УДК 517.9
DOI: 10.17277/vestnik.2015.01.pp.141-147

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА*

В. А. Рязанцев

Кафедра «Высшая и прикладная математика», ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет», г. Пенза; ryazantsevv@mail.ru

Ключевые слова: дробная производная; логарифмическая норма; операторная экспонента; преобразование Фурье; устойчивость по Ляпунову.

Аннотация: Представлен подход к проблеме устойчивости решений уравнений в частных производных дробного порядка в смысле Римана–Лиувилля. Предлагаемый подход основан на применении преобразования Фурье и исследовании эквивалентных дифференциальных уравнений в спектральной области. В результате получены достаточные критерии устойчивости решений уравнений в частных производных дробных порядков.

Вопрос устойчивости решений дифференциальных уравнений в частных производных представляет значительный интерес для исследователей ввиду большого числа приложений этих уравнений в различных областях науки и техники. Несмотря на большое число работ по данной тематике, указанная проблема по-прежнему далека от окончательного решения. Основным методом исследования устойчивости в настоящее время является прямой метод Ляпунова [1, 2]. Однако этот весьма эффективный и прекрасно разработанный метод не лишен ряда недостатков, в числе которых следует назвать в первую очередь громоздкость и неудобство с вычислительной точки зрения. Описываемый же в данной работе подход отличается простотой и легко может быть реализован в форме вычислительного алгоритма. Кроме того, данный подход позволяет анализировать устойчивость решений уравнений в частных производных дробных порядков, исследования по которым в настоящее время отсутствуют. Эту работу можно рассматривать как обобщение и развитие идей, ранее изложенных в работах [3 – 7].

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} A^{(j,k)}(t)\,{}_{-\infty}\mathrm{D}_{x_k}^{\nu_j} u + B(t)u; \tag{1}$$

$$u(t_0, x) = u_0(x), \tag{2}$$

где $A^{(j,k)}(t) = a_{pq}^{(j,k)}(t)$; $B(t) = b_{pq}(t)$; $j = \overline{1,m}$; $k = \overline{1,n}$; $p = \overline{1,l}$; $q = \overline{1,l}$; $u(t,x) = \left(u_1(t,x), u_2(t,x), \ldots, u_l(t,x)\right)^{\mathrm{T}}$; $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^{\mathrm{T}}$. Символом ${}_{-\infty}\mathrm{D}_{x_k}^{\nu_j} u$ обо-

* По материалам доклада на конференции ММТТ-27 (см. Вестник ТГТУ, т. 20, № 4).

значена дробная производная функции $u(t,x)$ в смысле Римана–Лиувилля порядка $\nu_j > 0$ по переменной x_k, вычисляемая по формуле [8]

$$ {}_{-\infty}\mathrm{D}_{x_k}^{\nu_j} = \frac{1}{\Gamma\left(1-\{\nu_j\}\right)} \frac{d^{[\nu_j]+1}}{dx^{[\nu_j]+1}} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\{\nu_j\}}} d\xi, $$

где Γ – гамма-функция; $[\nu_j]$ – целая часть порядка дробной производной ν_j, а $\{\nu_j\}$ – дробная часть ν_j, так что $\nu_j = [\nu_j] + \{\nu_j\}$.

Придав тривиальному решению уравнения (1) некоторое начальное возмущение $u_0(x)$, рассмотрим возмущенную задачу Коши (1) – (2). Поставим задачу об определении условий на элементы матриц $A^{(j,k)}(t)$, $B(t)$ и ν_j, при которых тривиальное решение уравнения (1) устойчиво в смысле Ляпунова.

Исследовать устойчивость будем в банаховом пространстве вектор-функций $f(x) = \left(f_1(x), f_2(x), ..., f_l(x)\right)^{\mathrm{T}}$ с нормой

$$ \|f\| = \left[\sum\nolimits_{k=1}^{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} |f_k(x_1,...x_n)|^2 dx_1...dx_n\right]^{1/2}. $$

При каждом фиксированном значении $t \geq t_0$ норма вектор-функции $u(t,x)$ определяется формулой

$$ \|u(t,x)\| = \left[\sum\nolimits_{k=1}^{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} |u_k(t,x_1...,x_n)|^2 dx_1...dx_n\right]^{1/2}. $$

Пусть задача (1) – (2) имеет решение, вместе со своей производной $\frac{\partial u}{\partial t}$ суммируемое с квадратом по пространственным переменным. При этом условии применим к (1) – (2) преобразование Фурье по $x_1,...,x_n$

$$ U(t,\omega) = \Im u(t,x) = 1/(2\pi)^{n/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x) \mathrm{e}^{-i(\omega_1 x_1 + ... + \omega_n x_n)} dx_1...dx_n; $$

$$ u(t,x) = \Im^{-1} U(t,\omega) = 1/(2\pi)^{n/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} U(t,\omega) \mathrm{e}^{i(\omega_1 x_1 + ... + \omega_n x_n)} d\omega_1...d\omega_n, $$

в результате чего, имея в виду, что [9, с. 196]

$$ \Im\left({}_{-\infty}\mathrm{D}_{x_k}^{\nu_j} u(t,x)\right) = (-i\omega_k)^{\nu_j} U(t,\omega), \tag{3} $$

получим следующую задачу Коши для параметрического дифференциального уравнения в спектральной области:

$$ \frac{\partial U}{\partial t} = \Phi(t,\omega) U; \tag{4} $$

$$ U(t_0,\omega) = U_0(\omega), \tag{5} $$

где $\omega = (\omega_1,...,\omega_n)$ и $\Phi(t,\omega) = b_{p,q}(t) + \sum\nolimits_{j=1}^{m} \sum\nolimits_{k=1}^{n} a_{p,q}^{(j,k)}(t)(-i\omega_k)^{\nu_j}$, $p = \overline{1,l}$, $q = \overline{1,l}$.

Введем в рассмотрение следующие нормы векторов:

$$ \|U\| = \left[|U_1|^2 + |U_2|^2 + ... + |U_l|^2\right]^{1/2}, \quad \|U\|_1 = |U_1| + |U_2| + ... + |U_l|. $$

Имеют место неравенства $\|U\|^2 \le \|U\|^2 + 2\sum_{\substack{p,q=1\\ p\ne q}}^{l} |U_p| \cdot |U_q| \le \|U\|_1^2$,
$\|U\|_1^2 = \sum_{p=1}^{l} |U_p|^2 + 2\sum_{\substack{p,q=1\\ p\ne q}}^{l} |U_p| \cdot |U_q| \le l\sum_{p=1}^{l} |U_p|^2 \le l\|U\|^2$.

Следовательно, справедлива двусторонняя оценка

$$\|U\| \le \|U\|_1 \le \sqrt{l}\|U\|. \tag{6}$$

Покажем, что при любом фиксированном $\omega \in \mathrm{R}^n$ траектория $U(t,\omega)$ уравнения (4) остается внутри замкнутого шара $\mathrm{B}[0,\|U_0(\omega)\|]$ в пространстве R^l с центром в нуле радиусом $\|U_0(\omega)\|$. Для доказательства предположим обратное: пусть при каком-нибудь значении $\omega = \tilde{\omega} \in \mathrm{R}^n$ траектория $U(t,\tilde{\omega})$ покидает пределы шара $\mathrm{B}[0,\|U_0(\omega)\|]$ в момент времени $t = T$. При этом предположении представим уравнение (4) следующим образом

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Phi_1(\tilde{\omega})U + \Phi_2(t,\tilde{\omega})U, \tag{7}$$

где $\Phi_1(\tilde{\omega}) = \Phi(\tilde{\omega})$ и $\Phi_2(t,\tilde{\omega}) = \Phi(t-T,\tilde{\omega})$.

При $t > T \ge t_0$ решение уравнения (7) можно представить следующим образом [10]

$$U(t,\omega) = \mathrm{e}^{\Phi_1(\tilde{\omega})(t-T)}U(T,\tilde{\omega}) + \int_T^t \mathrm{e}^{\Phi_1(\tilde{\omega})(t-s)}\Phi_2(s,\tilde{\omega})U(s,\tilde{\omega})ds. \tag{8}$$

На основании (8) имеем оценку сверху

$$\|U(t,\omega)\| \le \left\|\mathrm{e}^{\Phi_1(\tilde{\omega})(t-T)}U(T,\tilde{\omega})\right\| + \left\|\int_T^t \mathrm{e}^{\Phi_1(\tilde{\omega})(t-s)}\Phi_2(s,\tilde{\omega})U(s,\tilde{\omega})ds\right\|. \tag{9}$$

Далее последовательно оценим сверху каждое из слагаемых, составляющих правую часть неравенства (9). Для первого слагаемого в силу (6) получаем

$$\left\|\mathrm{e}^{\Phi_1(\tilde{\omega})(t-T)}U(T,\tilde{\omega})\right\| \le \left\|\mathrm{e}^{\Phi_1(\tilde{\omega})(t-T)}\right\|_1 \|U(T,\tilde{\omega})\| \le \mathrm{e}^{\Lambda(\Phi_1(\tilde{\omega}))(t-T)}\|U(T,\tilde{\omega})\|, \tag{10}$$

где $\Lambda(\Phi_1(\tilde{\omega}))$ – логарифмическая норма оператора $\Phi_1(\tilde{\omega})$, которая в пространстве с нормой $\|U\|_1$ вычисляется по формуле [11, с. 22]

$$\Lambda(\Phi_1(\tilde{\omega})) = \Lambda(\Phi(T,\tilde{\omega})) = \sup_q \left[\mathrm{Re}\left(\varphi_{q,q}(T,\tilde{\omega})\right) + \sum_{\substack{p=1,\\ p\ne q}}^{l} |\varphi_{p,q}(T,\tilde{\omega})|\right], \tag{11}$$

где $\varphi_{p,q}(t,\omega)$, $p = \overline{1,l}$, $q = \overline{1,l}$ – элементы матрицы $\Phi(t,\omega)$.

Пусть для всех $\omega \in \mathrm{R}^n$ и $t \ge t_0$ величина $\Lambda(\Phi(t,\omega))$ ограничена сверху некоторым отрицательным числом $-\sigma$

$$\Lambda(\Phi(t,\omega)) \le -\sigma, \quad \sigma > 0. \tag{12}$$

Тогда из (10) вытекает, что

$$\left\|\mathrm{e}^{\Phi_1(\tilde{\omega})(t-T)}U(T,\tilde{\omega})\right\| \le \mathrm{e}^{-\sigma(t-T)}\|U(T,\tilde{\omega})\|. \tag{13}$$

Для второго слагаемого в силу (6) выполняется следующая оценка

$$\left\|\int_T^t \mathrm{e}^{\Phi_1(\widetilde{\omega})(t-s)}\Phi_2(s,\widetilde{\omega})U(s,\widetilde{\omega})ds\right\| \le \left\|\int_T^t \mathrm{e}^{\Phi_1(\widetilde{\omega})(t-s)}\Phi_2(s,\widetilde{\omega})U(s,\widetilde{\omega})ds\right\|_1 \le$$

$$\int_T^t \left\|\mathrm{e}^{\Phi_1(\widetilde{\omega})(t-s)}\Phi_2(s,\widetilde{\omega})U(s,\widetilde{\omega})\right\|_1 ds \le \sqrt{l}\int_T^t \left\|\mathrm{e}^{\Phi_1(\widetilde{\omega})(t-s)}\right\|_1 \left\|\Phi_2(s,\widetilde{\omega})U(s,\widetilde{\omega})\right\| ds \le$$

$$\le \sqrt{l}\int_T^t \mathrm{e}^{-\sigma(t-s)}\left\|\Phi_2(s,\widetilde{\omega})U(s,\widetilde{\omega})\right\| ds. \tag{14}$$

Пусть все коэффициенты $a_{p,q}^{(j,k)}(t),\ b_{p,q}(t)\quad j=\overline{1,m},\ \ k=\overline{1,n},\ \ p=\overline{1,l},\ \ q=\overline{1,l}$ непрерывны при $t \ge t_0$. Тогда из структуры оператора $\Phi_2(s,\widetilde{\omega})$ следует, что для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое значение $\Delta t > 0$, что при $T \le t < T + \Delta t(\varepsilon,\widetilde{\omega})$ будет иметь место неравенство $\|\Phi_2(s,\widetilde{\omega})U(s,\widetilde{\omega})\| \le \varepsilon\|U(s,\widetilde{\omega})\|$. Стало быть, из (14) следует, что

$$\left\|\int_T^t \mathrm{e}^{\Phi_1(\widetilde{\omega})(t-s)}\Phi_2(s,\widetilde{\omega})U(s,\widetilde{\omega})ds\right\| \le \varepsilon\sqrt{l}\int_T^t \mathrm{e}^{-\sigma(t-s)}\|U(s,\widetilde{\omega})\|ds. \tag{15}$$

Неравенства (9), (13), (15) служат обоснованием следующей оценки

$$\|U(t,\omega)\| \le \mathrm{e}^{-\sigma(t-T)}\|U(T,\widetilde{\omega})\| + \varepsilon\sqrt{l}\int_T^t \mathrm{e}^{-\sigma(t-s)}\|U(s,\widetilde{\omega})\|ds. \tag{16}$$

Введем в рассмотрение функцию $\theta(s) = \mathrm{e}^{-\sigma(t-s)}\|U(s,\widetilde{\omega})\|$. Тогда (16) можно переписать следующим образом

$$\theta(t) \le \theta(T) + \varepsilon\sqrt{l}\int_T^t \theta(s)ds. \tag{17}$$

Применяя к неравенству (17) неравенство Гронуолла–Беллмана и переходя к исходной нотации, получаем

$$\|U(t,\widetilde{\omega})\| \le \mathrm{e}^{(-\sigma+\varepsilon\sqrt{l})(t-T)}\|U(T,\widetilde{\omega})\|. \tag{18}$$

Вследствие произвольности выбора $\varepsilon > 0$ и $T \ge t_0$ из неравенства (18) имеем окончательно: $\|U(t,\widetilde{\omega})\| \le \|U_0(\widetilde{\omega})\|$.

Тем самым, приходим к противоречию, в силу произвольности $\omega \in \mathrm{R}^n$ доказывающему, что траектория $U(t,\omega)$ уравнения (4) не выходит за пределы замкнутого шара $\mathrm{B}[0,\|U_0(\omega)\|]$. Иными словами, $\|U(t,\omega)\| \le \|U_0(\omega)\|$ для всех $\omega \in \mathrm{R}^n$.

Проинтегрировав последнее неравенство с квадратом по ω и применив формулу Планшереля, приходим к оценке $\|u(t,x)\|_2^2 \le \|u_0(x)\|_2^2$, из которой сразу же следует неравенство $\|u(t,x)\|_2 \le \|u_0(x)\|_2$. Тем самым, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1) функции $a_{p,q}^{(j,k)}(t),\ b_{p,q}(t),\ j=\overline{1,m},\ \ k=\overline{1,n},\ \ p=\overline{1,l},\ \ q=\overline{1,l}$ непрерывны при $t \ge t_0$;

2) при всяком фиксированном наборе значений $(t,\omega) \in [t_0,\infty) \times \mathrm{R}^l$ логарифмическая норма $\Lambda(\Phi(t,\omega))$, вычисляемая по формуле (11), удовлетворяет неравенству (12).

Тогда тривиальное решение уравнения (1) устойчиво в смысле Ляпунова.

В качестве простейшего примера применения теоремы 1 выведем достаточный критерий устойчивости тривиального решения задачи Коши для следующей системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a_{11}(t)\cdot {}_{-\infty}D_x^{\nu_{11}} u_1 + a_{12}(t)\cdot {}_{-\infty}D_x^{\nu_{12}} u_2 + b_{11}(t)u_1, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = a_{21}(t)\cdot {}_{-\infty}D_x^{\nu_{11}} u_1 + a_{22}(t)\cdot {}_{-\infty}D_x^{\nu_{12}} u_2 + b_{22}(t)u_2. \end{cases} \tag{19}$$

В предположениях теоремы 1 применим к (19) преобразование Фурье по переменной x, в результате чего получим уравнение (4) с матрицей $\Phi(t,\omega)$, определяемой формулой

$$\Phi(t,\omega) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) + a_{11}(t)(-i\omega)^{\nu_{11}} & a_{12}(t)(-i\omega)^{\nu_{12}} \\ a_{21}(t)(-i\omega)^{\nu_{21}} & b_{22}(t) + a_{22}(t)(-i\omega)^{\nu_{22}} \end{pmatrix}.$$

Известно [4, с. 86], что

$$(-i\omega)^{\nu_{pq}} = |\omega|^{\nu_{pq}}\left[\cos(\pi\nu_{pq}/2) - i\sin(\pi\nu_{pq}/2)\operatorname{sgn}\omega\right],$$

где $\operatorname{sgn}\omega$ обозначает функцию знака переменной ω.

Тогда матрицу $\Phi(t,\omega)$ можно представить следующим образом

$$\Phi(t,\omega) = \left(b_{pq}(t) + a_{pq}(t)|\omega|^{\nu_{pq}}\cos(\pi\nu_{pq}/2) - ia_{pq}(t)|\omega|^{\nu_{pq}}\sin(\pi\nu_{pq}/2)\operatorname{sgn}\omega\right),$$

где $p = \overline{1,2}$, $q = \overline{1,2}$, $b_{12}(t) \equiv b_{21}(t) \equiv 0$. Условие 2 теоремы 1 вкупе с формулой (11) приводит нас к следующей системе условий:

$$\begin{cases} b_{11}(t) + a_{11}(t)|\omega|^{\nu_{11}}\cos(\pi\nu_{11}/2) + |a_{21}(t)|\cdot|\omega|^{\nu_{21}} < -\sigma, \\ b_{22}(t) + a_{22}(t)|\omega|^{\nu_{22}}\cos(\pi\nu_{22}/2) + |a_{12}(t)|\cdot|\omega|^{\nu_{12}} < -\sigma, \end{cases} \tag{20}$$

где σ – какое-нибудь положительное число, для всех $\omega \in \mathrm{R}$. Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

1) функции $a_{p,q}(t)$, $b_{1,1}(t)$, $b_{2,2}(t)$, $p = \overline{1,2}$, $q = \overline{1,2}$ непрерывны при $t \ge t_0$;

2) при каждом $\omega \in \mathrm{R}$ справедливы неравенства (20).

Тогда тривиальное решение системы (20) устойчиво в смысле Ляпунова.

Список литературы

1. Шестаков, А. А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами / А. А. Шестаков. – М. : Наука, 1990. – 320 с.
2. Сиразетдинов, Т. К. Устойчивость систем с распределенными параметрами / Т. К. Сиразетдинов. – Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1987. – 231 с.
3. Бойков, И. В. Критерии устойчивости решений дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Журн. Средневолжского мат. общества. – 2012. – Т. 14, № 3. – С. 12 – 20.
4. Бойков, И. В. Устойчивость решений параболических уравнений с дробными производными / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Изв. высших учеб. заведений. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. – 2012. – № 4(24). – С. 84 – 100.
5. Бойков, И. В. О достаточных критериях устойчивости решений дифференциальных уравнений гиперболического типа / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев //

Изв. высших учеб. заведений. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. – 2013. – № 2(26). – С. 33 – 49.

6. Бойков, И. В. Устойчивость по Тьюрингу динамических систем, описываемых уравнениями с дробными производными / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Журн. Средневолжского мат. общества. – 2013. – Т. 15, № 4. – С. 15 – 24.

7. Бойков, И. В. Устойчивость решений параболических уравнений с дробными производными по координатным переменным / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем : сб. ст. VII Междунар. науч.-техн. конф., г. Пенза, 22 – 25 окт. 2012 г. / Пенз. гос. ун-т. – С. 27 – 31.

8. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.

9. Учайкин, В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин. – Ульяновск : Артишок, 2008. – 512 с.

10. Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 526 с.

11. Бойков, И. В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2008. – 244 с.

Stability of Solutions of Differential Equations with Fractional Orders

V. A. Ryazantsev

Department "Higher and Applied Mathematics",
Penza State University, Penza; ryazantsevv@mail.ru

Keywords: Fourier transformation; fractional derivative; logarithmic norm; Lyapunov stability; operator exponent.

Abstract: The paper deals with one approach to the problem of stability of partial differential equations solutions with fractional derivatives of Riemann–Liouville type. The suggested approach is based on the use of spatial Fourier transformation and the analysis of equivalent differential equations in spectral space.

References

1. Shestakov A.A. *Obobshchennyi pryamoi metod Lyapunova dlya sistem s raspredelennymi parametrami* (Generalized direct Lyapunov method for systems with distributed parameters), Moscow: Nauka, 1990, 320 p.

2. Sirazetdinov T.K. *Ustoichivost' sistem s raspredelennymi parametrami* (Stability of systems with distributed parameters), Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie, 1987, 231 p.

3. Boikov I.V., Ryazantsev V.A. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 2012, vol. 14, no. 3, pp. 12-20.

4. Boikov I.V., Ryazantsev V.A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Povolzhskii region. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2012, no. 4(24), pp. 84-100.

5. Boikov I.V., Ryazantsev V.A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Povolzhskii region. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2013, no. 2(26), pp. 33-49.

6. Boikov I.V., Ryazantsev V.A. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 2013, vol. 15, no. 4, pp. 15-24.

7. Boikov I.V., Ryazantsev V.A. *Analiticheskie i chislennye metody modelirovaniya estestvennonauchnykh i sotsial'nykh problem* (Analytical and numerical methods for modeling natural and socially insured cial problems), Collection of articles VII International Scientific and Technical Conference, Penza, 22-25 October 2012, Penza, pp. 27-31.

8. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* (Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications), Minsk: Nauka i tekhnika, 1987, 688 p.

9. Uchaikin V.V. *Metod drobnykh proizvodnykh* (The method of fractional derivatives), Ul'yanovsk: Artishok, 2008, 512 p.

10. Daletskii Yu.L. Krein M.G. *Ustoichivost' reshenii differentsial'nykh uravnenii v banakhovom prostranstve* (Stability of solutions of differential equations in Banach space), Moscow: Nauka, 1970, 526 p.

11. Boikov I.V. *Ustoichivost' reshenii differentsial'nykh uravnenii* (Stability of solutions of differential equations), Penza: Izdatel'stvo Penzenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2008, 244 p.

Immunität der Lösungen der Differentialgleichungen mit den Ableitungen der Bruchordnung

Zusammenfassung: Im Artikel wird ein Herangehen an das Problem der Immunität der Lösungen der Gleichungen in den privaten Ableitungen der Bruchordnung im Sinne von Riemann-Loiouville beschrieben. Das angebotene Herangehen ist auf der Anwendung der Transformation von Fourier und der Forschung der äquivalenten Differentialgleichungen in dem spektralen Gebiet gegründet. Es sind die ausreichenden Kriterien der Immunität der Lösungen der Gleichungen in der privaten Ableitungen der Bruchordnungen erhalten.

Stabilité des solutions des équations différentielles avec les dérivées de l'ordre fractionnaire

Résumé: Dans l'article est décrite une approche envers le problème de la stabilité des solutions des équations dans les dérivés partielles de l'ordre fractionnaire du type Riemann–Liouville. L'approche proposée est fondée sur l'emploi des transformations de Fourier et sur l'étude des équations différentielles dans le domaine spectral. Sont reçues les critères exactes de la stabilité des solutions des équations dans les dérivés partielles de l'ordre fractionnaire.

Автор: ***Рязанцев Владимир Андреевич*** – ассистент кафедры «Высшая и прикладная математика», ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет», г. Пенза.

Рецензент: ***Бойков Илья Владимирович*** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика», ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет», г. Пенза.