УДК 53.08
DOI: 10.17277/vestnik.2015.03.pp.388-392

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В СИСТЕМЕ ДВУХ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛ НА СТАДИИ ОСТЫВАНИЯ

Н. П. Жуков, Н. Ф. Майникова, И. В. Рогов, С. С. Никулин

Кафедра «Энергообеспечение предприятий и теплотехника»; ФГБОУ ВПО «ТГТУ»; teplotehnika@nnn.tstu.ru

Ключевые слова: математическая модель; моделирование; неразрушающий контроль; сферическое полупространство; температурное поле; теплофизические свойства.

Аннотация: Представлена математическая модель распространения тепла в сферическом полупространстве на стадии остывания. При разработке методов неразрушающего теплового контроля твердых материалов может быть использовано решение краевой задачи теплопроводности.

Обозначения

a – температуропроводность, м^2/с;	λ – теплопроводность, Вт/(м·К);
q – плотность теплового потока, Вт/м^2;	$c\rho$ – объемная теплоемкость, Дж/(м^3·К);
R – радиус сферического нагревателя, м;	r, θ – координаты;
T – температура, К;	ρ – плотность, кг/м^3;
	τ – время, с.

Математическая модель, описывающая распространение тепла в системе двух полуограниченных тел на стадии остывания, получена на основе решения следующей краевой задачи теплопроводности [1].

Два полуограниченных тела с различными теплофизическими свойствами (**ТФС**) при температуре $T(r, \theta, 0) = 0$ находятся в идеальном тепловом контакте с поверхностным сферическим источником тепла постоянной мощности радиуса R и плотностью теплового потока q. Вне источника тепла, в плоскости соприкосновения тел, существует идеальная теплоизоляция (рисунок). Источник тепла действует заданное время, затем отключается и система остывает.

Конечное распределение температуры после окончания действия источника тепла принимается близким к стационарному [1].

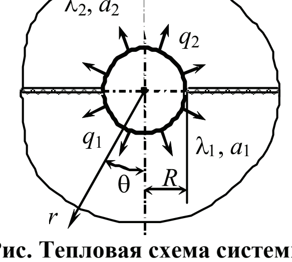

Рис. Тепловая схема системы с поверхностным сферическим нагревателем

Математически задача записывается следующим образом:

$$\frac{\partial T_1(r,\theta,\tau)}{\partial\tau} = a_1\left(\frac{\partial^2 T_1(r,\theta,\tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T_1(r,\theta,\tau)}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T_1(r,\theta,\tau)}{\partial\theta}\right)\right), \quad (1)$$

$$r > R, \quad 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \tau > 0;$$

$$\frac{\partial T_2(r,\theta,\tau)}{\partial\tau}=$$

$$=a_2\left(\frac{\partial^2 T_2(r,\theta,\tau)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T_2(r,\theta,\tau)}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T_2(r,\theta,\tau)}{\partial\theta}\right)\right), \tag{2}$$

$$r>R,\ \frac{\pi}{2}<\theta\le\pi,\ \tau>0;$$

$$T_1(r,\theta,0)\Big|_{\substack{r\ge R\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}}=f(r),\quad T_2(r,\theta,0)\Big|_{\substack{r\ge R\\ \frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi}}=f(r); \tag{3}$$

$$T_1(\infty,\theta,\tau)\Big|_{\substack{\tau>0\\ 0\le\theta<\frac{\pi}{2}}}=T_2(\infty,\theta,\tau)\Big|_{\substack{\tau>0\\ \frac{\pi}{2}<\theta\le\pi}}=0; \tag{4}$$

$$T_1(R,\theta,\tau)\Big|_{\substack{\tau>0\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}}=T_2(R,\theta,\tau)\Big|_{\substack{\tau>0\\ \frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi}}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial T_1(r,\theta,\tau)}{\partial\theta}\Big|_{\substack{\theta=\frac{\pi}{2}-0\\ r>R\\ \tau>0}}=\frac{\partial T_2(r,\theta,\tau)}{\partial\theta}\Big|_{\substack{\theta=\frac{\pi}{2}+0\\ r>R\\ \tau>0}}=0; \tag{6}$$

$$\frac{\partial T_1(r,\theta,\tau)}{\partial\theta}\Big|_{\substack{\theta=0\\ r>R\\ \tau>0}}=\frac{\partial T_2(r,\theta,\tau)}{\partial\theta}\Big|_{\substack{\theta=\pi\\ r>R\\ \tau>0}}=0; \tag{7}$$

$$\lambda_1\frac{\partial T_1(R,\theta,\tau)}{\partial r}\Big|_{0\le\theta<\frac{\pi}{2}-0}=0,\quad \lambda_2\frac{\partial T_2(R,\theta,\tau)}{\partial r}\Big|_{\frac{\pi}{2}+0<\theta\le\pi}=0,\quad \tau>0, \tag{8}$$

где $f(r)$ – функция начального распределения температуры в каждом полуограниченном теле (после отключения нагревателя); $f(r)=\dfrac{2qR^2}{(\lambda_1+\lambda_2)r}$ [2].

Запишем уравнения (1) и (2) в виде [3]:

$$\frac{\partial T_1(r,\tau)}{\partial\tau}=a_1\left(\frac{\partial^2 T_1(r,\tau)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T_1(r,\tau)}{\partial r}\right),\quad r>R,\ \tau>0,\quad 0\le\theta<\frac{\pi}{2}; \tag{9}$$

$$\frac{\partial T_2(r,\tau)}{\partial\tau}=a_2\left(\frac{\partial^2 T_2(r,\tau)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T_2(r,\tau)}{\partial r}\right),\quad r>R,\ \tau>0,\quad \frac{\pi}{2}<\theta\le\pi. \tag{10}$$

Решения (9) и (10) в области преобразования Лапласа имеют вид [3, 4]:

$$rT_{1L}(r,p)-\frac{2qR^2}{(\lambda_1+\lambda_2)p}=A\exp\left[-\sqrt{\frac{p}{a_1}}r\right]+B\exp\left[\sqrt{\frac{p}{a_1}}r\right],\quad 0\le\theta<\frac{\pi}{2}; \tag{11}$$

$$rT_{2L}(r,p)-\frac{2qR^2}{(\lambda_1+\lambda_2)p}=C\exp\left[-\sqrt{\frac{p}{a_2}}r\right]+D\exp\left[\sqrt{\frac{p}{a_2}}r\right],\quad \frac{\pi}{2}<\theta\le\pi, \tag{12}$$

где p – комплексная переменная; A, B, C, D – константы интегрирования.

Граничные условия для изображения можно записать в виде:

$$T_{1L}\left(\infty, p\right)\Big|_{0\le\theta<\frac{\pi}{2}} = T_{2L}\left(\infty, p\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}<\theta\le\pi} = 0; \tag{13}$$

$$T_{1L}\left(R, p\right)\Big|_{0\le\theta\le\frac{\pi}{2}} = T_{2L}\left(R, p\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi}; \tag{14}$$

$$\lambda_1 \frac{dT_{1L}\left(R, p\right)}{dr}\Bigg|_{0\le\theta<\frac{\pi}{2}-0} = 0, \quad \lambda_2 \frac{dT_{2L}\left(R, p\right)}{dr}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}+0<\theta\le\pi} = 0. \tag{15}$$

Из условия (13) следует, что $B = D = 0$.

Постоянную A определим из граничного условия (15):

$$\lambda_1 \frac{A}{R^2}\exp\left[-\sqrt{\frac{p}{a_1}}R\right]\left(\sqrt{\frac{p}{a_1}}R+1\right)+\frac{2\lambda_1 q}{(\lambda_1+\lambda_2)p}=$$

$$=-\lambda_2 \frac{C}{R^2}\exp\left[-\sqrt{\frac{p}{a_2}}R\right]\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}}R+1\right)-\frac{2\lambda_2 q}{(\lambda_1+\lambda_2)p}. \tag{16}$$

Из условия (14) имеем:

$$A\exp\left[-\sqrt{\frac{p}{a_1}}R\right] = C\exp\left[-\sqrt{\frac{p}{a_2}}R\right],$$

тогда

$$C = A\exp\left[R\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}}-\sqrt{\frac{p}{a_1}}\right)\right]. \tag{17}$$

Подставляя выражение (17) в (16) получим

$$A = -\frac{2qR^2}{p\exp\left[-\sqrt{\frac{p}{a_1}}R\right]\left(\lambda_1\left(\sqrt{\frac{p}{a_1}}R+1\right)+\lambda_2\left(\sqrt{\frac{p}{a_2}}R+1\right)\right)}.$$

Следовательно, решение (11) примет вид

$$T_{1L}(r,p) = \frac{2qR^2}{rp(\lambda_1+\lambda_2)} - \frac{2qR\exp\left[-(r-R)\sqrt{\frac{p}{a_1}}\right]}{rp(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\left(\sqrt{p}+\frac{\lambda_1+\lambda_2}{R(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\right)}, \quad 0\le\theta<\frac{\pi}{2}.$$

Перейдя от изображения к оригиналу и воспользовавшись разложением функции erfc(x) в ряд при больших значениях τ для первого полуограниченного тела, получим

$$T_1(r,\tau) = \frac{2qR^3(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{r\sqrt{\pi}\,(\lambda_1+\lambda_2)^2}\left(\frac{(r-R)(\lambda_1+\lambda_2)}{\sqrt{a_1}\,R(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}+1\right)\frac{1}{\sqrt{\tau}},$$

$$r > R, \quad \tau > 0, \quad 0\le\theta<\frac{\pi}{2}, \tag{18}$$

При $r = R$

$$T_1(R,\tau) = \frac{2qR^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\sqrt{\pi}\ (\lambda_1+\lambda_2)^2}\frac{1}{\sqrt{\tau}}, \ \tau>0, \quad 0\le\theta<\frac{\pi}{2}. \tag{19}$$

Таким образом, получены математические модели (18) и (19), описывающие распространение тепла в системе двух полуограниченных тел на стадии остывания. Полученные результаты возможно использовать при разработке методов и средств неразрушающего контроля теплофизических свойств материалов и теплового контроля структурных превращений (фазовых и релаксационных) в полимерных материалах [5].

Список литературы

1. Жуков, Н. П. Многомодельные методы и средства неразрушающего контроля теплофизических свойств материалов и изделий / Н. П. Жуков, Н. Ф. Майникова. – М. : Машиностроение-1, 2004. – 288 с.

2. Zhukov, N. P. Modeling of the Process of Heat Transfer from a Plane Heat Source of Constant Strength in Thermophysical Measurements / N. P. Zhukov, N. F. Mainikova // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2005. – Vol. 78, No. 6. – P. 1104 – 1112.

3. Multimodel Method of Nondestructive Determination of the Thermophysical Properties of Solid Materials / Zhukov N. P. [et al.] // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2012. – Vol. 85, No. 1. – P. 203 – 209.

4. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 599 с.

5. Методы и средства неразрушающего теплового контроля структурных превращений в полимерных материалах / Н. Ф. Майникова [и др.]. – М. : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 320 с.

Mathematical Model of Heat Transfer in the System of Two Semibounded Bodies at Cooling Stage

N. P. Zhukov, N. F. Mainikova, I. V. Rogov, S. S. Nikulin

Department "Enterprise Power Supply and Thermal Engineering", TSTU; teplotehnika@nnn.tstu.ru

Keywords: mathematical model; modeling; non-destructive testing; spherical half space; temperature field; thermal physical properties.

Abstract: The paper describes a mathematical model of heat propagation in spherical half-space at cooling stage. The solution of the boundary value problem of heat conduction can be applied to the methods of non-destructive thermal testing.

References

1. Zhukov N.P. Mainikova N.F. *Mnogomodel'nye metody i sredstva nerazrushayushchego kontrolya teplofizicheskikh svoistv materialov i izdelii* (The multimethods and means of nondestructive kontrolya thermo-physical properties of materials and products), Moscow: Mashinostroenie-1, 2004, 288 p.

2. Zhukov N.P., Mainikova N.F. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2005, vol. 78, no. 6, pp. 1104-1112.

3. Zhukov N.P., Mainikova N.F., Rogov I.V., Pudovkina E.V. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2012, vol. 85, no. 1, pp. 203-209.

4. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* (The theory of thermal conductivity), Moscow: Vysshaya shkola, 1967, 599 p.

5. Mainikova N.F., Mishchenko S.V., Zhukov N.P., Rogov I.V. *Metody i sredstva nerazrushayushchego teplovogo kontrolya strukturnykh prevrashchenii v polimernykh materialakh* (Methods and tools for non-destructive thermal control of structural transformations in polymeric materials), Moscow: Publisher of Tambov State Technical University, 2012, 320 p.

Mathematisches Modell der Wärmeverbreitung im System der zwei halbbegrenzten Körper auf dem Stadium der Abkühlung

Zusammenfassung: Es ist das mathematische Modell der Wärmeverbreiterung im sphärischen Halbraum auf dem Stadium der Abkühlung dargelegt. Die Lösung der Grenzaufgabe der Wärmeleitfähigkeit kann man in den Methoden der nichtzerstörenden Wärmekontrolle anwenden.

Modèle mathématique de la propagation de la chaleur dans un système à deux corps semi-limités pendant la phase de refroidissement

Résumé: Est présenté le modèle mathématique de la propagation de la chaleur dans un semi-espace sphérique pendant la phase de refroidissement. La solution du problème de limite de conductivité thermique pourrait être appliquée dans les méthodesdu contrôle thermique non destructif.

Авторы: ***Жуков Николай Павлович*** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Энергообеспечение предприятий и теплотехника»; ***Майникова Нина Филипповна*** – доктор технических наук, профессор кафедры «Энергообеспечение предприятий и теплотехника»; ***Рогов Иван Владимирович*** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Энергообеспечение предприятий и теплотехника»; ***Никулин Сергей Сергеевич*** – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры «Энергообеспечение предприятий и теплотехника», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: ***Чернышова Татьяна Ивановна*** – доктор технических наук, профессор кафедры «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем», директор института энергетики, приборостроения и радиоэлектроники, ФГБОУ ВПО «ТГТУ».
