

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА РАЗДЕЛЕНИЯ ЗЕРНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ НА СИТОВЫХ КЛАССИФИКАТОРАХ\*

Ф. Г. Ахмадиев, Р. Ф. Гиззятов, И. Т. Назипов

*Кафедра прикладной математики,  
ФГБОУ ВПО «Казанский государственный архитектурно-строительный  
университет», г. Казань; Akhmadiev@ksaba.ru*

**Ключевые слова:** вероятность просеивания; зернистый материал; кинетическая модель; многокритериальная оптимизация; разделение.

**Аннотация:** Рассмотрена кинетическая модель разделения зернистых материалов на многоярусном ситовом классификаторе на основе теории случайных процессов и проведена оценка эффективности разделения на ситах. Сформулирована и решена задача оптимизации в многокритериальной постановке, где критериями выбраны производительность аппарата и эффективность разделения на ситах.

---

При разработке конструкций технологического оборудования перед проектировщиками возникает сложнейшая задача комплексного учета противоречивых требований. Задача состоит не столько в простом учете противоречивых требований, сколько в их наилучшем в некотором смысле удовлетворении. Более точно задачу оптимального проектирования можно определить как поиск режимных и конструктивных параметров по заданным критериям качества. Многокритериальность обусловлена стремлением оценить качество решения с разных точек зрения, а сформулировать один критерий, который учитывал бы все желаемые качества проектируемой конструкции, практически невозможно, так как каждый показатель характеризует решение частично и функциональной полнотой обладает лишь их совокупность. Многокритериальность задачи оптимизации не является следствием несовершенства математической модели, а отражает суть – противоречивость, вызванную внешними причинами. Многокритериальные задачи очень разнообразны по содержанию, основная трудность при их решении связана с вопросом – а что же следует считать наилучшей альтернативой, оптимальным решением, когда целевые функции являются противоречивыми и достигают в отдельности экстремальных значений в разных точках множества допустимых решений.

Основными этапами оптимального проектирования процесса разделения зернистых материалов на многоярусных ситовых классификаторах являются:

- 1) построение адекватной математической модели процесса;
- 2) анализ неопределенностей, формирование целевых функций и их формализация, постановка задачи (или задач) оптимизации;
- 3) решение возникающих оптимизационных задач, которые обычно являются многокритериальными.

Основой для постановки и решения многокритериальных задач оптимизации являются математические модели процессов разделения зернистых материалов на

---

\* По материалам доклада на конференции ММТТ-27 (см. Вестник ТГТУ, т. 20, № 4).

выбранном технологическом оборудовании, дополненные для определения параметров моделей экспериментальными исследованиями [1, 2]. При оптимальном аппаратном и технологическом оформлении процесса разделения критериями могут быть выбраны производительность оборудования, эффективность разделения, а также и другие показатели его работы, например, экономические.

Цель работы:

1) дать оценку эффективности разделения на ситах классификатора при их совместной работе;

2) построить и решить многокритериальную задачу на основе построенных в работе [1] математических моделей, чтобы определить оптимальные значения параметров процесса разделения зернистых материалов на многоярусном ситовом классификаторе.

Для разделения зернистых материалов по размерам часто используют многоярусные ситовые классификаторы. Система кинетических уравнений, описывающая процесс тонкослойной классификации, для разделения зернистого материала от крупного к мелкому, может быть представлена в виде:

$$dN_i/dt = \partial N_i/\partial t + v_i \partial N_i/\partial x = \alpha_{i-1} N_{i-1} - \alpha_i N_i + \beta_i \xi_i(t), \alpha_0 = 0, i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где  $N_i = N_i(x, t, d_j)$  – концентрация частиц  $j$ -й фракции на единицу длины  $i$ -го сита в момент времени  $t$  на участке  $x$ ;  $\alpha_i$  – вероятностная характеристика просеивания выбранной фракции через  $i$ -е сито в единицу времени;  $\xi_i(t)$  – дельта-коррелированные во времени случайные функции с нулевым математическим ожиданием. Коэффициенты  $\alpha_i$  определяются по зависимости:  $\alpha_i = v_i P / 2a$ , где  $v_i$  – средняя скорость движения частиц;  $P$  – вероятность просеивания частиц в ячейку сита;  $2a$  – шаг  $i$ -го сита.

Определение вероятности просеивания частицы в ячейку  $P$  представляет собой весьма трудную задачу. Она зависит от большого количества различных факторов, например, от геометрических размеров и формы ячейки сита и частиц разделяемого материала, от скорости движения частицы по поверхности сита, от неравномерности подачи зернистого материала на поверхность сита, от условий стесненности и т. д. В научной литературе, как правило, расчеты ведутся для частиц круглой формы, для которых удастся рассчитать критическую скорость и использовать далее для определения условий гарантированного провала частицы в ячейку критерий Фруда ( $Fr = gr/v^2$ , где  $r$  – радиус;  $v$  – относительная скорость частицы). Для частиц неправильной формы трудно рассчитать критическое значение угла встречи, с которым связана критическая скорость.

В первом приближении вероятность просеивания частицы в ячейку можно рассмотреть в виде произведения вероятностей двух независимых событий:  $P = P_r P_v$ , где  $P_r$  – геометрическая вероятность, зависящая от геометрических размеров и формы ячейки сита и частиц разделяемого материала и  $P_v$  – вероятность, зависящая от скорости движения частицы по вибрирующей поверхности сита. Относительная скорость частицы в момент отрыва от кромки отверстия ячейки сита рассматривается как нормально распределенная случайная величина и вероятность того, что она может принимать значения от нуля до некоторого значения  $v_1$ , равна:

$$P\{0 < v < v_1\} = \Phi((v_1 - v_k)/\sigma) + \Phi(v_k/\sigma),$$

где  $v_k, \sigma$  – параметры нормального закона;  $\Phi(x)$  – функция Лапласа

$$\Phi(x) = \int_0^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}.$$

Тогда вероятность просеивания частицы в ячейку, в зависимости от относительной скорости движения с учетом условия  $P_v = 0,5$  при  $v_a = v_k$ , можно определять следующим образом [3]

$$P_v = 0,5 - \Phi((v_a - v_k)/\sigma),$$

где  $v_a$  – амплитуда скорости частицы относительно сита. Параметры  $v_k, \sigma$  определяются в процессе идентификации построенных моделей по сходовым остаткам с сит в результате сравнения экспериментальных и расчетных значений коэффициентов извлечения или эффективности разделения.

На основе решения системы кинетических уравнений (1) при соответствующих начальных и граничных условиях, например,  $N^j(0, x) = 0, N^j(t, 0) = N_0^j(t)$ ,

где  $N_0^j(t)$  определяет число частиц  $j$ -й фракции на единицу длины верхнего сита в его начальном сечении, проводится идентификация математических моделей. Решение системы приводится в работе [1].

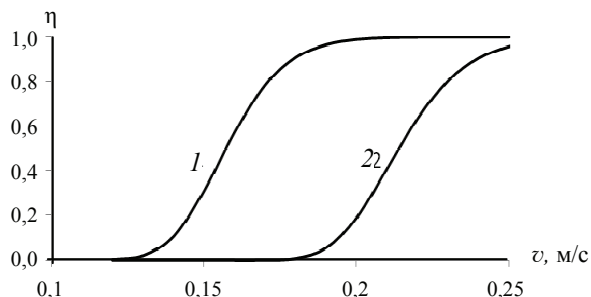
Извлечение  $j$ -й фракции с  $i$ -го сита определяется по формуле:  $\eta_i^j = \exp(-\alpha_i^j L_i / v_i), i = \overline{1, n}, j = i, i+1$ , где  $j = i$  – крупная (сходовая) фракция,  $j = i+1$  – следующая по крупности (проходовая) фракция с учетом разделения от крупного к мелкому.

Эффективность разделения на  $i$ -м сите определяется по зависимости:  $E_i = \eta_i^i (1 - \eta_i^{i+1}) \times 100\%, i = \overline{1, n}$ , где  $\eta_i^{i+1}$  – сходовая доля мелкой фракции в крупной, которая для  $i$ -й фракции рассматривается как доля примесей в целевом продукте. Результаты расчетов извлечения показывают (рисунок), что в интервале  $0 < v_a < v_1 = 0,15$  м/с обе фракции проходят сквозь сито и разделения не происходит и в интервале  $v_a > v_2 = 0,2$  м/с обе фракции сходят с сита, разделения также нет. Разделение происходит в интервале  $v_1 < v_a < v_2$ . Поэтому для выбранных значений геометрических параметров процесса можно подобрать параметры скоростного режима  $A, \omega, \alpha, \beta$ , при которых эффективность будет максимальной. Для установления оптимальных параметров классификатора ставится задача оптимизации в многокритериальной постановке. В качестве критериев рассматриваются производительность аппарата и коэффициенты эффективности разделения на ситах:

$$\max Q(A, \omega, \alpha, \beta, h, B) = \rho_c h B v_{cp}, \max E_i(A, \omega, \alpha, \beta, D_i, L_i, \delta_i) = \eta_i^i (1 - \eta_i^{i+1}) \times 100\%, i = \overline{1, n},$$

при условиях:

$$x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, \varphi_k^{\min} \leq \varphi_k(A, \omega, \alpha, \beta) \leq \varphi_k^{\max}, \quad (2)$$



**Зависимость коэффициента извлечения от амплитуды относительной скорости при  $L = 1,44$  мм;  $D = 2$  мм;  $2a \times 2b = 3,2 \times 3,2$  мм;  $d = 1,5$  мм;  $1 - l = 3,5$  мм;  $2 - l = 3,0$  мм**

где  $\bar{x} = (A, \omega, \alpha, \beta, D, L, h, \delta)$ ,  $\varphi_k(A, \omega, \alpha, \beta)$  – функциональные ограничения, связанные с выбранным скоростным режимом;  $\rho_c$  – сыпучая плотность;  $B$  – ширина первого сита;  $v_{cp}$  – средняя скорость перемещения зернистого материала на первом сите;  $h$  – толщина слоя зернистого материала в начале первого сита;  $\delta_i$  – требования на конечные продукты разделения.

Анализ влияния основных факторов на разделение показывает, что производительность и эффективность разделения на ситах при фиксированных значениях некоторых параметров, например,  $L_i, D_i, B, h, \delta_i$  зависят от одних и тех же факторов, а именно,  $A, \omega, \alpha, \beta$ . Требуемую производительность для безотрывных режимов можно получить при различных сочетаниях указанных выше параметров. Однако выбор оптимальных значений напрямую зависит от эффективности разделения на ситах. Максимальную производительность можно выбрать, обеспечивая необходимую эффективность.

Оптимизация и управление процессом с большим количеством параметров затруднительно, так как существует мультиколлинеарность параметров, приводящая к искажению их влияния на процесс. Поэтому многокритериальную задачу (2) будем решать поэтапно. На начальном этапе определяют оптимальные конструктивные параметры аппарата: длину  $L_i$ , ширину  $B$ , размеры ячеек сит  $D_i$ . Увеличение начальной толщины слоя  $h$  способствует возрастанию производительности, в то же время с некоторого момента приводит к снижению эффективности и повышению доли примесей в целевых продуктах. В явной форме вероятность просеивания не зависит от  $h$ , но нормирующие множители  $v_k, \sigma$  получены при некотором значении  $h$ . Поэтому толщину слоя  $h$  необходимо поддерживать в определенном интервале. Так как подаваемый зернистый материал подвержен влиянию случайных факторов, аппарат должен управляться без серьезных изменений параметров конструкции, то есть за счет изменения значений управляющих параметров. Оптимальные значения настроечных параметров, например,  $A, \alpha$  могут быть выбраны перед эксплуатацией, а оптимальные значения управляющих параметров  $\omega, \beta$  выбираются лицом, принимающим решение, из некоторого множества оптимальных решений (множество Парето).

Для построения множества Парето  $n$ -ярусного классификатора составляется линейная свертка нормированных целевых функций и определяется ее максимум для различных значений  $\lambda_i$  с учетом условий  $\sum \lambda_i = 1$  и  $0 \leq \lambda_i \leq 1$

$$\max_{\beta, \omega} W = \lambda_0(Q(\beta, \omega) - Q_{\min}) / (Q_{\max} - Q_{\min}) + \sum \lambda_i (E_i(\beta, \omega) - E_i^{\min}) / (E_i^{\max} - E_i^{\min}),$$

$$\text{где } Q_{\max} = \max_{\beta, \omega} Q(A^*, \omega, \alpha^*, \beta, h^*, B^*), \quad Q_{\min} = \min_{\beta, \omega} Q(A^*, \omega, \alpha^*, \beta, h^*, B^*),$$

$$E_i^{\max} = \max_{\beta, \omega} E_i(A^*, \omega, \alpha^*, \beta, D_i^*, L_i^*, \delta_i^*), \quad E_i^{\min} = \min_{\beta, \omega} E_i(A^*, \omega, \alpha^*, \beta, D_i^*, L_i^*, \delta_i^*), \quad i = \overline{1, n},$$

где  $A^*, \alpha^*, h^*, B^*, D_i^*, L_i^*$  – оптимальные значения соответствующих параметров, найденные на предыдущих этапах. Область Парето, как правило, содержит много элементов, в связи с этим возникает необходимость в дальнейшем ее сужении. Рассмотрим процедуру выбора оптимального решения по принципу гарантированного результата из множества Парето:

$$W_1(\beta, \omega) = \min_{i = \overline{1, n}} \left\{ (Q(\beta, \omega) - Q_{\min}) / (Q_{\max} - Q_{\min}), (E_i(\beta, \omega) - E_i^{\min}) / (E_i^{\max} - E_i^{\min}) \right\}$$

для всех  $i = \overline{1, n}$ . Полученное решение дает нам для каждой точки  $(\beta, \omega)$  из множества Парето значение наихудшего из критериев. Далее максимизация  $W_1(\beta, \omega)$

обеспечивает наибольшее значение для наихудшего из показателей, то есть гарантированный результат. Можно использовать и другие дополнительные процедуры по усмотрению лица принимающего решение.

По полученным решениям были проведены численные расчеты (вычислительный эксперимент) для конкретных условий работы классификаторов. Для разделения был использован зернистый материал на полимерной основе, частицы которого имеют цилиндрическую форму в диапазоне от 0,2 до 1,2 мм с одинаковыми диаметрами 0,4 мм. Сыпучая плотность материала  $\rho_c = 1150 \text{ кг/м}^3$ , пористость – 23 %, содержание фракции размерами 0,4...0,8 мм в разделяемом материале составляет 70 – 85 %. При проведении численных расчетов были приняты: угол наклона сит  $\alpha = 5^\circ$ , амплитуда колебаний  $A = 5 \text{ мм}$ , высота выходной щели загрузочного бункера  $h_o = 1,5 \text{ мм}$ , длина сит  $L = 1,5 \text{ м}$ , ширина сит  $B = 0,7 \text{ м}$ .

В результате решения многокритериальной задачи оптимизации для выделения целевой фракции размерами 0,4...0,8 мм были получены следующие результаты: частота колебаний  $\omega = 44,8 \text{ с}^{-1}$ , угол вибрации  $\beta = 11,5^\circ$ , средняя скорость  $v = 6,5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$ , амплитуда относительной скорости  $v_a = 0,18 \text{ м/с}$ . Наибольшее значение эффективности с учетом требования на чистоту разделения  $\delta = 0,05$  составило 91 %. Массовый расход при этом 282,5 кг/ч.

Математические модели случайных процессов, построенные на основе теории марковских процессов при дополнении экспериментальными исследованиями, позволяют поставить и решить задачу оптимизации и управления процессом разделения.

#### *Список литературы*

1. Ахмадиев, Ф. Г. Математическое моделирование процесса тонкослойного разделения зернистых материалов по размерам на ситовых классификаторах / Ф. Г. Ахмадиев, Р. Ф. Гиззятов, Х. Г. Киямов // Теорет. основы хим. технологии. – 2013. – Т. 47, № 3. – С. 309 – 317.

2. Иванов, О. О. Повышение эффективности барабанного аппарата путем управления сегрегированными потоками зернистых материалов / О. О. Иванов, А. Н. Куди, В. Н. Долгунин, Ю. В. Шарый // Известия ВУЗов. Пищевая технология. – 2011. – № 2–3. – С. 89 – 92.

3. Гортинский, В. В. Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях / В. В. Гортинский, А. Б. Демский, М. А. Борискин. – М. : Колос, 1973. – 295 с.

---

## **Modeling and Optimization of Granular Materials Separation on Sieve Classifiers**

**F. G. Akhmadiev, R. F. Gizzyatov, I. T. Nazipov**

*Department of Applied Mathematics,  
Kazan State University of Architecture and Civil Engineering, Kazan;  
Akhmadiev@ksaba.ru*

**Keywords:** granular material; kinetic model; multi-criteria optimization; separation; sieve probability.

**Abstract:** The paper studied the kinetic model for separation of granular materials for multi-tiered sieve classifier based on the theory of random processes; the effectiveness of their division into sieves was assessed. The multi-criteria optimization problem was formulated and solved; the device performance and separation efficiency on its sieves were selected as the criteria for the problem.

## References

1. Akhmadiev F.G., Gizzyatov R.F., Kiyamov Kh.G. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2013, vol. 47, no. 3, pp. 309-317.
  2. Ivanov O.O., Kudi A.N., Dolgunin V.N., Sharyi Yu.V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Pishchevaya tekhnologiya*, 2011, no. 2-3, p. 89-92.
  3. Gortinskii V.V., Demskii A.B., Boriskin M.A. *Protsessy separirovaniya na zernopererabatyvayushchikh predpriyatiyakh* (Separation processes on grain processing enterprises), Moscow: Kolos, 1973, 295 p.
- 

## Modellierung und Optimierung des Prozesses der Teilung der körnigen Materialien auf den Siebklassierer

**Zusammenfassung:** Es ist das kinetische Modell der Teilung der körnigen Materialien auf dem Etagensiebklassierer aufgrund der Theorie der zufälligen Prozesse betrachtet und es ist die Einschätzung der Effektivität der Teilung auf seinen Sieben durchgeführt. Es ist die Aufgabe der Optimierung, wo als Kriterien die Produktivität des Apparates und der Effektivität der Teilung auf seinen Sieben gewählt wurden, formuliert und gelöst.

---

## Modélage et optimisation du processus de la séparation des matériaux granuleux sur les classificateurs granuleométriques

**Résumé:** Est examiné le modèle cinétique de la séparation des matériaux granuleux sur les classificateurs granuleométriques de multiples niveaux à la base de la théorie des processus occasionnels; est effectuée l'estimation de l'efficacité de la séparation. Est formulé et résolu le problème de l'optimisation dans sa position multicritère où en qualité de critères étaient choisies la productivité de l'appareil et l'efficacité de la séparation granuleométrique.

---

**Авторы:** *Ахмадиев Фаил Габдулбарович* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики; *Гиззятов Ренат Фаритович* – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики; *Назипов Ильшат Табрисович* – старший преподаватель кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Казанский государственный архитектурно-строительный университет», г. Казань.

**Рецензент:** *Садыков Ренат Ахатович* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теплоэнергетики, ФГБОУ ВПО «Казанский государственный архитектурно-строительный университет», г. Казань.

---