УДК 519.24
DOI: 10.17277/vestnik.2015.01.pp.022-028

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ВЫЧИСЛЕНИЯ МГНОВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

Г. И. Фирсов

*Отдел «Механика машин и управление машинами»,
ФГБУН «Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН», г. Москва;
firsovgi@mail.ru*

Ключевые слова: аналитический сигнал; дискретное преобразование Гильберта; мгновенная амплитуда; мгновенная фаза; мгновенная частота.

Аннотация: Рассмотрено использование аналитического сигнала для описания переходных процессов в квазилинейных колебательных системах. Приведены оценки погрешности вычисления значений мгновенных амплитуды, фазы и частоты, а также параметров рассеяния энергии в системе. Для определения мгновенной амплитуды и других параметров сигнала использовано дискретное преобразование Гильберта, реализованное по алгоритму Ремеза.

По мере усложнения мехатронных систем привода современного технологического оборудования применение расчетных методов математического описания все более дополняется экспериментальным изучением для получения достаточно точной и полной информации об объекте. Это обусловлено тем, что результаты экспериментальных исследований служат основной исходной информацией для решения задачи идентификации сложных механических систем, априорное построение математических моделей которых весьма трудоемко, недостаточно точно и не всегда возможно. На основе динамических испытаний производят сравнение испытываемых конструкций, получают объективную оценку динамического качества образцов, а также выявляют эффективность реализованных конструктивных мероприятий, что позволяет рассматривать динамические испытания как важнейшую часть контроля качества создаваемой продукции [1].

Известно, что свойства линейной динамической системы описываются импульсной переходной функцией, представляющей реакцию системы на входное воздействие типа дельта-функции. При этом импульсная переходная функция является свободными колебаниями рассматриваемой колебательной системы, находящейся без воздействия извне и имеющей ненулевые начальные условия. Свойства большого класса квазилинейных колебательных систем однозначно определяются по их свободным колебаниям. Представим свободные колебания квазилинейной колебательной системы с одной степенью свободы в виде аналитического сигнала

$$X(t) = x(t) + jx_{\text{г}}(t) = A(t)\mathrm{e}^{j\phi(t)},$$

где $x(t)$, $x_{\text{г}}(t)$ – процесс свободных колебаний и сопряженный по Гильберту процесс соответственно; $A(t)$, $\phi(t)$ – огибающая и мгновенная фазы колебаний соот-

---

* По материалам доклада на конференции ММТТ-27 (см. Вестник ТГТУ, т. 20, № 4).

ветственно; $j=\sqrt{-1}$; $\phi=\omega(t)$ – мгновенная частота колебаний [2]. Свободные колебания механических систем с течением времени затухают, упругая энергия колебаний рассеивается, превращаясь, в основном, в тепловую и акустическую энергии. Поведение амплитуды и частоты свободных колебаний характеризует упруго-диссипативные свойства квазилинейной системы. Используя традиционное представление аналитического сигнала $X(t)$ в комплексной, тригонометрической или показательной форме

$$X(t)=x(t)+jx_{\text{г}}(t)=\left|X(t)\right|\left[\cos\phi(t)+j\sin\phi(t)\right]=A(t)\mathrm{e}^{j\phi(t)},$$

можно однозначно определить мгновенную амплитуду (огибающую, модуль) сигнала

$$A(t)=\left|X(t)\right|=\sqrt{x^2(t)+x_{\text{г}}^2(t)}=\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\ln X(t)}$$

и мгновенную фазу сигнала

$$\phi(t)=\mathrm{arctg}\frac{x_{\text{г}}(t)}{x(t)}=\mathrm{Im}\ln X(t).$$

Важнейшую роль при таком представлении вибрационного сигнала играют первые производные мгновенных фазы и амплитуды, называемые соответственно мгновенной частотой и скоростью изменения огибающей:

$$\omega(t)=\dot{\phi}(t)=\frac{x(t)\dot{x}_{\text{г}}(t)-\dot{x}(t)x_{\text{г}}(t)}{A^2(t)}=\mathrm{Im}\left[\dot{X}(t)/X(t)\right];$$

$$\dot{A}(t)=\frac{x(t)\dot{x}_{\text{г}}t)+\dot{x}(t)x_{\text{г}}(t)}{A(t)}=A(t)\,\mathrm{Re}\left[\dot{X}(t)/X(t)\right].$$

Используя данные представления для аналитического сигнала, любой колебательный процесс можно рассматривать в каждый момент времени t как квазигармоническое колебание, модулированное по амплитуде и частоте функциями времени $A(t)$ и $\omega(t)$: $A(t)\cos\left[\int_0^t\omega(t)dt\right]$. Естественно, для простейшего моногармонического процесса мгновенные амплитуда и частота являются постоянными величинами.

Вся информация о первой производной аналитического сигнала содержится в нем самом (его огибающей и мгновенной частоте), а также в скорости изменения его огибающей.

Однозначное выделение (демодуляция) огибающей и других мгновенных функций сигнала проводится на основе интегрального преобразования Гильберта. Очевидно, что идеальный преобразователь Гильберта физически не реализуем. Для того, чтобы определить передаточную функцию $H(z)$ реального преобразователя Гильберта, необходимо аппроксимировать его частотные характеристики. Преобразование Гильберта можно осуществить, если на вход фильтра с импульсной характеристикой $g(t)=1/pt$ подать сигнал, определяемый функцией $x(t)$. Возможно построение реального преобразователя Гильберта в виде как рекурсивного, так и нерекурсивного фильтров [3]. При построении преобразователя Гильберта в виде нерекурсивного фильтра целесообразно использовать фильтр с точно линейной фазочастотной характеристикой и передаточной функцией вида $h(z)=\sum_{i=0}^{N-1}b_i z^{-l}$, где N – нечетное, $b=-bN-l-1$ (антисимметричные коэффициенты). На практике получили широкое распространение фильтры, основанные на равномерной чебышевской аппроксимации по алгоритму Ремеза, впервые синтезированные Дж. Мак-Клелланом, Т. Парксом и Л. Рабинером [4] и включенные в математические пакеты MATLAB и MathCAD.

При демодуляции сигнала с помощью преобразования Гильберта важным представляется вопрос о возникающих погрешностях его обработки на ЭВМ. Основная часть погрешности обработки сигнала определяется выбранным способом оценивания искомой характеристики, то есть формулой, по которой вычисляются значения искомой функции, а также исходными погрешностями аргументов, входящих в эту формулу.

Рассмотрим погрешность оценивания функции $f(x_1, ..., x_k)$ нескольких переменных $x_1, ..., x_k$ при условии, что для значений данных переменных известны абсолютные погрешности Δa_i. Если $f(x_1, ..., x_k)$ имеет непрерывные частные производные $\partial f/\partial x_i$ по переменным x_i, то абсолютная погрешность функции может быть определена по формуле

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{k} \Delta a_i \left|\partial f\left(a_1, ..., a_k\right)/\partial x_i\right|.$$

Погрешности аргументов, входящих в формулы для мгновенных характеристик, зададим следующим образом. Примем, что исходная относительная погрешность измерения и преобразования сигнала $x(t)$ составляет величину $\Delta x/x = \varepsilon_x$; погрешность получения преобразованного по Гильберту процесса $x_\text{г}$ – величину $\Delta x_\text{г}/x_\text{г} = \varepsilon_{x_\text{г}} = k_1\varepsilon_x$; погрешность получения дифференцированного процесса $\dot{x}$ – $\Delta\dot{x}/x = \varepsilon_{\dot{x}} = k_2\varepsilon_x$; погрешность преобразованного по Гильберту и однократно дифференцированного процесса $\dot{x}_\text{г}$ – $\Delta\dot{x}_\text{г}/x_\text{г} = \varepsilon_{\dot{x}_\text{г}} = k_1k_2\varepsilon_x$. Численные значения констант k_1 и k_2 определяются конкретным типом цифровых фильтров, реализованных на ЭВМ. Например, при использовании универсальной виброизмерительной аппаратуры и программ цифровой фильтрации [4] для преобразователя Гильберта и дифференциатора с длиной импульсной характеристики 59 точек и неравномерностью частотной характеристики 1 % можно принять $\varepsilon_x = 0{,}01$, $k_1 = k_2 = 2$, то есть $\varepsilon_{\dot{x}} = \varepsilon_{x_\text{г}} = 0{,}02$.

На основе вышеприведенного выражения, используя методику, предложенную в работах [5, 6], выведем формулы для относительных погрешностей следующих функций, перечисленных в таблице.

Мгновенная амплитуда:

$$\Delta A/A = \left(\Delta x x + \Delta x_\text{г} x_\text{г}\right)\Big/\left(x^2 + x_\text{г}^2\right) = \varepsilon_x\left[1 + (k_1 - 1)x_\text{г}^2\big/A^2\right].$$

С учетом выражений $\sigma_x^2 = 0{,}5\left(\overline{A^2}\Delta x x + \sigma_A^2\right)$ и $\overline{A^2} = A^2 + \sigma_A^2$ имеем величину отношения средних значений аргументов $\overline{x_\text{г}^2}\Big/\overline{A^2} = 0{,}5,$ откуда $\varepsilon_A = 0{,}5\varepsilon_x(1 + k_1)$.

Мгновенная фаза:

$$\Delta\phi/\phi = \left(\Delta x x_\text{г} + \Delta x_\text{г} x\right)\big/A^2 = \left(\varepsilon_x + \varepsilon_{x_\text{г}}\right)\Big/\left(\operatorname{ctg}\phi + \operatorname{tg}\phi\right).$$

Для некоторого среднего фазового угла $\phi = \pi/4$ имеем $\varepsilon_\phi = 0{,}5\varepsilon_x\left(1 + k_1\right)$.

Мгновенная частота:

$$\Delta\omega/\omega = \omega^{-1}A^{-2}\left(\Delta x\dot{x}_\text{г} + \Delta\dot{x}_\text{г}x + \Delta\dot{x}x_\text{г} + \Delta x_\text{г}\dot{x}\right) + 2\Delta A/A =$$
$$= \varepsilon_x\left[1 + k_1k_2 + \left(1 + k_1k_2 + k_1 + k_2\right)\dot{x}x_\text{г}\big/\omega A^2\right] + 2\Delta A/A.$$

Относительные погрешности определения мгновенных характеристик

Наименование характеристики	Способ оценивания	Условия оценки	Относительная погрешность оценки	Пример величины погрешности
Огибающая, $A(t)$	$\sqrt{x^2+x_\text{г}^2}$	$\overline{x_\text{г}^2}\big/\overline{A^2}=0,5$	$0,5\varepsilon_x(1+k_1)$	0,015
Мгновенная фаза, $\phi(t)$	$\operatorname{arctg}\left(x_\text{г}/x\right)$	$\phi=\pi/4$	$0,5\varepsilon_x(1+k_1)$	
Мгновенная частота, $\omega(t)=2\pi f(t)$	$\left(x\dot{x}_\text{г}-\dot{x}x_\text{г}\right)\big/A^2$	$\overline{\dot{x}x_\text{г}}\big/\overline{\omega A^2}=0,5$	$0,5\varepsilon_x(5+3k_1+$ $+k_2+3k_1k_2)$	0,125
Скорость изменения мгновенной амплитуды, $\dot{A}(t)$	$\left(x\dot{x}+x_\text{г}\dot{x}_\text{г}\right)\big/A$	$\overline{\dot{x}x_\text{г}}\big/\overline{\dot{A}A}=1$	$0,5\varepsilon_x(1+3k_1+$ $+2k_1k_2)$	0,075
Мгновенный коэффициент демпфирования, $h(t)$	$-\dot{A}\big/A$, $\Delta t^{-1}\ln\left(A_i\big/A_{i+1}\right)$	$\dot{\omega}=0$	$\varepsilon_x(1+2k_1+k_1k_2)$	0,090
Мгновенный декремент колебаний, $\delta(t)$	$-\dot{A}\big/Af$		$0,5\varepsilon_x(7+7k_1+$ $+k_2+5k_1k_2)$	0,215
Среднее значение декремента $\overline{\delta}$	$(ft)^{-1}\ln\left(A\big/A_0\right)$		$\varepsilon_\delta\big/\sqrt{N}$	0,011

П р и м е ч а н и е : $\varepsilon_x = 0{,}01$; $k_1 = k_2 = 2$; Δt – интервал дискретизации; A_i, A_{i+1} – соседние во времени значения огибающей; A_0 – начальная амплитуда в момент времени $t = 0$; $N = t/\Delta t = 400$ – число отсчетов процесса.

Среднее значение произведения зависимых центрированных процессов равно произведению их средних квадратичных отклонений: $\overline{\dot{x}x_\text{г}}=\sigma_{\dot{x}}\sigma_{x_\text{г}}=\omega_0\sigma_x^2$, где ω_0 – центральная частота процесса $x(t)$. Среднее значение произведения независимых процессов равно произведению их средних $\overline{\omega A^2}=\overline{\omega}\,\overline{A^2}=\omega_0\left(A^2+\sigma_A^2\right)=$ $=2\omega_0\sigma_x^2$. В результате имеем $\overline{\dot{x}x_\text{г}}\big/\overline{\omega A^2}=0,5$. Итоговое выражение для ε_ω приведено в таблице.

Скорость изменения мгновенной амплитуды:

$$\Delta\dot{A}\big/\dot{A}=A^{-1}\dot{A}^{-1}\left(\Delta x\dot{x}+\Delta\dot{x}x+\Delta x_\text{г}\dot{x}_\text{г}+\Delta\dot{x}_\text{г}x_\text{г}\right)+\Delta A\big/A=$$
$$=\varepsilon_x(1+k_2)+.\varepsilon_A+\varepsilon_x(k_1+k_1k_2-1-k_2)\,x_\text{г}\dot{x}_\text{г}\big/\dot{A}A.$$

Используя подстановки $\overline{\dot{x}_\text{г}x_\text{г}}=\omega_0\sigma_x^2$, $\overline{\dot{A}A}=\sigma_{\dot{A}}\sigma_A=\Delta\omega\sigma_x^2\sqrt{2-0,5\pi}$, где $\Delta\omega$ – ширина спектрального пика нормального случайного процесса $x(t)$, получим

$$\overline{\dot{x}_\text{г}x_\text{г}}\big/\overline{\dot{A}A}=\omega_0\big/\Delta\omega\sqrt{2-0,5\pi}\approx\omega_0/0,65\Delta\omega.$$

Для широкополосных процессов, у которых $\Delta\omega \geq \omega_0$, последнее выражение может быть приравнено 1, а для узкополосных ($\Delta\omega << \omega_0$) – 0. Итоговое выражение для $\varepsilon_{\dot{A}}$ в случае широкополосного сигнала приведено в таблице.

Мгновенный коэффициент демпфирования линейной системы $(\dot{\omega} = 0)$:

$$\Delta h / h = h^{-1}\left(\frac{\Delta\dot{A}}{A} + \frac{\Delta A\dot{A}}{A^2}\right) = \varepsilon_{\dot{A}} + \varepsilon_A .$$

Мгновенный декремент колебаний линейной системы $(\dot{\omega} = 0)$:

$$\Delta\delta / \delta = \delta^{-1}\left(\frac{\Delta\dot{A}}{Af} + \frac{\Delta A\dot{A}}{fA^2} + \frac{\Delta f\dot{A}}{Af^2}\right) = \varepsilon_{\dot{A}} + \varepsilon_A + \varepsilon_f .$$

При осреднении оцениваемой характеристики по множеству точек N относительная погрешность уменьшается в $\sqrt{N}$ раз.

Анализ полученных выражений для относительных погрешностей показывает, что с наименьшими погрешностями оцениваются мгновенная амплитуда и мгновенная фаза колебательного процесса ($\varepsilon_A = \varepsilon_\phi \approx 0{,}015$), а с наибольшими погрешностями – мгновенная частота ($\varepsilon_\omega \approx 0{,}125$) и мгновенный декремент колебаний ($\varepsilon_\delta \approx 0{,}215$). Поэтому при определении скелетных кривых и диссипативных характеристик стационарных динамических систем следует стремиться к многократному повторению импульсного воздействия с последующей обработкой виброграмм затухающих колебаний, что позволит за счет статистического осреднения уменьшить погрешность оценки характеристик до приемлемой величины.

Отметим, что на высоких частотах в окрестности половины частоты дискретизации цифровые преобразователь Гильберта и дифференциатор дают наибольшие ошибки преобразования сигнала, поэтому для снижения высокочастотной погрешности целесообразно ввести дополнительную низкочастотную фильтрацию мгновенных характеристик. Такая фильтрация мгновенной амплитуды с частотой среза f_1 эквивалентна полосовой фильтрации исходного процесса с шириной полосы $2f_1$.

При исследовании колебательных систем с несколькими степенями свободы метод требует предварительной полосовой фильтрации сигнала, причем ширина полосы предварительного фильтра должна превышать ширину пика гармоники аналитического сигнала $\Delta f > \delta f_0/\pi$. Для правильной работы цифровых фильтров, формирующих мгновенные характеристики, необходимо, чтобы соблюдалось следующее условие для частоты дискретизации $2{,}2f_{\min} \leq f_{\text{дискр}} \leq 2{,}2f_{\max}$, где $f_{\min}$, $f_{(\max)}$ – границы спектра сигнала.

Для повышения точности обработки за счет уменьшения влияния переходных процессов в цифровых преобразователях можно рекомендовать искусственное увеличение числа отсчетов сигнала путем добавления слева к исходному процессу $x(t)$ его зеркального отражения $x(-t)$.

Список литературы

1. Добрынин, С. А. Методы автоматизированного исследования вибрации машин / С. А. Добрынин, М. С. Фельдман, Г. И. Фирсов. – М. : Машиностроение, 1987. – 224 с.

2. Вайнштейн, Л. А. Разделение частот в теории колебаний и волн / Л. А. Вайнштейн, Д. Е. Вакман. – М. : Наука, 1983. – 288 с.

3. Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов : пер. с англ. / А. Оппенгейм, Р. Шафер. – М. : Техносфера, 2006. – 856 с.

4. Rabiner, L. R. Theory and Applications of Digital Signal Processing / L. R. Rabiner, B. Gold. – Englewood Cliffs (N.J.), Prentice Hall, 1975. – 762 p.

5. Feldman, M. Non-Linear System Vibration Analysis Using Hilbert Transform. I. Free Vibration Analysis Method "FREEVIB" / M. Feldman // Mechanical Systems and Signal Processing. – 1994. – No. 8(2). – P. 119 – 127.

6. Feldman, M. S. Hilbert Transform Applications in Mechanical Vibrations / M. S. Feldman. – Chichester : Wiley, 2011. – 292 p.

Error Estimates for Computation of Instantaneous Characteristics of Free Vibrations of Dynamic Systems

G. I. Firsov

Department of Mechanics and Control of Machines,
Institute of Machines Science named after A. A. Blagonravov
of the Russian Academy of Sciences, Moscow;
firsovgi@mail.ru

Keywords: analytical signal; instantaneous amplitude; instantaneous phase; instantaneous frequency; discrete Hilbert transform.

Abstract: The paper discusses the use of analytical signal to describe transients in quasi-linear oscillating systems. Error estimates for the computation of the values of instantaneous amplitude, phase, and frequency as well as characteristics of the energy dissipation in the system were described. The discrete Hilbert transform, implemented by the Remez algorithm was used to determine the instantaneous amplitude and other parameters of the signal.

Referenses

1. Dobrynin S.A., Fel'dman M.S., Firsov G.I. *Metody avtomatizirovannogo issledovaniya vibratsii mashin* (Methods for automated study of machine vibration), Moscow: Mashinostroenie, 1987, 224 p.

2. Vainshtein L.A., Vakman D.E. *Razdelenie chastot v teorii kolebanii i voln* (Frequency separation in the theory of oscillations and waves), Moscow: Nauka, 1983, 288 p.

3. Oppenheim A.V., Schafer R.W. *Discrete Time Signal Processing*", Upper Saddle River : Pearson, 2010.

4. Rabiner L.R., Gold B. *Theory and Applications of Digital Signal Processing*, Englewood Cliffs (N.J.), Prentice Hall, 1975, 762 p.

5. Feldman M. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1994, no. 8(2), pp. 119-127.

6. Feldman M.S. *Hilbert Transform Applications in Mechanical Vibrations*, Chichester: Wiley, 2011, 292 p.

Einschätzung der Fehler der Berechnung der augenblicklichen Charakteristiken der freien Schwingungen der dynamischen Systeme

Zusammenfassung: Es ist die Nutzung des analytischen Signals für die Beschreibung der instationären Prozesse in den quasilinearen Schwingungssysteme betrachtet. Es sind die Einschätzungen des Fehlers der Berechnung der Bedeutungen der augenblicklichen Amplitude, der Phase und der Frequenz, sowie der Parameter des Zerstreuens der Energie im System angeführt. Für die Bestimmung der augenblicklichen Amplitude und der anderen Parameter des Signals ist die diskrete Transformation von Hilbert, die nach dem Algorithmus von Remez realisiert ist, verwendet.

Estimation des erreurs des calculs des caractéristiques instantannées des oscillations libres des systèmes dynamiques

Résumé: Est examiné l'emploi du signal analytique pour la description des processus transitoires dans les systèmes d'oscillations quasilinéaires. Sont citées les estimations des erreurs des calculs des valeurs de l'amplitude instatannée, de la phase et de la fréquence ainsi que des paramètres de dispersion de l'énergie dans le système. Est utilisée la transformation Hilbert pour la définition de l'amplitude instatannée et d'autres paramètres.

Автор: ***Фирсов Георгий Игоревич*** – старший научный сотрудник отдела «Механика машин и управление машинами», ФГБУН «Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН», г. Москва.

Рецензент: ***Дворецкий Станислав Иванович*** **–** доктор технических наук, профессор кафедры «Технологии и оборудование пищевых и химических производств», проректор по научно-инновационной деятельности, ФГБОУ ВПО «ТГТУ».
