

УДК 66.067.38.661.515

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
СОВМЕСТНОГО ЭЛЕКТРОТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА
В ЭЛЕКТРОБАРОМЕМБРАННЫХ СИСТЕМАХ

В. Л. Головашин

*Кафедра «Прикладная геометрия и компьютерная графика»,
ФГБОУ ВПО «ТГТУ»; geometry@mail.nnn.tstu.ru*

Ключевые слова и фразы: коэффициент задержания; массоперенос; мембрана; осмотический поток; теплоперенос; электроосмотический поток.

Аннотация: Представлена математическая модель совместного электротепломассопереноса в электробаромембранных системах на основе уравнений гидродинамики, уравнений Нернста–Планка, записанных для каждого компонента раствора, уравнения Стефана–Больцмана и уравнения конвективного теплообмена, дополненные соответствующими граничными условиями. Рассмотрено решение уравнений гидродинамики с учетом осмотического и электроосмотического переноса растворителя для прианодной мембраны. Система уравнений, описывающая совместный электротепломассоперенос, решена численным методом. Рассчитано распределение концентраций первого и второго компонентов раствора по длине и высоте электробаромембранного канала в зависимости от плотности тока. Определено поле температур в электробаромембранном канале, как функция плотности тока. Адекватность построенной математической модели проверена путем сопоставления расчетных и экспериментальных данных по удельному потоку растворителя через мембрану и концентрациям растворенных веществ в пермеате. Сравнение расчетных и экспериментальных данных показало их соответствие, что свидетельствует об адекватности предложенной математической модели реальному процессу.

Обозначения

C_p – теплоемкость раствора, Дж/(кг·К);	\mathbf{u}, u – вектор поля скоростей и его продольная составляющая соответственно, м/с;
c_1, c_2 – концентрации растворенных веществ, кг/м ³ ;	u_m – подвижность ионов, м ² /В·с;
D, D_m – коэффициенты диффузии растворенных веществ в канале и мембране соответственно, м ² /с;	v – поперечная составляющая вектора скорости, м/с;
F – число Фарадея;	γ – равновесный коэффициент распределения;
h_m – толщина активного слоя мембраны, м;	δ – толщина пограничного слоя, м;
i – плотность тока, А/м ² ;	ϵ, ϵ_0 – диэлектрические постоянные раствора и вакуума соответственно;
L – длина мембранного канала, м;	η – кинематическая вязкость раствора, Н/м ² ;
P – давление в канале, Па;	η_i – выход по току;
Q – расход жидкости через канал, м ³ /с;	λ_p – теплопроводность раствора, Вт/(м·К);
q – удельный тепловой поток, Вт/м ² ;	ρ – плотность раствора, кг/м ³ ;
R – коэффициент задержания мембраны;	χ – удельная электропроводность раствора, См/м.
R_B – универсальная газовая постоянная;	
U – электрический потенциал, В;	

Введение

В настоящее время существует ряд разработанных различными авторами методик расчета массопереноса и математическое описание процесса баромембранного разделения [1 – 4]. Однако данные математические модели применимы лишь в частных случаях, носят специализированный характер и не дают полного описания процесса. Математические модели, описывающие процесс массопереноса в электробаромембранных аппаратах, пока еще полностью не разработаны. В работе [4] предложена модель расчета электробаромембранного аппарата на основе уравнения конвективной диффузии и уравнений гидродинамики. В данной работе при разработке математического описания кинетики массопереноса в электробаромембранных аппаратах использовалась модель электроконвективной диффузии (уравнение Нернста–Планка), как наиболее приемлемая, в которой, в отличие от работы [5], учитывается электроосмотический и осмотический потоки растворителя, имеющие для некоторых растворов значительную величину. Также в данной работе предложено математическое описание теплопереноса на основе уравнения конвективного теплообмена.

Математическое описание массопереноса в межмембранном канале

Рассмотрим задачу массопереноса через прианодную мембрану при наложении электрического поля при движении жидкости в плоском электробаромембранном канале, состоящем из полупроницаемой мембраны и непроницаемой стенки (рис. 1).

Примем следующие основные допущения:

- 1) скорость электродных реакций намного ниже скорости массопереноса;
- 2) рабочая плотность тока намного ниже критической;
- 3) насос обеспечивает постоянство подачи;
- 4) микропотоки растворителя и растворенного вещества учитываются через коэффициент задержания и удельный поток растворителя;
- 5) течение стационарное, установившееся, режим движения жидкости ламинарный.

Рассмотрим математическую запись задачи:

$$\nabla \left[\eta \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \right] + \rho (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \nabla P = 0;$$

$$\nabla \mathbf{u} = 0;$$

$$\nabla (-D_1 \nabla c_1 - z_1 u_{m1} F \nabla U) = -\mathbf{u} \nabla c_1;$$

$$\nabla (-D_2 \nabla c_2 - z_2 u_{m2} F \nabla U) = -\mathbf{u} \nabla c_2;$$

$$-\nabla \varepsilon_0 \varepsilon_r \nabla U = \theta.$$

Вышеприведенная система уравнений дополняется соответствующими граничными условиями, которые будут рассмотрены ниже.

Рассмотрим задачу гидродинамики: для ламинарного, стационарного, установившегося течений уравнения движения жидкости имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P(x, y)}{\partial x}.$$

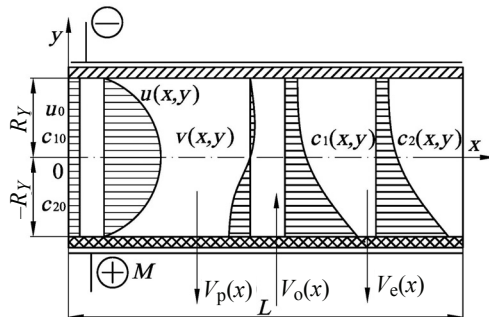


Рис. 1. Схема массопереноса в плоском электробаромембранном канале (прианодная мембрана)

Граничные условия:

$$u(x, R_Y) = 0; \quad u(x, -R_Y) = 0.$$

Поскольку давление меняется только вдоль оси канала можно записать

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx}. \quad (1)$$

Проинтегрируем уравнение (1)

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) y + C_1; \quad u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) y^2 + C_1 y + C_2,$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования. Найдём C_1 и C_2 из граничных условий:

$$u(R_Y) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) R_Y^2 + C_1 R_Y + C_2 = 0;$$

$$u(-R_Y) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) R_Y^2 - C_1 R_Y + C_2 = 0;$$

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) R_Y^2 + 2C_2 = 0;$$

$$C_2 = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) R_Y^2;$$

$$-\frac{1}{2\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) R^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) R_Y^2 + C_1 R_Y = 0;$$

$$C_1 = 0.$$

Таким образом, имеем решение в виде

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) y^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) R_Y^2,$$

или

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) (R_Y^2 - y^2).$$

Определим расход жидкости через канал как:

$$Q = b \int_{-R_Y}^{R_Y} u(y) dy = -b \int_{-R_Y}^{R_Y} \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) (R_Y^2 - y^2) dy;$$

$$Q = -\frac{b}{2\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) \int_{-R_Y}^{R_Y} (R_Y^2 - y^2) dy;$$

$$Q = -\frac{b}{2\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) \left(R^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-R_Y}^{+R_Y} = -\frac{b}{2\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) \left(R_Y^3 - \frac{R_Y^3}{3} + R_Y^3 - \frac{R_Y^3}{3} \right);$$

$$Q = -\frac{2bR_Y^3}{3\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right),$$

где b – ширина канала, м.

Давление в канале можно записать как складывающееся из трех составляющих: гидродинамическое, осмотическое и электроосмотическое

$$P = P - \Delta\pi_o + \Delta\pi_e.$$

Интерпретируя осмотический поток, как возникающий в результате осмотического давления, а электроосмотический поток, как возникающий в результате электроосмотического давления расход в канале, можно записать:

$$Q = -\frac{2bR_Y^3}{3\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right) + \frac{2bR_Y^3}{3\mu} \left(\frac{d\pi_o}{dx} \right) - \frac{2bR_Y^3}{3\mu} \left(\frac{d\pi_e}{dx} \right);$$

$$Q_1 = -\frac{2bR_Y^3}{3\mu} \left(\frac{dP}{dx} \right); \quad Q_2 = \frac{2bR_Y^3}{3\mu} \left(\frac{d\pi_o}{dx} \right);$$

$$Q_3 = -\frac{2bR_Y^3}{3\mu} \left(\frac{d\pi_e}{dx} \right). \quad (2)$$

Проницаемость мембраны с учетом осмотического и электроосмотического давления можно определить как:

$$V = k(P - P_0 - \Delta\pi_o + \Delta\pi_e), \quad (3)$$

где k – коэффициент проницаемости мембраны, м/с·Па; P_0 – давление, под которым вытекает пермеат, Па; $\Delta\pi_o$ – разность осмотических давлений пенетрата и пермеата, Па; $\Delta\pi_e$ – разность электроосмотических давлений пенетрата и пермеата, Па.

Умножив слагаемые формулы (3) на k , можно записать:

$$V_1 = k\Delta P; \quad V_2 = -k\Delta\pi_o; \quad V_3 = k\Delta\pi_e,$$

далее

$$Q = -\frac{2R_Y^3}{3\mu} \left(\frac{d(\Delta P - \Delta\pi_o + \Delta\pi_e)}{dx} \right).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение для проницаемости (рис. 2)

$$Q_{x+dx} - Q_x = dQ = -bV(x)dx.$$

Отсюда получаем

$$\frac{dQ}{dx} = -bV(x).$$

Знак « \leftarrow » показывает, что расход в канале убывает.

Учитывая (2), получим

$$\frac{dQ}{dx} = -bk(\Delta P - \Delta\pi_o + \Delta\pi_e);$$

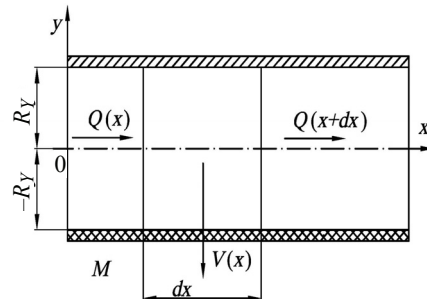


Рис. 2. Схема электробаромембранного канала

$$\begin{aligned}\frac{dQ_1}{dx} &= -bk\Delta P; \\ \frac{dQ_2}{dx} &= bk\Delta\pi_o; \\ \frac{dQ_3}{dx} &= -bk\Delta\pi_e.\end{aligned}\quad (4)$$

Решим для случая оттока под действием гидродинамического давления, приравняем (2) и (4)

$$\begin{aligned}-\frac{2bR_Y^3}{3\mu}\left(\frac{d^2P(x)}{dx^2}\right)dx &= -bkP(x)dx; \\ \frac{2R_Y^3}{3\mu}\left(\frac{d^2P(x)}{dx^2}\right) &= kP(x); \quad \frac{2R_Y^3}{3\mu}\left(\frac{d^2P(x)}{dx^2}\right) - kP(x) = 0,\end{aligned}$$

обозначив $\frac{3\mu k}{2R_Y^3} = \lambda$, получим уравнение

$$\frac{d^2P(x)}{dx^2} - \lambda P(x) = 0.$$

При $\lambda < 0$ решение вышеприведенного уравнения по [7] имеет вид

$$P(x) = C_1 \operatorname{ch}(x\sqrt{|\lambda|}) + C_2 \operatorname{sh}(x\sqrt{|\lambda|}). \quad (5)$$

Найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2 с учетом граничных условий:

$$\Delta P(0) = \Delta P_n; \quad \Delta P(L) = \Delta P_k;$$

$$P_n = C_1 \operatorname{ch}(0) + C_2 \operatorname{sh}(0).$$

Тогда, учитывая, что $\operatorname{ch}(0) = 1$, $\operatorname{sh}(0) = 0$, находим:

$$C_1 = P_n;$$

$$P_k = P_n \operatorname{ch}(L\sqrt{|\lambda|}) + C_2 \operatorname{sh}(L\sqrt{|\lambda|}).$$

Выражая из уравнения постоянную интегрирования C_2 , получаем

$$C_2 = \frac{P_k - P_n \operatorname{ch}(L\sqrt{|\lambda|})}{\operatorname{sh}(L\sqrt{|\lambda|})}.$$

Подставляем C_1 и C_2 в формулу (5), получаем

$$P(x) = P_n \operatorname{ch}(x\sqrt{|\lambda|}) + \left(\frac{P_k - P_n \operatorname{ch}(L\sqrt{|\lambda|})}{\operatorname{sh}(L\sqrt{|\lambda|})}\right) \operatorname{sh}(x\sqrt{|\lambda|}). \quad (6)$$

Принимая $A = \frac{\sqrt{6R_Y^3 k \mu}}{2R_Y^3}$, выражение (6) для распределения гидродинамического давления по длине канала переписывается в виде

$$P(x) = \frac{P_n \operatorname{ch}(Ax) \operatorname{sh}(AL) - P_n \operatorname{sh}(Ax) \operatorname{ch}(AL) + P_k \operatorname{sh}(Ax)}{\operatorname{sh}(AL)}.$$

Применив аналогичные рассуждения, получим для случая оттока под действием осмотического давления

$$\pi_o(x) = \pi_{on} \cos(x\sqrt{\lambda}) + \left(\frac{\pi_{ok} - \pi_{on} \cos(L\sqrt{\lambda})}{\sin(L\sqrt{\lambda})} \right) \sin(x\sqrt{\lambda}),$$

или

$$\pi_o(x) = \frac{\pi_{ok} \cos(Ax) \sin(AL) - \pi_{on} \sin(Ax) \cos(AL) + \pi_{ok} \sin(Ax)}{\sin(AL)}.$$

Для случая оттока под действием электроосмотического давления решение будет иметь вид

$$\pi_e(x) = \pi_{en} \operatorname{ch}(x\sqrt{|\lambda|}) + \left(\frac{\pi_{ek} - \pi_{en} \operatorname{ch}(L\sqrt{|\lambda|})}{\operatorname{sh}(L\sqrt{|\lambda|})} \right) \operatorname{sh}(x\sqrt{|\lambda|}),$$

Или

$$\pi_e(x) = \frac{\pi_{en} \operatorname{ch}(Ax) \operatorname{sh}(AL) + \pi_{ek} \operatorname{sh}(Ax) - \pi_{en} \operatorname{sh}(Ax) \operatorname{ch}(AL)}{\operatorname{sh}(AL)}.$$

Тогда первая производная гидродинамического давления будет соответственно

$$\frac{dP(x)}{dx} = \frac{A(P_n \operatorname{sh}(Ax) \operatorname{sh}(AL) + P_k \operatorname{ch}(Ax) - P_n \operatorname{ch}(Ax) \operatorname{ch}(AL))}{R_Y^3 \operatorname{sh}(AL)},$$

для осмотического давления

$$\frac{d\pi_o(x)}{dx} = \frac{A(\pi_{on} \sin(Ax) \sin(AL) + \pi_{ok} \cos(Ax) - \pi_{on} \cos(Ax) \cos(AL))}{R_Y^3 \sin(AL)},$$

для электроосмотического давления

$$\frac{d\pi_e(x)}{dx} = \frac{A(\pi_{en} \operatorname{sh}(Ax) \operatorname{sh}(AL) + \pi_{ek} \operatorname{ch}(Ax) - \pi_{en} \operatorname{ch}(Ax) \operatorname{ch}(AL))}{R_Y^3 \operatorname{sh}(AL)}.$$

Таким образом, с учетом полученных выражений для производных можно записать

$$u(x, y) = -\frac{A}{2R_Y^3 \mu} \left(\frac{dP(x)}{dx} - \frac{d\pi_o(x)}{dx} + \frac{d\pi_e(x)}{dx} \right) (R_Y^2 - y^2).$$

Продифференцируем данное уравнение по x

$$\frac{du(y)}{dx} = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{d^2 P(x)}{dx^2} - \frac{d^2 \pi_o}{dx^2} + \frac{d^2 \pi_e}{dx^2} \right) (R_Y^2 - y^2).$$

Подставим в уравнение неразрывности

$$\frac{dv(y)}{dy} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{d^2 P(x)}{dx^2} - \frac{d^2 \pi_o}{dx^2} + \frac{d^2 \pi_e}{dx^2} \right) (R_Y^2 - y^2).$$

Определим вторые производные от давления:
гидродинамического

$$\frac{d^2 P(x)}{dx^2} = \frac{3k\mu P_n \operatorname{ch}(Ax) \operatorname{sh}(AL) + P_k \operatorname{sh}(AL) - P_n \operatorname{sh}(Ax) \operatorname{ch}(AL)}{2R_Y^3 \operatorname{sh}(AL)},$$

осмотического

$$\frac{d^2 \pi_o}{dx^2} = \frac{3k\mu \pi_{on} \cos(Ax) \sin(AL) + \pi_{ok} \sin(AL) - \pi_{on} \sin(Ax) \cos(AL)}{2R_Y^3 \sin(AL)},$$

электроосмотического

$$\frac{d^2 \pi_e}{dx^2} = \frac{3k\mu \pi_{en} \operatorname{ch}(Ax) \operatorname{sh}(AL) + \pi_{ek} \operatorname{sh}(AL) - \pi_{en} \operatorname{sh}(Ax) \operatorname{ch}(AL)}{2R_Y^3 \operatorname{sh}(AL)}$$

и решим уравнение неразрывности с учетом граничных условий:

$$v(R_Y) = 0; \quad v(-R_Y) = -k(P(x) - \pi_o(x) + \pi_e(x)).$$

Получим

$$v(x, y) = -\frac{1}{6\mu R_Y} \left(\left(\frac{d^2 P(x)}{dx^2} - \frac{d^2 \pi_o}{dx^2} + \frac{d^2 \pi_e}{dx^2} \right) (R_Y^3 y - y^3 R_Y) + 3k\mu (P(x) - \pi_o(x) + \pi_e(x))(y - R_Y) \right).$$

Запишем результирующую систему уравнений. Уравнения Нернста-Планка:

$$u(x, y) \frac{\partial c_1(x, y)}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial c_1(x, y)}{\partial y} = \nabla(D_1 \nabla c_1(x, y) - z_1 u_{m1} F \nabla U(x, y)); \quad (7)$$

$$u(x, y) \frac{\partial c_2(x, y)}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial c_2(x, y)}{\partial y} = \nabla(D_2 \nabla c_2(x, y) - z_2 u_{m2} F \nabla U(x, y)). \quad (8)$$

Условие электронеutrальности

$$\sum c_i z_i = 0. \quad (9)$$

Граничные условия для уравнений Нернста-Планка:

$$\begin{cases} c_1(0, y) = c_{10}; \\ R_1 v(x, -R_Y) c_1(x, -R_Y) = D_1 \nabla c_1(x, -R_Y) + z_1 u_{m1} F c_1(x, -R_Y) \nabla U(x, -R_Y); \\ R_1 v(x, R_Y) c_1(x, R_Y) = D_1 \nabla c_1(x, R_Y) + z_1 u_{m1} F c_1(x, R_Y) \nabla U(x, R_Y), \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} c_2(0, y) = c_{20}; \\ R_2 v(x, -R_Y) c_2(x, -R_Y) = D_2 \nabla c_2(x, -R_Y) + z_2 u_{m2} F c_2(x, -R_Y) \nabla U(x, -R_Y); \\ R_2 v(x, R_Y) c_2(x, R_Y) = D_2 \nabla c_2(x, R_Y) + z_2 u_{m2} F c_2(x, -R_Y) \nabla U(x, R_Y). \end{cases} \quad (11)$$

Уравнение электростатики:

$$-\nabla \varepsilon_0 \varepsilon_r \nabla U(x, y) = \theta. \quad (12)$$

С граничными условиями:

$$U(x, -R_Y) = +E_0; \quad U(x, R_Y) = -E_0; \quad U(L, y) = 0; \quad U(0, y) = 0, \quad (13)$$

где E_0 – электрический потенциал, В.

Подставляем полученные выражения для продольной и поперечной компонент скорости в уравнения (7)–(8) и решаем их совместно с (9)–(13)

численным методом, находим распределение концентраций растворенных веществ по длине и высоте межмембранного канала.

В случае значительных величин тока необходимо учитывать тепловыделение (рис. 3), поэтому систему уравнений (7)–(13) необходимо дополнить уравнением конвективного теплопереноса с соответствующими граничными условиями.

Уравнение конвективного теплообмена

$$u(x, y) \frac{\partial t(x, y)}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} = \frac{\lambda_p}{C_p \rho} \left(\frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2} \right) + Q(x, y). \quad (14)$$

С граничными условиями:

$$\begin{cases} t(0, y) = t_0; \\ C_p c(x, +R_Y) t(x, +R_Y) v(x, +R_Y) = \lambda \nabla t(x, +R_Y); \\ RC_p c(x, -R_Y) t(x, -R_Y) v(x, -R_Y) = \lambda \nabla t(x, -R_Y). \end{cases} \quad (15)$$

Коэффициент задержания рассчитывали по уравнению, полученному из аналитического решения одномерных уравнений Нернста–Планка для прианодной мембраны (индекс i принимает значения 1, 2, соответствующие первому и второму компонентам раствора), аналогичному приведенному в [11], для заряженных асимметричных мембран

$$R_i = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\gamma_i} - 1 \right) \left[1 - \exp \left(-\frac{J \gamma_i h_m}{P_{Di}} + \frac{z_i F U h_m}{R_B T} \right) \right] \exp \left(-\frac{J \delta}{D_i} + \frac{z_i F U \delta}{R_B T} \right)},$$

где J – удельный поток растворителя, м/с; P_{Di} – коэффициент диффузионной проницаемости мембраны, м²/с.

Тепловой поток, получаемый в результате выделения джоулева тепла описывали уравнением

$$Q(x, y) = \frac{i^2}{\chi} \eta_i.$$

Результаты численных и экспериментальных исследований

Проверку адекватности построенной математической модели осуществляли путем сравнения расчетных и экспериментальных данных по разделению на мембране ESPA1 модельного маточного раствора сульфанилат натрия + сульфат натрия, заимствованных из работы [4]. Систему уравнений (7)–(15) решали численно, в качестве допущения было принято, что вязкость, плотность, теплоемкость и теплопроводность смеси подчиняется закону аддитивности. Давление в мембранном канале составляло 5 МПа, начальная температура раствора $T_0 = 293$ К. Исходные концентрации раствора: $c_{10} = 10$ кг/м³, $c_{20} = 10$ кг/м ($x = 0, 14$ м; $1 - i = 0$; $2 - i = 0,5$ А/м²; $3 - i = 1,0$ А/м²; $4 - i = 1,5$ А/м²; $5 - i = 2,0$ А/м²). Результаты представлены на рис. 4 – 6.

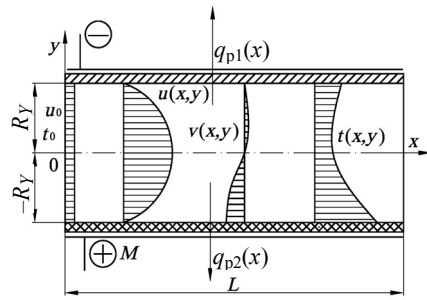


Рис. 3. Схема теплопереноса в плоском электробаромембранном канале (прианодная мембрана)

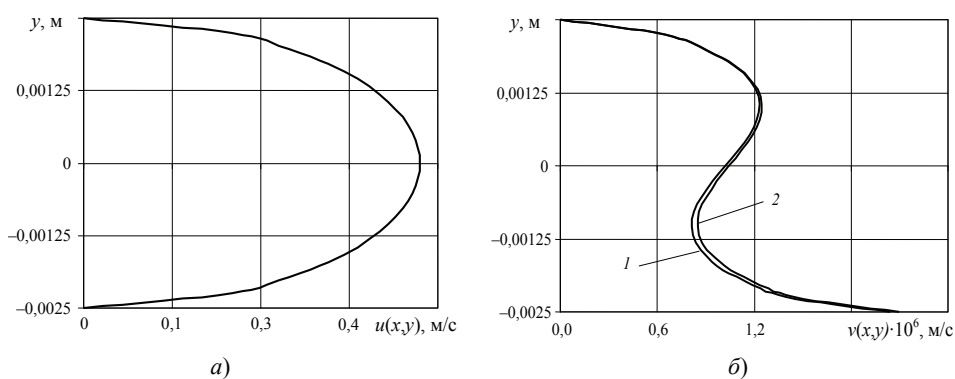


Рис. 4. Продольная (а) и поперечная (б) составляющие скорости по сечению канала

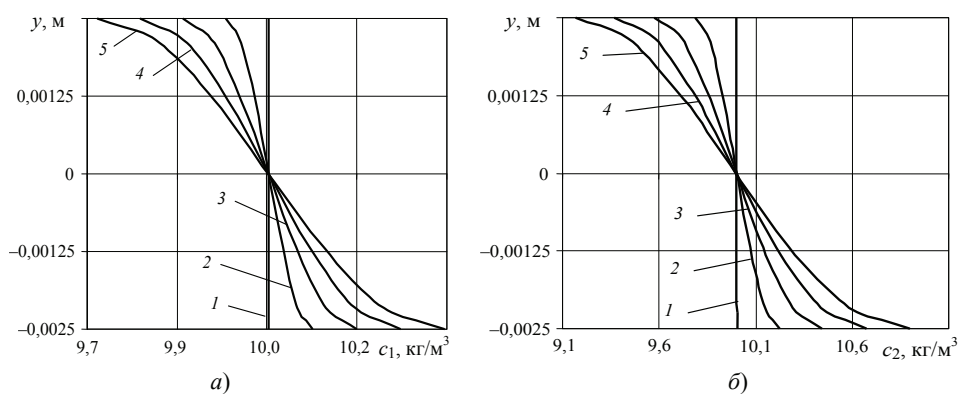


Рис. 5. Концентрация первого (а) и второго (б) компонентов (сульфанилат ион) по сечению канала

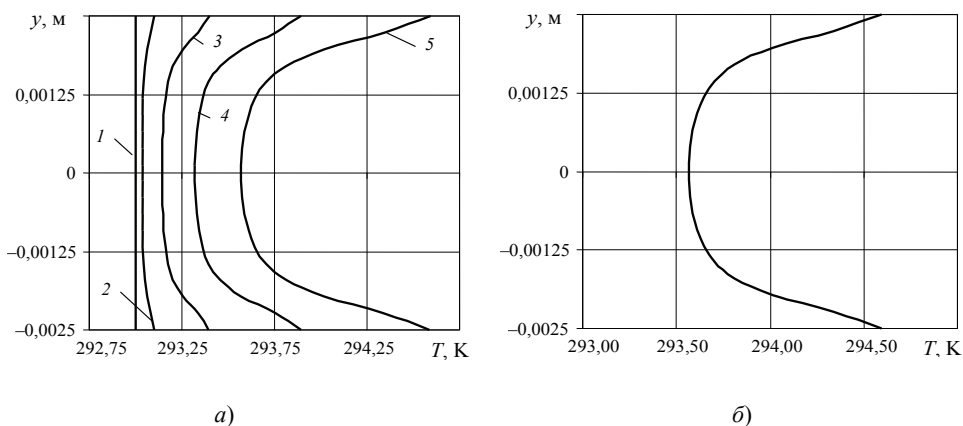


Рис. 6. Конвективный перенос через нижнюю границу (а), условие тепловой изоляции верхней и нижней границ (б)

Проанализируем полученные результаты: как следует из рис. 4, а, профиль продольной составляющей скорости представляет собой параболическое распределение, что соответствует ламинарному, стабилизированному, установившемуся течению [6], профиль поперечной составляющей скорости (см. рис. 4, б) изменяется от нуля на непроницаемой стенке до значений, соответствующих величине удельного потока растворителя при данной концентрации, давлению и величине

потенциала электрического поля на границе, соответствующей мембране. При наложении электрического поля возникает электроосмотический поток, направленный к аноду, который увеличивает граничное значение поперечной составляющей скорости и в целом значение поперечной составляющей скорости по высоте канала. Так же следует отметить, что и первый компонент раствора – сульфанилат натрия, и второй – сульфат натрия обладают при данных концентрациях значительным осмотическим давлением (сульфат натрия – 0,537 МПа [1]), что вызывает встречный осмотический поток, приводящий к уменьшению общего удельного потока растворителя через мембрану.

Рассмотрим изменение концентрации растворенных веществ по высоте канала при наложении электрического поля. Без наложения электрического поля концентрация обеих ионов практически постоянна по высоте канала, за исключением примембранной области, в которой она незначительно повышается из-за оттока растворителя, что хорошо соответствует модели конвективной диффузии, с учетом осмотического переноса растворителя [3]. При наложении электрического поля отрицательно заряженные ионы (сульфанилат ион $z = -1$, сульфат ион $z = -2$) мигрируют к положительно заряженному аноду, что соответствует общепринятым представлениям [8, 9]. Как видно из рис. 5, увеличение напряженности электрического поля приводит к значительному перераспределению концентрации анионов, причем двухвалентный сульфат ион перераспределяется в большей степени, чем одновалентный сульфанилат ион, что связано с различиями как в коэффициенте диффузии, так и в подвижности ионов.

Проанализируем изменение температуры в канале. При наложении электрического поля в растворе выделяется джоулево тепло, которое частично отводится с пермеатом через мембрану и частично, посредством теплообмена, через непроницаемую стенку в окружающее пространство. В данном случае расчет выполнен при термической изоляции непроницаемой стенки и конвективном потоке тепла через мембрану. Как видно из рис. 6, *a*, основное падение температуры происходит в примембранной области, что связано с наличием оттока растворителя через мембрану. На рисунке 6, *б* показано распределение температуры, выполненное при термической изоляции обеих боковых границ. Следует отметить, что значительное изменение температуры и, как следствие, изменение плотности и вязкости раствора возможно при больших плотностях тока [10], однако, данный эффект ограничивается с одной стороны электродными реакциями в растворе, с другой стороны ограниченным диапазоном рабочих температур полимерной мембраны. В данном случае плотности тока намного ниже критических, поэтому существенного изменения температуры раствора не наблюдалось [4].

В таблице приведены экспериментальные и расчетные данные по удельному потоку растворителя через мембраны и концентрациям растворенных веществ в пермеате. Сравнение расчетных и экспериментальных данных показало их соответствие, что свидетельствует об адекватности предложенной математической модели реальному процессу.

Экспериментальные и расчетные данные

$i, \text{A/m}^2$	$J \cdot 10^6, \text{м/с}$		$c_1, \text{кг/м}^3$		$c_2, \text{кг/м}^3$	
	эксп.	расч.	эксп.	расч.	эксп.	расч.
0	2,04	2,00	0,50	0,50	4,00	4,00
0,5	2,10	2,05		0,51	4,05	4,07
1,0		2,09	0,52		4,09	4,10
1,5	2,12	2,10		0,53	4,18	4,19
2,0	2,14	2,11	0,52		4,26	4,27

Заключение

Таким образом, путем наложения электрического поля возможно регулирование и интенсификация основных кинетических параметров процесса электробаромембранного разделения: удельного потока растворителя через мембрану и коэффициента задержания мембран, а также создание на этой основе принципиально новых конструкций электробаромембранного оборудования.

Список литературы

1. Дытнерский, Ю. И. Обратный осмос и ультрафильтрация / Ю. И. Дытнерский. – М. : Химия, 1978. – 352 с.
2. Абоносимов, О. А. Математическая модель массопереноса в обратноосмотических аппаратах рулонного типа / О. А. Абоносимов, С. И. Лазарев, А. А. Алексеев // Труды ТГТУ: Сборник научных статей молодых ученых и студентов / Тамб. гос. техн. ун-т. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2000. – Вып. 6. – С. 101 – 104.
3. Головашин, В. Л. Кинетика массопереноса в процессах обратноосмотического разделения водных растворов низкомолекулярных органических веществ : дис. ... канд. техн. наук : 05.17.08 / Головашин Владислав Львович. – Тамбов, 2000. – 171 с.
4. Горбачев, А. С. Кинетика электробаромембранного разделения водных сульфатсодержащих растворов : дис. ... канд. техн. наук : 05.17.08 / Горбачев Александр Сергеевич. – Тамбов, 2006. – 196 с.
5. Чепеняк, П. А. Кинетика электрохимической мембранной очистки фосфатсодержащих сточных вод : дис. ... канд. техн. наук : 05.17.03 ; 05.17.08 / Чепеняк Павел Александрович. – Тамбов, 2011. – 168 с.
6. Химическая гидродинамика. Справочное пособие / А. М. Кутепов [и др.]. – М. : Квантум, 1996. – 336 с.
7. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям : пер. с нем. / Э. Камке. – М. : Наука, 1971. – 576 с.
8. Шапошник, В. А. Кинетика электродиализа / В. А. Шапошник. – Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1989. – 176 с.
9. Заболоцкий, В. И. Перенос ионов в мембранах / В. И. Заболоцкий, В. В. Никоненко. – М. : Наука, 1988. – 237 с.
10. Мамий, Д. К. Математическая модель тепломассопереноса в канале электродиализного аппарата / Д. К. Мамий, Т. Л. Шапошникова, К. М. Уртенев // Вестн. Адыгейского гос. университета. Сер. 4: Естествен.-мат. и техн. науки. – 2010. – № 1. – С. 77 – 92.
11. Васин, С. И. Разделение водных растворов электролитов на асимметричных мембранах, один из слоев которых заряжен / С. И. Васин, А. Н. Филиппов. – Коллоидный журн. – 2012. – Т. 74, № 1. – С. 15 – 24.

Mathematical Model of Joint Electric Heat and Mass Transfer in Electro-Baromembrane Systems

V. L. Golovashin

*Department "Applied Geometry and Computer Graphics", TSTU;
geometry@mail.nnn.tstu.ru*

Key words and phrases: electroosmotic flow; heat transfer; mass transfer; membrane; osmotic flow; rejection rate.

Abstract: The paper describes the developed mathematical model of joint electric heat and mass transfer in electro-baromembrane systems based on the equations of hydrodynamics, the Nernst–Planck equations recorded for each component of the solution, the Stefan–Boltzmann equation and the convective heat transfer equation, supplemented by appropriate boundary conditions. The solution of the hydrodynamics equations with the osmotic and electroosmotic solvent transfer for the anode membrane was obtained. The system of equations describing the joint electro-heat-mass transfer was solved numerically. The concentration distribution of the first and second components of the solution along the length and height of the electro-baromembrane channel depending on the current density was calculated. The temperature field in the electro-baromembranes channel as a function of current density was identified.

References

1. Dytnerkii Yu.I. *Obratnyi osmos i ul'trafil'tratsiya* (Reverse osmosis and ultrafiltration), Moscow: Khimiya, 1978, 352 p.
2. Abonosimov O.A., Lazarev S.I., Alekseev A.A. *Trudy TGTU: Sbornik nauchnykh statei molodykh uchenykh i studentov* (Proceedings TGTU: Collection of scientific papers of young scientists and students), Tambov: Izdatel'stvo Tambovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2000, issue 6, pp. 101-104.
3. Golovashin V.L. *PhD dissertation (Engineering)*, Tambov, 2000, 171 p.
4. Gorbachev A.S. *PhD dissertation (Engineering)*, Tambov, 2006, 196 p.
5. Chepenyak P.A. *PhD dissertation (Engineering)*, Tambov, 2011, 168 p.
6. Kutepov A.M., Polyanin A.D., Zapryanov Z.D., Vyaz'min A.V., Kazenin D.A. *Khimicheskaya gidrodinamika. Spravochnoe posobie* (Chemical hydrodynamics. Reference Guide), Moscow: Kvantum, 1996, 336 p.
7. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* (Handbook of Differential Equations), Moscow: Nauka, 1971, 576 p.
8. Shaposhnik V.A. *Kinetika elektrodializa* (The kinetics of electrodialysis), Voronezh: Izdatel'stvo Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta, 1989, 176 p.
9. Zabolotskii V.I., Nikonenko V.V. *Perenos ionov v membranakh* (Ion transfer membranes), Moscow: Nauka, 1988, 237 p.
10. Mami D.K., Shaposhnikova T.L., Urtenov K.M. *Vestnik Adygeiskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 4: Estestvenno-matematicheskie i tekhnicheskie nauki*, 2010, no. 1, pp. 77-92.
11. Vasin S.I., Filippov A.N. *Colloid Journal*, 2012, vol. 74, no. 1, pp. 12-21.

Mathematische Modell der gemeinsamen Elektromassenübertragung in den Elektrobaromembransystemen

Zusammenfassung: Es ist das mathematische Modell der gemeinsamen Elektromassenübertragung in den Elektrobaromembransystemen aufgrund der Gleichungen der Hydrodynamik, der Gleichungen von Nernst–Planck, die für jede Komponente der Lösung aufgezeichnet sind, der Gleichung von Stefan–Boltzman in der Gleichung des konvektiven Wärmeaustausches, die von den entsprechenden Randbedingungen erweitert sind, entwickelt. Es ist die Lösung der Gleichungen der Hydrodynamik mit der Berücksichtigung der osmotischen und elektroosmotischen Übertragung des Lösungsmittels für die Beianodenmembranen erhalten. Das System der Gleichungen, das die gemeinsamen Elektrowärmemassenübertragung beschreibt, ist von der numerischen Methode gelöst. Es ist die Verteilung der Konzentrationen der ersten und zweiten Komponenten der Lösung nach der Länge und der Höhe des Elektromembrankanals je nach der Dichte des Stromes berechnet. Es ist das Feld der

Temperaturen in dem Elektromembrankanal, wie die Funktion der Dichte des Stromes bestimmt. Die Ergebnisse der numerischen Experimente sind analysiert: Es ist der Einfluss des elektrischen Feldes auf dem Feld der Geschwindigkeiten, des Feldes der Konzentrationen der ersten und zweiten Komponenten, das Feld der Temperaturen betrachtet.

Modèle mathématique du transfert commun de masse électrique et thermique dans les systèmes à électromembranes

Résumé: Est élaboré le modèle mathématique du transfert commun de masse électrique et thermique dans les systèmes à électromembranes à la base des équations de Nernst–Planck écrites pour chaque composant de la solution, les équations de Stefan–Boltzmann et les équations de l'échange thermique complétées par les conditions de limites correspondantes. Est obtenue la solution des équations de l'hydrodynamique compte tenu du transfert osmotique et électroosmotique du dissolvant. Le système des équations est résolu par la méthode numérique. Est défini le champ des températures dans le canal électrobaromembrane. Les résultats des expériences numériques sont analysés.

Автор: *Головашин Владислав Львович* – кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная геометрия и компьютерная графика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: *Гатапова Наталья Цибиковна* – доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой «Технологические процессы, аппараты и техническая безопасность», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».
