 0\le z\le 65;\ \alpha=0{,}95. \tag{21}$$

Начальной выбиралась точка $(d^{(0)},z^{(0)})=[90\ \ 10]^{\text{т}}$, лежащая вне допустимой области, где $f(d^{(0)},z^{(0)})=-82{,}83$. Решение задачи (18), (19) без учета неопределенности коэффициентов целевой функции: $(d^*,z^*)=[75\ 65]^{\text{т}}$, $f(d^*,z^*)=58{,}9$.

В качестве неопределенных параметров выбирались отдельные коэффициенты целевой функции с расширяющейся областью неопределенности ±5; ±10; ±20; ±25 % от номинальных значений этих коэффициентов. Для решения задач (18), (19); (18), (20) и (18), (21) применяли алгоритмы, описанные в работах [1, 2]. Для нахождения максимума целевой функции (18) использовали метод последовательного квадратичного программирования. Результаты решения экстремальных задач (18), (19); (18), (20) и (18), (21) в условиях неопределенности отдельных коэффициентов целевой функции $f(d, z)$ в приведены в табл. 1.

Анализ решения задачи оптимизации в условиях неопределенности некоторых коэффициентов целевой функции $f(d, z)$ показывает, что с увеличением размера области неопределенности параметров оптимальное значение целевой функции f^* уменьшается.

Таблица 1

Результаты решения экстремальных задач (18), (19); (18), (20) и (18), (21) в условиях неопределенности

Неопределенные коэффициенты и диапазон неопределенности	Решение задач		
	(18), (19)	(18), (20)	(18), (21)
1	2	3	4
$a_4 \in [9{,}79 \cdot 10^{-6};\ 1{,}08 \cdot 10^{-5}]$	$d^* = 75$; $z^* = 65$; $f^* = 58{,}9$	$d^* = 75$; $z^* = 65$; $f^* = 58{,}9$	$d^* = 75$; $z^* = 65$; $f^* = 58{,}9$
$a_4 \in [9{,}27 \cdot 10^{-6};\ 1{,}13 \cdot 10^{-5}]$	$d^* = 74{,}36$; $z^* = 65$; $f^* = 44{,}9$	$d^* = 74{,}69$; $z^* = 62{,}09$; $f^* = 55{,}15$	$d^* = 74{,}56$; $z^* = 65$; $f^* = 45{,}86$
$a_4 \in [8{,}24 \cdot 10^{-6};\ 1{,}24 \cdot 10^{-5}]$	$d^* = 72{,}73$; $z^* = 65$; $f^* = 41{,}16$	$d^* = 73{,}61$; $z^* = 62{,}08$; $f^* = 44{,}36$	$d^* = 73{,}46$; $z^* = 65$; $f^* = 42{,}79$
$a_4 \in [7{,}73 \cdot 10^{-6};\ 1{,}29 \cdot 10^{-5}]$	$d^* = 69{,}66$; $z^* = 65$; $f^* = 34{,}16$	$d^* = 71{,}32$; $z^* = 62{,}06$; $f^* = 37{,}7$	$d^* = 70{,}45$; $z^* = 65$; $f^* = 35{,}88$
$a_4 \in [9{,}79 \cdot 10^{-6};\ 1{,}08 \cdot 10^{-5}]$ $b_4 \in [1{,}28 \cdot 10^{-5};\ 1{,}42 \cdot 10^{-5}]$	$d^* = 75$; $z^* = 65$; $f^* = 58{,}9$	$d^* = 75$; $z^* = 65$; $f^* = 58{,}9$	$d^* = 75$; $z^* = 65$; $f^* = 58{,}9$
$a_4 \in [9{,}27 \cdot 10^{-6};\ 1{,}13 \cdot 10^{-5}]$ $b_4 \in [1{,}22 \cdot 10^{-5};\ 1{,}49 \cdot 10^{-5}]$	$d^* = 73{,}62$; $z^* = 62{,}22$; $f^* = 35{,}95$	$d^* = 74{,}63$; $z^* = 62{,}08$; $f^* = 55{,}23$	$d^* = 73{,}98$; $z^* = 63{,}19$; $f^* = 36{,}44$
$a_4 \in [8{,}24 \cdot 10^{-6}; 1{,}24 \cdot 10^{-5}]$ $b_4 \in [1{,}08 \cdot 10^{-5}; 1{,}62 \cdot 10^{-5}]$	$d^* = 71{,}31$; $z^* = 61{,}82$; $f^* = 30{,}6$	$d^* = 72{,}53$; $z^* = 61{,}74$; $f^* = 37{,}23$	$d^* = 72{,}03$; $z^* = 61{,}81$; $f^* = 31{,}47$

Продолжение табл. 1

1	2	3	4
$a_4 \in [7{,}73 \cdot 10^{-6}; 1{,}29 \cdot 10^{-5}]$ $b_4 \in [1{,}01 \cdot 10^{-5}; 1{,}69 \cdot 10^{-5}]$	$d^* = 66{,}14;$ $z^* = 58{,}51;$ $f^* = 20{,}23$	$d^* = 69{,}18;$ $z^* = 59{,}94;$ $f^* = 25{,}2$	$d^* = 67{,}04;$ $z^* = 58{,}55;$ $f^* = 20{,}98$
$a_4 \in [9{,}79 \cdot 10^{-6}; 1{,}08 \cdot 10^{-5}]$ $b_4 \in [1{,}28 \cdot 10^{-5}; 1{,}42 \cdot 10^{-5}]$ $a_3 \in [1{,}96 \cdot 10^{-3}; 2{,}16 \cdot 10^{-3}]$	$d^* = 74;$ $z^* = 65;$ $f^* = 37{,}89$	$d^* = 72{,}62;$ $z^* = 62{,}08;$ $f^* = 42{,}95$	$d^* = 71{,}07;$ $z^* = 65;$ $f^* = 38{,}51$
$a_4 \in [9{,}27 \cdot 10^{-6}; 1{,}13 \cdot 10^{-5}]$ $b_4 \in [1{,}22 \cdot 10^{-5}; 1{,}49 \cdot 10^{-5}]$ $a_3 \in [1{,}85 \cdot 10^{-3}; 2{,}27 \cdot 10^{-3}]$	$d^* = 60{,}09;$ $z^* = 58{,}3;$ $f^* = 12{,}06$	$d^* = 65{,}89;$ $z^* = 61{,}22;$ $f^* = 19{,}96$	$d^* = 65{,}83;$ $z^* = 61{,}16;$ $f^* = 19{,}84$
$a_4 \in [8{,}24 \cdot 10^{-6}; 1{,}24 \cdot 10^{-5}]$ $b_4 \in [1{,}08 \cdot 10^{-5}; 1{,}62 \cdot 10^{-5}]$ $a_3 \in [1{,}65 \cdot 10^{-3}; 2{,}47 \cdot 10^{-3}]$	$d^* = 54{,}29;$ $z^* = 55{,}74;$ $f^* = 6{,}28$	$d^* = 59{,}68;$ $z^* = 58{,}32;$ $f^* = 11{,}73$	$d^* = 59{,}55;$ $z^* = 58{,}21;$ $f^* = 11{,}53$
$a_4 \in [7{,}73 \cdot 10^{-6}; 1{,}29 \cdot 10^{-5}]$ $b_4 \in [1{,}01 \cdot 10^{-5}; 1{,}69 \cdot 10^{-5}]$ $a_3 \in [1{,}55 \cdot 10^{-3}; 2{,}58 \cdot 10^{-3}]$	$d^* = 35{,}43;$ $z^* = 49{,}78;$ $f^* = -2{,}6$	$d^* = 15{,}1;$ $z^* = 48{,}42;$ $f^* = 1{,}15$	$d^* = 42{,}63;$ $z^* = 51{,}86;$ $f^* = -0{,}5$
$a_4 \in [9{,}79 \cdot 10^{-6}; 1{,}08 \cdot 10^{-5}]$ $b_4 \in [1{,}28 \cdot 10^{-5}; 1{,}42 \cdot 10^{-5}]$ $a_3 \in [1{,}96 \cdot 10^{-3}; 2{,}16 \cdot 10^{-3}]$ $b_3 \in [3{,}29 \cdot 10^{-3}; 3{,}63 \cdot 10^{-3}]$	$d^* = 72{,}02;$ $z^* = 60{,}79;$ $f^* = 23{,}76$	$d^* = 71{,}63;$ $z^* = 60{,}86;$ $f^* = 24{,}56$	$d^* = 72{,}18;$ $z^* = 60{,}98;$ $f^* = 24{,}39$
$a_4 \in [9{,}27 \cdot 10^{-6}; 1{,}13 \cdot 10^{-5}]$ $b_4 \in [1{,}22 \cdot 10^{-5}; 1{,}49 \cdot 10^{-5}]$ $a_3 \in [1{,}85 \cdot 10^{-3}; 2{,}27 \cdot 10^{-3}]$ $b_3 \in [3{,}11 \cdot 10^{-3}; 3{,}81 \cdot 10^{-3}]$	$d^* = 50{,}07;$ $z^* = 48{,}17;$ $f^* = -10{,}03$	$d^* = 50{,}65;$ $z^* = 48{,}57;$ $f^* = -9{,}27$	$d^* = 50{,}52;$ $z^* = 48{,}48;$ $f^* = -9{,}44$
$a_4 \in [8{,}24 \cdot 10^{-6}; 1{,}24 \cdot 10^{-5}]$ $b_4 \in [1{,}08 \cdot 10^{-5}; 1{,}62 \cdot 10^{-5}]$ $a_3 \in [1{,}65 \cdot 10^{-3}; 2{,}47 \cdot 10^{-3}]$ $b_3 \in [2{,}77 \cdot 10^{-3}; 4{,}15 \cdot 10^{-3}]$	$d^* = 37{,}96;$ $z^* = 43{,}32;$ $f^* = -16{,}73$	$d^* = 40{,}13;$ $z^* = 44{,}24;$ $f^* = -15{,}68$	$d^* = 39{,}74;$ $z^* = 44{,}04;$ $f^* = -15{,}92$
$a_4 \in [7{,}73 \cdot 10^{-6}; 1{,}29 \cdot 10^{-5}]$ $b_4 \in [1{,}01 \cdot 10^{-5}; 1{,}69 \cdot 10^{-5}]$ $a_3 \in [1{,}55 \cdot 10^{-3}; 2{,}58 \cdot 10^{-3}]$ $b_3 \in [2{,}6 \cdot 10^{-3}; 4{,}33 \cdot 10^{-3}]$	Решение не найдено	$d^* = 18{,}58;$ $z^* = 39{,}37;$ $f^* = -18{,}74$	$d^* = 18{,}85;$ $z^* = 38{,}63;$ $f^* = -20{,}15$

Продолжение табл. 1

1	2	3	4
$a_4 \in [9{,}79 \cdot 10^{-6}; 1{,}08 \cdot 10^{-5}]$ $b_4 \in [1{,}28 \cdot 10^{-5}; 1{,}42 \cdot 10^{-5}]$ $a_3 \in [1{,}96 \cdot 10^{-3}; 2{,}16 \cdot 10^{-3}]$ $b_3 \in [3{,}29 \cdot 10^{-3}; 3{,}63 \cdot 10^{-3}]$ $c_1 \in [2{,}85 \cdot 10^{-2}; 3{,}15 \cdot 10^{-2}]$	$d^* = 71{,}62;$ $z^* = 60{,}49;$ $f^* = 21{,}95$	$d^* = 71{,}63;$ $z^* = 60{,}66;$ $f^* = 22{,}59$	$d^* = 71{,}75;$ $z^* = 60{,}65;$ $f^* = 22{,}39$
$a_4 \in [9{,}27 \cdot 10^{-6}; 1{,}13 \cdot 10^{-5}]$ $b_4 \in [1{,}22 \cdot 10^{-5}; 1{,}49 \cdot 10^{-5}]$ $a_3 \in [1{,}85 \cdot 10^{-3}; 2{,}27 \cdot 10^{-3}]$ $b_3 \in [3{,}11 \cdot 10^{-3}; 3{,}81 \cdot 10^{-3}]$ $c_1 \in [2{,}7 \cdot 10^{-2}; 3{,}3 \cdot 10^{-2}]$	$d^* = 47{,}52;$ $z^* = 47{,}16;$ $f^* = -12{,}65$	$d^* = 48{,}98;$ $z^* = 47{,}49;$ $f^* = -12{,}14$	$d^* = 47{,}84;$ $z^* = 47{,}39;$ $f^* = -12{,}3$
$a_4 \in [8{,}24 \cdot 10^{-6}; 1{,}24 \cdot 10^{-5}]$ $b_4 \in [1{,}08 \cdot 10^{-5}; 1{,}62 \cdot 10^{-5}]$ $a_3 \in [1{,}65 \cdot 10^{-3}; 2{,}47 \cdot 10^{-3}]$ $b_3 \in [2{,}77 \cdot 10^{-3}; 4{,}15 \cdot 10^{-3}]$ $c_1 \in [2{,}4 \cdot 10^{-2}; 3{,}6 \cdot 10^{-2}]$	Решение не найдено	$d^* = 17{,}98;$ $z^* = 40{,}68;$ $f^* = -17{,}39$	$d^* = 17{,}95;$ $z^* = 40{,}57;$ $f^* = -17{,}53$
$a_4 \in [7{,}73 \cdot 10^{-6}; 1{,}29 \cdot 10^{-5}]$ $b_4 \in [1{,}01 \cdot 10^{-5}; 1{,}69 \cdot 10^{-5}]$ $a_3 \in [1{,}55 \cdot 10^{-3}; 2{,}58 \cdot 10^{-3}]$ $b_3 \in [2{,}6 \cdot 10^{-3}; 4{,}33 \cdot 10^{-3}]$ $c_1 \in [2{,}25 \cdot 10^{-2}; 3{,}75 \cdot 10^{-2}]$		$d^* = 17{,}67;$ $z^* = 41{,}4;$ $f^* = -15{,}8$	$d^* = 17{,}64;$ $z^* = 41{,}26;$ $f^* = -15{,}99$

При наличии одного неопределенного коэффициента a_4 и последовательном увеличении размера области неопределенности на ±5; ±10; ±20; ±25 % от номинального значения параметра $a_4 = 1{,}03 \cdot 10^{-5}$, получаем уменьшающиеся оптимальные значения целевой функции $f^* = 44{,}9; 41{,}16; 32{,}16$.

При наличии двух и более неопределенных параметров данная тенденция усиливается. Например, при наличии трех неопределенных параметров a_3, a_4, b_4 и последовательном увеличении размера области их неопределенности на ±5; ±10; ±20; ±25 % от номинальных значений параметров $a_3 = 2{,}06 \cdot 10^{-3}$, $a_4 = 1{,}03 \cdot 10^{-5}$, $b_4 = 1{,}35 \cdot 10^{-5}$, получаем еще более (по сравнению с одним неопределенным параметром) уменьшающиеся оптимальные значения целевой функции $f^* = 37{,}89$; 12,06; 6,28; –2,6. Для некоторых комбинаций неопределенных параметров и областей неопределенности решение вообще не может быть получено.

Сравним, например, результаты решения задач оптимизации с жесткими, мягкими и смешанными ограничениями при одинаковых диапазонах неопределенности коэффициентов целевой функции $f(d, z)$. Очевидно, что решения, полученные для задач оптимизации с мягкими и смешанными ограничениями, являются более экономичными по сравнению с решением, полученным для задачи оптимизации с жесткими ограничениями. Например, при наличии двух неопределенных коэффициентов a_4 и b_4 и заданном диапазоне неопределенности $a_4 \in [8{,}24 \cdot 10^{-6};\ 1{,}24 \cdot 10^{-5}]$, $b_4 \in [1{,}08 \cdot 10^{-5};\ 1{,}62 \cdot 10^{-5}]$, решения $\{d^*, z^*\} = [72{,}53\ \ 61{,}74]^{\mathrm{T}}$,

$f^* = 37{,}23$ и $\{d^*, z^*\} = [72{,}03 \;\; 61{,}81]^{\text{т}}$, $f^* = 31{,}47$ гораздо экономичнее решения $\{d^*, z^*\} = [71{,}31 \; 61{,}82]^{\text{т}}$, $f^* = 30{,}6$. При этом наиболее экономичное решение принято при оптимизации с мягкими ограничениями, поскольку в этой задаче не требуется безусловное выполнение проектных ограничений, а только их выполнение с заданной вероятностью $\alpha = 0{,}95$. Естественно, что при $\alpha < 0{,}95$ получено более экономичное решение, при $\alpha = 1$ задача оптимизации с мягкими ограничениями переходит в задачу оптимизации с жесткими ограничениями.

Заключение

Анализ полученных результатов подтверждает естественный вывод: чем точнее построена математическая модель ТС, тем меньше размер области неопределенности Ξ на этапе проектирования и экономичней режим работы ТС на этапе функционирования. Для получения бóльшей информации о ТС и уменьшения размера области неопределенности Ξ можно использовать следующие средства: разработку более точной математической модели ТС; установку дополнительных датчиков и средств измерения; установку системы автоматического регулирования для стабилизации переменных состояния входных потоков ТС.

Использование дополнительных средств требует определенных капитальных затрат. Возникает соответственный вопрос об экономической целесообразности использования этих средств, то есть оптимальном уровне полноты и точности экспериментальной информации, доступной на этапе проектирования ТС.

Список литературы

1. Дворецкий, Д. С. Новые подходы к проектированию химико-технологических процессов, аппаратов и систем в условиях интервальной неопределенности / Д. С. Дворецкий, С. И. Дворецкий, Г. М. Островский. – М. : Спектр, 2012. – 344 с.

2. Дворецкий, Д. С. Проектирование управляемых процессов и аппаратов пищевых и химических технологий в условиях неопределенности. Часть I. Одноэтапные задачи интегрированного проектирования / Д. С. Дворецкий, С. И. Дворецкий, Г. М. Островский // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 66 – 85.

Concept of Engineering Systems Flexibility Theory

D. S. Dvoretsky[1], S. I. Dvoretsky[1], G. M. Ostrovsky[2], S. G. Tolstykh[3]

Department of Technologies and Equipment of Food and Chemical Industry (1), topt@topt.tstu.ru; Department of Informatics (3), TSTU, Tambov; Karpov Physics and Chemistry Research Institute, Moscow (2);

Keywords: computational experiment; domain of uncertainty; engineering system; flexibility; hard and soft constraints; optimization.

Abstract: The concept of engineering systems flexibility theory is presented. As a model example, three problems for the extremum of a nonlinear goal function of two variables with different sets of nonlinear constraints: hard, soft and mixed, are solved. It is shown that solutions obtained for extremum problems with soft and with mixed constraints are more economical in comparison with the solution obtained for extremum problems with hard constraints. The solution of the extremum problem, in which the constraints are fulfilled with a given probability $\alpha = 0.95$, proves to be the most effective.

References

1. Dvoretskii D.S., Dvoretskii S.I., Ostrovskii G.M. *Novye podkhody k proektirovaniyu khimiko-tekhnologicheskikh protsessov, apparatov i sistem v usloviyakh interval'noi neopredelennosti* [New approaches to the design of chemical-technological processes, devices and systems under interval uncertainty], Moscow: Spektr, 2012, 344 p. (In Russ.)

2. Dvoretskii D.S., Dvoretskii S.I., Ostrovskii G.M. [Design of Controlled Processes and Devices of Food and Chemical Technologies under Uncertainty. Part 1. One Stage Problems and Algorithms of Integrated Design], *Transactions of Tambov State Technical University*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 66-85. (In Russ., abstract in Eng.)

Konzeption der Theorie der Flexibilität der technischen Systeme

Zusammenfassung: Es ist die Konzeption der Theorie der Flexibilität der technischen Systeme dargelegt. Als Modelbeispiel sind drei Aufgaben auf das Extremum der nichtlinearen zweckbestimmten Funktion der zweien Variablen mit dem verschiedenen Satz der nichtlinearen Beschränkungen (harten, weichen und gemischten) gelöst. Es ist gezeigt, dass die Lösungen, die für die extremen Aufgaben mit den weichen und mit den gemischten Beschränkungen bekommen sind, mehr rentabel im Vergleich zur Lösung sind, die für die extremen Aufgabe mit den harten Beschränkungen bekommen ist. Dabei bekommen wir die vorteilhafteste Lösung aus der Lösung der extremen Aufgabe, in der die Beschränkungen mit der aufgegebenen Wahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}95$ erfüllt werden.

Conception de la théorie de la flexibilité des systèmes techniques

Résumé: Est décrite la conception de la théorie de la flexibilité dans les systèmes techniques. En qualité d'exemple de modèle sont résolus trois problèmes sur un extremum de la fonction ciblée non-linéaire de deux variables avec un ensemble différent de contraintes non linéaires: rigides, souples et mixtes. Est montré que les solutions obtenues pour des problèmes extrêmes avec les contraintes souples et mixtes sont plus économiques par rapport à une solution obtenue pour un problème extrême à contrainte souple. La solution la plus avantageuse est issue de la résolution du problème extrême où les contraintes sont exécutées avec une probabilité de $\alpha = 0{,}95$.

Авторы: ***Дворецкий Дмитрий Станиславович*** – доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Технологии и оборудование пищевых и химических производств»; ***Дворецкий Станислав Иванович*** – доктор технических наук, профессор кафедры «Технологии и оборудование пищевых и химических производств», ФГБОУ ВО «ТГТУ»; ***Островский Геннадий Михайлович*** – доктор технических наук, профессор, старший научный сотрудник ОАО «Ордена Трудового Красного Знамени научно-исследовательский физико-химический институт имени Л. Я. Карпова», г. Москва; ***Толстых Светлана Германовна*** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Информатика», ФГБОУ ВО «ТГТУ».

Рецензент: ***Муромцев Дмитрий Юрьевич*** – доктор технических наук, профессор, проректор по научно-инновационной деятельности, ФГБОУ ВО «ТГТУ».