УДК 519.7
DOI: 10.17277/vestnik.2015.02.pp.335-343

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

С. М. Дзюба[1], Н. А. Рубанов[2], С. Г. Семержинский[3]

*Кафедра «Информационные системы»,
ФГБОУ ВПО «Тверской государственный технический университет» (1);
кафедры: «Коммерция и бизнес-информатика» (2); nikitarubanov@gmail.com;
«Информационные процессы и управление» (3), ФГБОУ ВПО «ТГТУ»*

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с полиномиальной правой частью; метод последовательных приближений Пикара; продолжения локальных решений.

Аннотация: Приведен метод построения приближенных аналитических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью. Рассмотрены системы с выделенной линейной правой частью с постоянными коэффициентами, что позволит существенно увеличить точность вычислений по сравнению с аналогичными методами. Реализация метода опирается на метод последовательных приближений Пикара и процедуру продолжения локальных решений.

Введение

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид

$$\dot{x} = Ax + f\left(t, x\right), \qquad (1)$$

где $x = \left(x^1, \ldots, x^n\right)$ – действительная векторная функция действительного переменного t; $A = \left(a^i_j\right)$ – действительная $(n \times n)$-матрица; $f = \left(f^1, \ldots, f^n\right)$ – действительная векторная функция, каждый элемент которой f^i является многомерным многочленом с постоянными коэффициентами переменных t, x^1, $\ldots$, x^n. При этом степени всех многочленов могут не совпадать.

Системы вида (1) представляют интерес, поскольку многие модели процессов различной физической, экономической и другой природы описываются подобными системами [1 – 4].

Для получения решений системы (1) используют стандартные методы численного анализа [5, 9], не учитывающие конкретный вид ее правой части [1, 2, 4]. В [10] предложен метод построения квазианалитических приближенных решений системы (1) в случае полилинейной функции *f*, используя который в [11] для автономных систем с полиномиальной правой частью в качестве развития результатов предложен специальный метод, учитывающий то, что функции $f^1, \ldots, f^n$ являются именно многомерными многочленами. Относительная простота правой части рассматриваемой системы дает возможность с помощью данного метода строить приближенные аналитические решения не только в виде функции времени, но и начальных условий. В отличие от большинства известных методов последнее позволяет во многих случаях прямо контролировать систематическую ошибку вычислений. Такой контроль чрезвычайно важен, например, при исследовании уравнений хаотической динамики, поскольку здесь точность вычислений играет решающую роль, а вычисления приходится проводить на достаточно больших промежутках времени.

Цель работы – уточнение основных результатов из [11] и их распространение на неавтономные системы вида (1).

Построение локальных решений

Для построения локального решения $x(t)$ системы (1) с начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

заменим (1) интегральным уравнением

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left[Ax(\tau) + f\left(t, x(\tau)\right)\right] d\tau. \tag{3}$$

Пусть α и T – некоторые положительное числа и

$$\Gamma_{\alpha,r}(x_0) = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \left|x - x_0\right| \le \alpha,\ \left| t \right| \le r \right\}.$$

Обозначим через $\Pi_{\alpha,T}\left(x_0\right)$ – множество непрерывных функций, графики которых содержатся в $\Gamma_{\alpha,T}\left(x_0\right)$. Для простоты обозначений положим

$$\Phi\varphi = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left[\Phi\varphi(\tau) + f\left(t, \varphi(\tau)\right)\right] d\tau.$$

Поскольку замкнутый шар

$$B_\alpha\left(x_0\right) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left|x - x_0\right| \le \alpha \right\} \tag{4}$$

компактен, а функция f непрерывна, то существует положительное число

$$M = \max_{t \in [t_0, t_0 + T]} \ \max_{x \in B_\alpha(x_0)} \left| Ax + f\left(t, x\right)\right|.$$

Тогда из условия

$$r \le \frac{\alpha}{M} \tag{5}$$

следует, что оператор Φ отображает множество $\Pi_{\alpha,T}\left(x_0\right)$ в себя [12]. Поэтому положим число T таким, что выполняется неравенство (5).

Для нахождения решения $x(t)$ уравнения (3) будем использовать метод последовательных приближений Пикара и запишем

$$x_{N+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left[Ax_N(\tau) + f\left(t, x_N(\tau)\right)\right] d\tau. \tag{6}$$

Действуя как обычно, положим

$$x_1(t) \equiv x_0, \tag{7}$$

и заметим, что частные производные

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{8}$$

определены и непрерывны в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда очевидно, что существует k_*-я степень

$$\Phi^{k_*}\phi = \underbrace{\Phi \ldots \Phi}_{k_*}\phi$$

оператора Φ, которая является сжатием на множестве $\Pi_{\alpha,T}(x_0)$ [12]. Следовательно, метод (6), удовлетворяющий условию (7), при $k \ge k_*$ эквивалентен методу сжатых отображений. Поэтому последовательность

$$x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_N(t),\ \ldots \tag{9}$$

сходится к решению $x(t)$ равномерно на отрезке $[t_0,\ t_0 + T]$.

Чтобы найти $x(t)$, заметим, что все функции $f^1, \ldots, f^n$ – многомерные многочлены с постоянными коэффициентами переменных $t,\ x^1, \ldots, x^n$. Поэтому в силу (6) и (7) для всех $t \in [t_0,\ t_0 + T]$ справедливо равенство

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left[Ax_0 + f(t, x_0) \right] dt = x_0 + A(t - t_0)x_0 + \psi_1(x_0, t_0, t), \tag{10}$$

где ψ_1 – некоторый многомерный многочлен переменных $x_0,\ t_0,\ t$.

Подставляя (10) в (6), при $N = 2$ и $t \in [t_0,\ t_0 + T]$ имеем

$$x_3(t) = x_0 + A(t - t_0)x_0 + \frac{\left(A(t - t_0)\right)^2}{2!}x_0 + \psi_2(x_0, t_0, t),$$

где ψ_2 – некоторый многомерный многочлен переменных $x_0,\ t_0,\ t$.

Если все функции $f^1, \ldots, f^n$ – многомерные многочлены с постоянными коэффициентами переменных $t,\ x^1, \ldots, x^n$, то несложно заметить, что для произвольного $N = 2$ при $t \in [t_0,\ t_0 + T]$ справедливо равенство

$$x_{N+1}(t) = x_0 + A(t - t_0)x_0 + \frac{\left(A(t - t_0)\right)^2}{2!}x_0 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\left(A(t - t_0)\right)^N}{N!}x_0 + \psi_N(x_0, t_0, t),$$

в котором ψ_N – соответствующий многомерный многочлен переменных $x_0,\ t_0,\ t$.

Поскольку последовательность (9) сходится к решению $x(t)$ уравнения (3) равномерно на отрезке $[t_0,\ t_0 + T]$, то переходя в (6) к пределу при $N \to +\infty$, получим равенство

$$x(t) = \exp\left(A(t - t_0)\right)x_0 + \psi_N(x_0, t_0, t), \tag{11}$$

справедливое для всех $t \in [t_0,\ t_0 + T]$, где при фиксированных $x_0,\ t_0$ функция ψ определена и непрерывна при $t \in [t_0,\ t_0 + T]$ и удовлетворяет равенству

$$\lim_{N \to +\infty} \max_{t \in [t_0,\ t_0 + T]} \left| \psi(x_0, t_0, t) - \psi_N(x_0, t_0, t) \right| = 0. \tag{12}$$

Выбор начального условия (2) выше по существу не играл никакой роли. Поэтому справедлива теорема 1.

Теорема 1. Предположим, что точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и число $\alpha > 0$ заданы. Тогда для всех положительных T, удовлетворяющих неравенству (5), решение $x(t)$ системы (1) с начальным условием (2) может быть получено как предел равномерно сходящейся на отрезке $[t_0,\ t_0 + T]$ последовательности (9), построенной методом (6) с начальным приближением (7). Более того, при $t \in [t_0,\ t_0 + T]$ для решения $x(t)$ выполнены равенства (11) и (12).

Продолжение локальных решений

Перейдем к построению нелокальных решений системы (1). При этом, следуя [11], будем трактовать данную задачу как задачу построения продолжения локального решения с некоторого достаточно малого отрезка $[t_0,\ t_0 + T]$ вправо.

Пусть $x(t)$ – решение системы (1) с начальным условием (2). Зздадим некоторое положительное число α и определим числа t_1 и m_1 исходя из выполнения условий:

$$m_1 = \max_{t \in [t_0,\, t_1]} \max_{x \in B_\alpha(x_0)} \left| f(t, x) \right|$$

и

$$t_1 = t_0 + \frac{\alpha}{m_1},$$

где $B_\alpha(x_0)$ – замкнутый шар, задаваемый равенством (4). Тогда согласно теореме 1 при $t \in [t_0,\ t_1]$ справедливо равенство

$$x(t) = \exp\left(A(t - t_0)\right) x_0 + \psi_N\left(x(t_0), t_0, t\right),$$

причем для всех значений $t \in [t_0,\ t_1]$ решение $x(t)$ расположено в шаре $B_\alpha(x_0)$.

Зафиксируем число α и определим числа t_2 и m_2 исходя из выполнения условий:

$$m_2 = \max_{t \in [t_1,\, t_2]} \max_{x \in B_\alpha(x(t_1))} \left| f(t, x) \right|$$

и

$$t_2 = t_1 + \frac{\alpha}{m_2}.$$

Тогда согласно теореме 1 для всех $t \in [t_1, t_2]$ имеет место равенство

$$x(t) = x(t_1) + \psi_N\left(x(t_0), t_0, t\right).$$

При $t \in [t_1, t_2]$ решение $x(t)$ расположено в шаре $B_\alpha(x(t_1))$. Продолжая действовать аналогичным образом, очевидно, что справедлива теорема 2.

Теорема 2. Если решение $x(t)$ построено на отрезке $[t_0,\ t_k]$, то оно может быть продолжено на отрезок $[t_k,\ t_{k+1}]$, где t_{k+1} – действительное число, определяемое из условий

$$m_{k+1} = \max_{t \in [t_k,\, t_{k+1}]} \ \max_{x \in B_\alpha(x(t_k))} \left| f(t, x) \right|$$

и

$$t_{k+1} = t_k + \frac{\alpha}{m_{k+1}}. \tag{13}$$

При этом для всех значений $t \in [t_k,\ t_{k+1}]$ решение $x(t)$ расположено в шаре $B_\alpha(x(t_k))$, причем выполняется равенство

$$x(t) = x(t_k) + \psi(x, t_k, t).$$

Согласно теореме 2 каждое решение $x(t)$ системы (1) может быть продолжено на любой конечный отрезок $[t_0,\ t_\nu]$ из области определения данного решения. Более того, если функция ψ символьно построена на отрезке $[t_0,\ t_0 + T]$, задаваемом теоремой 1, то в силу теоремы 2 она также символьно построена на любом отрезке $[t_0,\ t_\nu]$ из области определения непродолжаемого решения. Другими словами, если функция ψ символьно построена при $t \in [t_0,\ t_1]$, то локальное решение $x(t)$ фактически позволяет построить соответствующее непродолжаемое решение. При этом точное определение функции ψ весьма затруднительно (если вообще возможно) даже в простейших случаях. Поэтому перейдем к построению приближенного решения и заметим, что справедлива теорема 3.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для каждого положительного числа ε можно указать такое натуральное число N_k, что для всех $N \ge N_k$

$$\max_{t \in [t_k,\, t_{k+1}]} \left| \psi(x(t_k), t_k, t) - \psi_N(x(t_k), t_k, t) \right| \le \varepsilon. \tag{14}$$

Более того, при $N \ge N_k$ имеет место неравенство

$$\max_{t \in [t_k,\, t_{k+1}]} \left| \psi_{N+1}(x(t_k), t_k, t) - \psi_N(x(t_k), t_k, t) \right| \le \frac{(\lambda_{N_k}(t_{k+1} - t_k))^{N-1} \alpha}{(N-1)!}, \tag{15}$$

где λ_{N_k} – положительное число, зависящее от $x(t_k)$ и α.

Замечание 1. Неравенство (15) непосредственно следует из дифференцируемости функции f [12]. При этом, если функция f нелинейна по *x*, то для любого фиксированного α и $N_k > 1$ справедливо равенство

$$\lim_{|x(t_k)| \to +\infty} \lambda_{N_k} = +\infty. \tag{16}$$

В силу теоремы 3 решение $x(t)$ всегда возможно на каждом конечном отрезке $[t_0,\ t_\nu]$ из области определения данного решения с наперед заданной точностью ε. При этом на каждом из отрезков $[t_k,\ t_{k+1}] \subset [t_0,\ t_\nu]$ приближенное решение $\tilde{x}(t)$ удовлетворяет равенству

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t_k) + \psi_{N_k}\left(\tilde{x}(t_k), t_k, t\right), \tag{17}$$

т.е. строится в виде функции не только *t*, но и t_k и $\tilde{x}(t_k)$. Более того, несложно заметить, что для всех $t \in [t_k,\ t_{k+1}]$ точки $\tilde{x}(t)$ лежат в шаре $B_\alpha\left(\tilde{x}(t_k)\right)$. Последнее позволяет контролировать систематическую ошибку вычислений за счет выбора параметра α в (4).

Очевидно, что после символьного построения функции ψ_{N_k} дальнейшие расчеты сводятся к вычислениям при $t \in [t_k,\ t_{k+1}]$ значений многомерных многочленов $\psi_{N_k}\left(\tilde{x}(t_k), t_k, t\right)$. При этом построение ψ_{N_k} при переходе от отрезка $[t_{k-1},\ t_k]$ к отрезку $[t_k,\ t_{k+1}]$ может быть организовано следующим образом.

Предположим, что числа α и ε заданы и для некоторого $k \ge 1$ определены значения t_k и N_{k-1} и построена точка $\tilde{x}(t_k)$. Далее, согласно теореме 2 значение t_{k+1} определим из условий

$$m_{k+1} = \max_{t \in [t_k,\, t_{k+1}]} \ \max_{x \in B_\alpha\left(\tilde{x}(t_k)\right)} \left| f\left(t, x\right) \right|$$

и (13). Для простоты положим

$$N_k = N_{k-1}. \tag{18}$$

Тогда, если при этом выполнено неравенство

$$\max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \left| \psi_{N_k+1}\left(\tilde{x}(t_k), t_k, t\right) - \psi_{N_k}\left(\tilde{x}(t_k), t_k, t\right) \right| \le \varepsilon, \tag{19}$$

то согласно теореме 3 найдется такое натуральное число *l*, что выполняется и неравенство

$$\max_{t \in [t_k,\, t_{k+1}]} \left| \psi\left(\tilde{x}(t_k), t_k, t\right) - \psi_{N_k+l}\left(\tilde{x}(t_k), t_k, t\right) \right| \le \varepsilon$$

(см. (14) и (15)). Другими словами, если при заданном значении ε выполнено неравенство (19), то можно говорить, что приближенное решение $\tilde{x}(t)$ продолжено на отрезок $[t_k,\ t_{k+1}]$ с заданной точностью.

Если неравенство (19) не выполняется, то на отрезке $[t_k,\ t_{k+1}]$ следует сделать несколько дополнительных шагов метода последовательных приближений, показанных выше. В этом случае справедливо неравенство

$$N_k > N_{k-1}, \tag{20}$$

т.е. равенство (18) уже не выполняется. Делать шаги метода последовательных приближений следует до тех пор, пока с новым значением N_k, удовлетворяющим неравенству (20) и соответствующим данному N_k функциям ψ_{N_k} и $\psi_{N_{k+1}}$, не будет выполнено неравенство (19).

Замечание 2. Если система (1) автономна и решение *x*(*t*) определено для всех $t > t_0$ и ограничено при этих значениях *t*, то всегда можно добиться выполнения равенств

$$N_k = N_1 \qquad (21)$$

и

$$t_k = t_0 + kT, \qquad (22)$$

где $k = 1, 2, \ldots$ [11]. Перечисленное выше значительно упрощает процедуру реализации метода. Во всех остальных случаях, в силу условия (16), равенства (21) и (22) требуют дополнительного обоснования.

Таким образом, приведенный выше метод, опирающийся на конкретный вид правой части системы (1), дает относительно простую вычислительную процедуру построения приближенных аналитических решений данной системы, причем в виде функции начального значения (t_0, x_0) и времени t, что позволяет контролировать систематическую ошибку вычислений и дает возможность снять многие важные проблемы, связанные с накапливанием ошибки, которое, как правило, возникает при использовании стандартных методов численного анализа на больших промежутках времени.

Список литературы

1. Lorenz, E. N. Deterministic Nonperiodic Flow / E .N. Lorenz // J. Athmos. Sci. – 1963. – Vol. 20. – P. 130 – 141.
2. Vallis, G. K. Conceptual Models of El Nino and the Southern Oscillation / G. K. Vallis // J. Geoph. Res. – 1988. – Vol. 98, No. C11. – P. 13979 – 13991.
3. Бакасов, А. А. Динамическая модель одномодового лазера. I. Режим устойчивой стационарной генерации / А. А. Бакасов // Теорет. и мат. физика. – 1991. – Т. 89, № 2. – С. 278 – 292.
4. Синергетическая модель устойчивости средней фирмы / В. И. Шаповалов [и др.] // Синергетика и проблемы теории управления / ред. А. А. Колесников. – М., 2004. – С. 454 – 464.
5. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений : пер. с англ. / ред.: Дж. Холл, Дж. Уатт. – М. : Мир, 1979. – 312 с.
6. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи : пер. с анг. / Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. – М. : Мир, 1990. – 512 с.
7. Федоренко, Р. П. Введение в вычислительную физику / Р. П. Федоренко. – Долгопрудный : Интеллект, 2008. – 504 с.
8. Демидович, Б. П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. – СПб. : Лань, 2010. – 368 с.
9. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 640 с.
10. Афанасьев, А. П. Квазианалитическое решение систем дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями / А. П. Афанасьев, А. С. Тарасов // Проблемы вычислений в распределенной среде: распределенные приложения, коммуникационные системы, математические модели и оптимизация / отв. ред. А. П. Афанасьев ; Ин-т систем. анализа Рос. акад. наук. – М., 2006. – Т. 25. – С. 165 – 183.
11. Приближенное аналитическое решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью / А. П. Афанасьев [и др.] // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2013. – Т. 53, № 2. – С. 321 – 328.
12. Шварц, Л. Анализ. В 2 т. Т. 2 / Л. Шварц ; пер. с фр. Б. П. Пугачева ; под ред. С. Г. Крейна. – М. : Мир, 1972. – 528 с.

References

1. Lorenz E.N. *J. Athmos. Sci.*, 1963, vol. 20, pp. 130-141.
2. Vallis G.K. J. Geoph. Res., 1988, vol. 98, no. C11, pp. 13979-13991.
3. Bakasov A.A. *Theoretical and Mathematical Physics*, November 1991, vol. 89, issue 2, pp. 1209-1219.
4. Shapovalov V.I., Kablov V.F., Bashmakov V.A., Avakumov V.E. *Sinergetika i problemy teorii upravleniya* (Synergetics and problems of control theory), Moscow: 2004, pp. 454-464.
5. Hall G., Watt J.M. (Eds.) *Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Oxford: Clarendon Press, 1976, 312 p.
6. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, Berlin, Springer, 2009, 539 p.
7. Fedorenko R.P. *Vvedenie v vychislitel'nuju fiziku* (Introduction to Computational Physics), Dolgoprudnyj: Intellekt, 2008, 504 p.
8. Demidovich B.P., Maron I.A., Shuvalova Je.Z. *Chislennye metody analiza. Priblizhenie funkcij, differencial'nye i integral'nye uravnenija* (Numerical methods of analysis. Approximation of functions, differential and integral equations), St. Petersburg: Lan', 2010, 368 p.
9. Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennye metody* (Numerical Methods), Moscow: BINOM. Laboratorija znanij, 2011, 640 p.
10. Afanas'ev A.P., Tarasov A.S. *Problemy vychislenii v raspredelennoi srede: raspredelennye prilozheniya, kommunikatsionnye sistemy, matematicheskie modeli i optimizatsiya* (The problem of computing in a distributed environment: distributed applications, communication systems, mathematical models and optimization), Moscow, 2006, vol. 25, pp. 165-183.
11. Afanas'ev A.P., Dzyuba S.M., Kirichenko M.A., Rubanov N.A. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 2013, vol. 53, no. 2, pp. 321-328, doi: 10.7868/S0044466913020038.
12. Schwartz L. *Analyse mathématique*, vol. 2, Paris: Hermann, 1967.

Construction of Solutions of Non-Autonomous Differential Equations with Polynomial Right Member

S. M. Dzyuba[1], N. A. Rubanov[2], S. G. Semerzhinsky[3]

Department "Information systems", Tver State Technical University (1);
Departments "Commerce and Business Informatics"(2), nikitarubanov@gmail.com;
"Information Processes and Management" (3), TSTU

Keywords: continuation of local solutions; differential equations with polynomial right-hand side; the Picard method of successive approximations.

Abstract: The paper describes a method of constructing approximate analytical solutions of systems of ordinary differential equations with polynomial right member. We describe the system with a dedicated linear right member with constant coefficients that will significantly increase the accuracy of calculations in comparison with similar methods. The implementation of the method is based on the Picard method of successive approximations and the procedure of extending local solutions.

Konstruktion der Lösungen der nichtautonomen Differentialgleichungen mit dem polynomialen rechten Teil

Zusammenfassung: Es ist die Methode der Konstruktion der genäherten analytischen Lösungen der Systeme der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit dem polynomialen rechten Teil angeführt. Es sind die Systeme mit dem gewählten linearen rechten Teil mit den ständigen Koeffizienten betrachtet, was wesentlich erlauben wird, die Genauigkeit der Berechnungen im Vergleich zu den ähnlichen Methoden zu vergrössern. Die Realisierung der Methode stützt sich auf die Methode der konsequenten Approximation von Picard und die Prozedur der Fortsetzung der lokalen Lösungen.

Construction des solutions des équations différentielles dépendantes avec une partie droite polynominale

Résumé: Est effectuée la méthode de la construction des solutions analytiques approximées des systèmes des équations différentielles ordinaires avec une partie droite polynominale Sont examinés les systèmes avec une partie gauche sélectionnée aux coefficients constants ce qui permettra d'augmenter considérablement la précision des calculs. La réalisation de la méthode repose sur la méthode des approximations successives de Picard et la procédure de la continuation des solitions locales.

Авторы: ***Дзюба Сергей Михайлович*** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Информационные системы», ФГБОУ ВПО «Тверской государственный технический университет»; ***Рубанов Никита Александрович*** – аспирант кафедры «Коммерция и бизнес-информатика»; ***Семержинский Сергей Геннадьевич*** – магистрант кафедры «Информационные процессы и управление», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: ***Куликов Геннадий Михайлович*** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и механика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».
