УДК 517.5
DOI: 10.17277/vestnik.2015.02.pp.330-334

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМУЛЕ КОШИ

В. И. Фомин

Кафедра «Прикладная математика и механика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ»;
kulikov@apmath.tstu.ru

Ключевые слова: внешняя граница; внутренняя граница; интегральная теорема Коши; интегральная формула Коши; многосвязная область.

Аннотация: Предложено при доказательстве интегральной теоремы Коши для многосвязной области использовать метод математической индукции. Уточнено доказательство интегральной формулы Коши.

Одним из фундаментальных фактов теории функций комплексного переменного является следующее утверждение.

Теорема Коши. Если функция $f(z)$ аналитична в n-связной области Д и на ее границе $\Gamma_{Д} = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup ... \cup \Gamma_{n-1}$, где Γ_0 – внешняя граница, $\bigcup_{i=1}^{n-1} \Gamma_i$ – внутренняя граница, Γ_i ($0 \le i \le n-1$) – гладкие или кусочно-гладкие контуры, то

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n-1} \oint_{\Gamma_i} f(z)dz .$$

Приведем доказательство данной теоремы методом математической индукции.

Доказательство. Вначале проводится стандартное доказательство теоремы для двусвязной области [1, с. 121]. Пусть теорема верна для k-связной области. Докажем, что она верна для $(k+1)$-связной области Д с внешней границей Γ_0 и внутренней границей $\bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$. Разобьем область Д гладкой или кусочно-гладкой кривой $\gamma = AFC$ на двусвязную область $Д_1$ с внешней границей $L_0 = ABC \cup CFA$ и внутренней границей Γ_k и k-связную область $Д_2$ с внешней границей $S_0 = CEA \cup AFC$ и внутренней границей $\bigcup_{i=1}^{k-1} \Gamma_i$ (рис. 1).

В силу справедливости теоремы при $n = 2$

$$\oint_{L_0} f(z)dz = \oint_{\Gamma_k} f(z)\,dz.$$

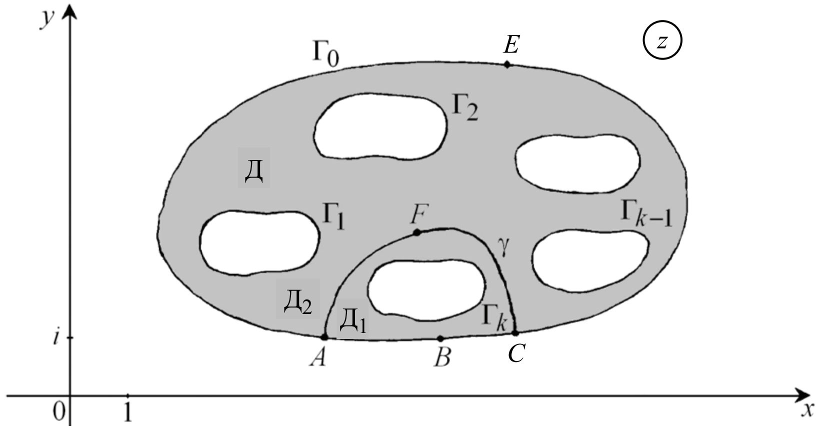

Рис. 1. Разбиение многосвязной области на две области меньшей связности

В силу предположения индукции

$$\oint_{S_0} f(z)dz = \sum_{i=1}^{k-1} \oint_{\Gamma_i} f(z)dz.$$

Следовательно,

$$\oint_{L_0} f(z)dz + \oint_{S_0} f(z)dz = \sum_{i=1}^{k} \oint_{\Gamma_i} f(z)dz. \quad (1)$$

Используя свойство аддитивности интеграла и соотношение

$$\int_{CFA} f(z)dz = -\int_{AFC} f(z)dz,$$

получаем

$$\oint_{L_0} f(z)dz + \oint_{S_0} f(z)dz = \oint_{\Gamma_0} f(z)dz. \quad (2)$$

В силу равенств (1), (2)

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{i=1}^{k} \oint_{\Gamma_i} f(z)dz,$$

т. е. справедливо утверждение теоремы для $n = k+1$. *Теорема доказана.*

В некоторых учебных пособиях при доказательстве для однозначной и аналитической в области G и на ее границе L функции $f(z)$ интегральной формулы Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0}, \ \forall z_0 \in G, \quad (3)$$

после получения соотношения

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} \quad (4)$$

для любой $\gamma_\rho = \{ z : |z - z_0| = \rho \}$ такой, что $K_\rho(z_0) = \{ z : |z - z_0| \le \rho \} \subset G,$ из которого следует, что для $\forall \gamma_\rho$ указанного вида

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} = A = \text{const},$$

рассматривается предельный переход при $\rho \to 0$, что вызывает естественный вопрос: зачем рассматривать предел постоянной, если он равен этой постоянной. Можно поступить иначе.

В силу соотношения (4) для справедливости формулы (2) осталось показать, что $A = f(z_0)$. Предположим противное: $A \neq f(z_0)$. Возьмем произвольное фиксированное $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее условию

$$\varepsilon < \left| A - f(z_0) \right|. \tag{5}$$

В силу непрерывности $f(z)$ в точке z_0 $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall z : | z - z_0 | < \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow \left| f(z) - f(z_0) \right| < \varepsilon$. Возьмем $\rho < \delta$. Тогда

$$A - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z_0) d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta,$$

и

$$\left| A - f(z_0) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\zeta \in \gamma_\rho} \left| \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} \right| l_{\gamma_\rho} \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho = \varepsilon.$$

Получили: $\left| A - f(z_0) \right| \leq \varepsilon$, что противоречит условию (5).

Следовательно, $A = f(z_0)$.

В заключение укажем один подход к определению несобственного комплексного числа.

К моменту изучения понятия несобственного комплексного числа $z = \infty$ студенты уже ознакомлены с тем, что числовую прямую можно «пополнить» двумя бесконечными точками $+\infty$ и $-\infty$, поэтому ими с трудом воспринимается, несмотря на его условный характер, соглашение вида «…“пополним” комплексную плоскость присоединением к ней единственной бесконечно удаленной точки…» [2, с. 16]. Предлагается следующий подход при изложении данного материала.

Числовой луч L можно «пополнить» единственной бесконечно удаленной точкой ∞_L, которую можно условно считать образом точки $N(0;1)$ при отображении полуокружности $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $x \geq 0$, на луч L (рис. 2).

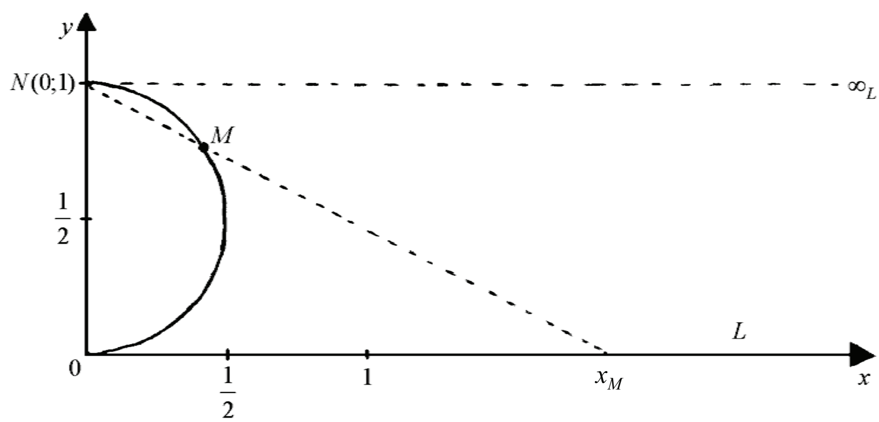

Рис. 2. Отображение полуокружности на луч

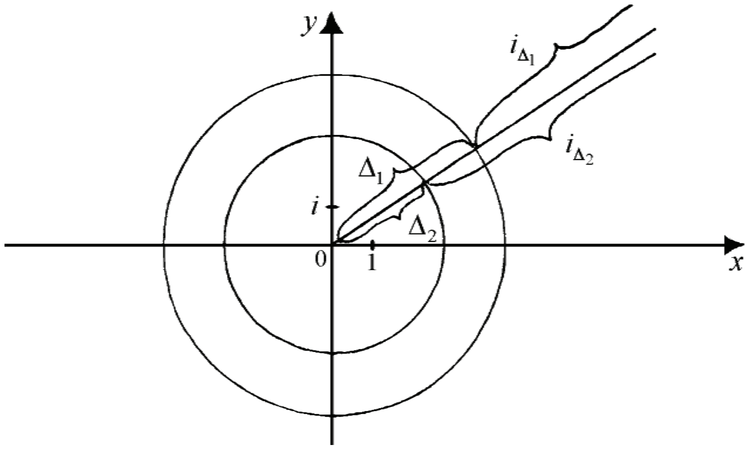

Рис. 3. Отношение порядка на множестве расстоянии й до бесконечно удаленной окружности

Так как $\mathbb{R} = L_0 \cup L_{-\pi}$, где $L_0 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$, $L_{-\pi} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \}$, то числовую прямую можно «пополнить» двумя бесконечно удаленными точками $\infty_{L_0} = +\infty$ и $\infty_{L_{-\pi}} = -\infty$. Комплексную плоскость можно представить в виде $C = \bigcup\limits_{\varphi \in [-\pi;\pi)} L_\varphi$, где L_φ − луч, исходящий из точки $z = 0$ с углом наклона φ к положительному направлению действительной оси. Для каждого $\varphi \in [-\pi;\pi)$ луч L_φ можно «пополнить» бесконечно удаленной точкой ∞_{L_φ}. Следовательно, комплексную плоскость можно «пополнить» бесконечным множеством бесконечно удаленных точек, точнее, к комплексной плоскости можно «присоединить» множество вида $O_\infty(0) = \left\{ \infty_{L_\varphi} \mid \varphi \in [-\pi;\pi) \right\}$, которое имеет мощность континуума, ибо множество $[-\pi;\pi)$ имеет мощность континуума. С другой стороны, $C = \bigcup\limits_{\substack{r \in \mathbb{R} \\ r \geq 0}} O_r(0)$, где $O_r(0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = r \}$. В силу этого множество $O_\infty(0)$ можно условно назвать бесконечно удаленной окружностью комплексной плоскости.

Определение 1. Несобственным комплексным числом называется символ ∞, отождествляемый с бесконечно удаленной окружностью комплексной плоскости.

Для различения окрестностей несобственного комплексного числа ∞ удобно ввести следующую символику. Пусть $\Delta \in \mathbb{R}$, $\Delta > 0$. Положим $i_\Delta = +\infty - \Delta$ (от англ. *infinity* − бесконечность). Введем во множестве $\{ i_\Delta \mid \Delta \in \mathbb{R}, \Delta > 0 \}$ отношение порядка: условимся считать, что $i_{\Delta_1} < i_{\Delta_2}$, если $\Delta_1 > \Delta_2$ (рис. 3).

Определение 2. i_Δ-окрестностью несобственного комплексного числа ∞ называется множество всех точек комплексной плоскости, «расстояние» от которых до бесконечно удаленной окружности «меньше» i_Δ: $O_{i_\Delta}(\infty) = \{ z \in \mathbb{C} : |z| > \Delta \}$.

Расширенное множество комплексных чисел определяется обычным образом: $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Список литературы

1. Маркушевич, А. И. Введение в теорию аналитических функций / А. И. Маркушевич, Л. А. Маркушевич. – М. : Просвещение, 1977. – 320 с.
2. Бицадзе, А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А. В. Бицадзе. – М. : Наука, 1984. – 320 с.

Cauchy Integral Theorem and Cauchy Integral Formula

V. I. Fomin

Department "Applied Mathematics and Mechanics", TSTU;
kulikov@apmath.tstu.ru

Keywords: Cauchy integral formula; Cauchy integral theorem; intrinsic boundary; multiply connected domain; outer boundary.

Abstract: Using the method of mathematical induction in the proof of Cauchy's integral theorem for multiply connected domains is proposed. Cauchy's integral formula proof is specified.

References

1. Markushevich A.I., Markushevich L.A. *Vvedenie v teoriyu analiticheskikh funktsii* (Introduction to the theory of analytic functions), Moscow: Prosveshchenie, 1977, 320 p.
2. Bitsadze A.V. *Osnovy teorii analiticheskikh funktsii kompleksnogo peremennogo* (Fundamentals of the theory of analytic functions of a complex variable), Moscow: Nauka, 1984, 320 p.

Über Integraltheorem und Integralformel von Cauchy

Zusammenfassung: Es wird vorgeschlagen, beim Beweis des Integraltheorems von Cauchy für das mehrzusammenhängenden Gebiet die Methode der mathematischen Induktion zu verwenden. Es ist der Beweis der Integralformel von Cauchy präzisiert.

Sur le théorème intégral et la formule intégrale de Cauchy

Résumé: Est proposé lors de la preuve du théorème intégral de Cauchy pour le domaine à multiples liaisons d'utiliser la méthode de l'induction mathématique. Est précisée la preuve de la formule intégrale de Cauchy.

Автор: ***Фомин Василий Ильич*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и механика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: ***Федоров Виктор Александрович*** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей физики, ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина», г. Тамбов.