УДК 517. 956

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ*

В. П. Грибкова, А. Е. Филиченок

Кафедра «Бизнес-администрирование»,
Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Беларусь;
v.gribkova@gmail.com

Ключевые слова и фразы: асимптотические многочлены; задача теплопроводности; линейные функционалы; полиномы Чебышева; функция Грина.

Аннотация: Решение задачи теплопроводности с переменной границей записано в виде интегральных уравнений типа теплового потенциала. Предложено получать приближенное решение данных уравнений с помощью асимптотических многочленов, основанных на полиномах Чебышева первого рода. Метод удобен тем, что сразу после определения приближенного решения может быть вычислена его реальная погрешность в виде бесконечного ряда, основанного на линейных функционалах. Приведены условия сходимости приближенного решения к точному.

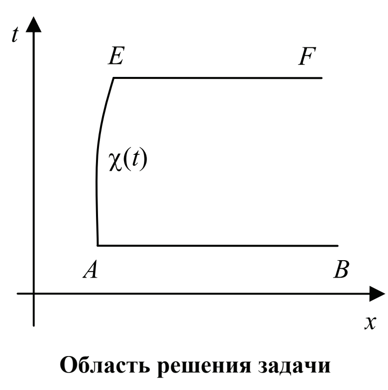
К решению задач типа теплового потенциала с границей, перемещающейся во времени, может быть сведен ряд практически важных задач [1]. Это приводит к решению уравнения теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$ в области между двумя характеристиками $t = AB$, $t = EF$ и условиями на границах $u_{AB} = \varphi(x)$, $u\big|_{x=\chi(t)} = \mu(t)$, $t \geq 0$, $\chi(t) \leq x < \infty$ (рисунок). Решение задачи записывается в виде интегрального уравнения с использованием потенциала двойного слоя

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{\partial G}{\partial \xi}(x,t,\xi,\tau)\bar{\mu}(\tau)d\tau,$$

где $G(x,t,\xi,\tau)$ – функция мгновенного точечного источника

$$G(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right).$$

Данная функция обладает известными свойствами [1]. Ее производная на границе $\chi(t)$ имеет вид



Область решения задачи

* По материалам доклада на конференции ММТТ-2014.

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=\chi(t)} = \frac{x-\chi(\tau)}{2\sqrt{\pi}\left(a^2\left(t-\tau\right)\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\left(x-\chi(\tau)\right)^2}{4a^2\left(t-\tau\right)}\right).$$

В предположении, что $\varphi\left(x\right)=0$ на AB, при $t=0$ выполняется $EF=h$, решение – функция $u(x,t)$ описывается интегральным уравнением с использованием функции мгновенного точечного источника

$$u(x,t)=\int_0^t \frac{x-\chi(\tau)}{\left(a^2\left(t-\tau\right)\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\left(x-\chi(\tau)\right)^2}{4a^2\left(t-\tau\right)}\right)\overline{\mu}\left(\tau\right)d\tau = \int_0^t H\left(x,t,\tau\right)\overline{\mu}(\tau)d\tau, \qquad (1)$$

где функция плотности $\overline{\mu}(t)$ определяется из интегрального уравнения Вольтера второго рода

$$\frac{\overline{\mu}(t)}{2a^2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\chi(t)-\chi(\tau)}{\left(a^2\left(t-\tau\right)\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\left(\chi(t)-\chi(\tau)\right)^2}{4a^2\left(t-\tau\right)}\right)\overline{\mu}\left(\tau\right)d\tau = \mu(t). \qquad (2)$$

Следовательно, $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности с условиями: при $x>\chi(t)$ ограничена для $x\to\infty$ и имеет нулевое начальное значение при любом выборе $\overline{\mu}(t)$ [1]. При $x=\chi(t)$ функция разрывна, и ее предельное значение при $x=\chi(t)+0$ должно быть равно $\mu(t)$. Функция $\chi(t)$ имеет непрерывную ограниченную производную. Уравнения (1) и (2) являются уравнениями с полярными ядрами. Существование решения и его единственность для таких уравнений доказана в работе [1]. Интегральный оператор с полярным ядром $K(x,y)= \;=S(x,y)/\left|x-y\right|^{\alpha}$, $\alpha<n$ является ограниченным [1] и имеет вид

$$\left(K,f\right)(x)=\int_D K(x,y)f(y)dy=\int_D \frac{S(x,y)}{\left|x-y\right|^{\alpha}}f(y)dy.$$

За норму функции принято $\|f\|=\max\limits_{x\in[0;h]}\left|f(x)\right|$, тогда оператор будет ограничен следующим образом

$$\|Kf\|_C \le N\|f\|_C, \text{ при } N=\max_{x\in\overline{D}}\int_D\left|K(x,y)\right|dy.$$

Для вычисления функции $u(x,t)$ (1) можно применить метод асимптотических многочленов, который является одним из методов вырожденного ядра для интегральных уравнений. В общем случае доказательство сходимости для этого метода дано в работе [2].

Для решения задачи (1) необходимо предварительно решить (2). Функция $\overline{\mu}(t)$ приближенно может быть представлена с помощью асимптотического многочлена $Q_n^{\overline{\mu}}(t)$, а ядро $K(t,\tau)$ заменено асимптотическим многочленом $Q_n^K\left((t),\tau\right)$. В дополнительных скобках переменная, по которой происходит аппроксимация,

$$\bar{\mu}(t) \approx Q_n^{\bar{\mu}}(t) = \sum_{i=0}^{n+1}{}^{\parallel} \bar{\mu}_{ni} \pi_i^{(n)}(t), \quad K(t,\tau) \approx Q_n^K\left((t),\tau\right) = \sum_{i=0}^{n+1}{}^{\parallel} K\left(t_{ni},\tau\right) \pi_i^{(n)}(t), \tag{3}$$

где функции $\pi_i^{(n)}(t)$, которые будем называть координатными, имеют вид

$$\pi_i^{(n)}(t) = \left(-1\right)^i \frac{T_n(t) - t_{ni} T_{n+1}(t)}{(n+1)\left(t_{ni} - t\right)},$$

$t_{ni} = \cos\left(\dfrac{i\pi}{n+1}\right)$, $-1 \le t \le 1$, $i = \overline{0, n+1}$, символ «$\parallel$» означает, что слагаемые суммы (3) при $i = 0$ и $i = n+1$ умножаются на 1/2, $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ – полиномы Чебышева первого рода. Все функции $\pi_i^{(n)}(t)$ в каждом случае преобразуются от промежутка $-1 \le t \le 1$ к необходимому для решения промежутку $[0; h]$. Функция $\mu(t)$ заменяется многочленом $\mu(t) \approx Q_n^{\mu}(t) = \sum_{i=0}^{n+1}{}^{\parallel} \mu_{ni} \pi_i^{(n)}(t)$ с известными ординатами μ_{ni}.

Приближенное решение получим после подстановки соотношений (3) в уравнение (2) вместо точного решения

$$\frac{1}{2a^2} \sum_{i=0}^{n+1}{}^{\parallel} \bar{\mu}_{ni} \pi_i^{(n)}(t) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^{n+1}{}^{\parallel} \pi_i^{(n)}(t) \int_0^{t_{ni}} K\left(t_{ni},\tau\right) \sum_{j=0}^{n+1}{}^{\parallel} \bar{\mu}_{ni} \pi_j^{(n)}\left(\tau\right) d\tau = \sum_{i=0}^{n+1}{}^{\parallel} \mu_{ni} \pi_i^{(n)}\left(t\right). \tag{4}$$

Для определения неизвестных ординат $\bar{\mu}_{ni} = \bar{\mu}\left(t_{ni}\right)$ в точках $i = \overline{0, n+1}$, получим систему уравнений $\left(n+2\right)$-го порядка с $n+2$ неизвестными, сравнивая коэффициенты при координатных функциях $\pi_i^{(n)}(t)$ в левой и правой частях равенства (4)

$$\frac{1}{2a^2} \bar{\mu}_{ni} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{n+1}{}^{\parallel} \bar{\mu}_{nj} \int_0^{t_{ni}} K\left(t_{ni},\tau\right) \pi_j^{(n)}(\tau) d\tau = \mu_{ni}, \ i = \overline{0, n+1}. \tag{5}$$

Решение системы (5), в случае бóльших *n,* может быть получено методом последовательных приближений. Единственность решения и сходимость метода последовательных приближений доказаны для всех проекционных методов, к которым относится и данный метод [4].

Приближенное решение уравнения (1) можно определить с помощью многочлена

$$u(x,t) \approx Q_n^u(x,t) = \sum_{i=0}^{n+1}{}^{\parallel} u_{ni}(x,t) \pi_i^{(n)}(t),$$

при этом ядро уравнения (1) аппроксимируется многочленом, имеющим вид $H(x,t,\tau) \approx Q_n^H\left(x,\left(t\right),\tau\right) = \sum_{i=0}^{n+1}{}^{\parallel} H(x,t_{ni},\tau) \pi_i^{(n)}(t)$. Функции $u_{ni}\left(x,t_{ni}\right)$ могут быть вычислены с использованием ординат $\bar{\mu}_{ni}$, $i = \overline{0, n+1}$ из равенства

$$\sum_{i=0}^{n+1}{}^{\parallel} u_{ni}(x,t_{ni})\pi_i^{(n)}(t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1}{}^{\parallel} \pi_i^{(n)}(t) \int_0^{t_{ni}} \frac{x-\chi(\tau)}{\left(a^2\left(t_{ni}-\tau\right)\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\left(x-\chi(t)\right)^2}{4a^2\left(t_{ni}-\tau\right)}\right) \sum_{j=0}^{n+1}{}^{\parallel} \bar{\mu}_{nj}\pi_j^{(n)}(\tau)\,d\tau. \qquad (6)$$

Сравнивая коэффициенты при функциях $\pi_i^{(n)}(t)$ слева и справа в равенстве (6) при заданных значениях x, получим следующие выражения для функций $u_{ni}\left(x,t_{ni}\right)$, $i=\overline{0,n+1}$,

$$u_{ni}(x,t_{ni}) = \sum_{i=0}^{n+1}{}^{\parallel} \bar{\mu}_{nj} \int_0^{t_{ni}} \frac{x-\chi(\tau)}{\left(a^2\left(t_{ni}-\tau\right)\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\left(x-\chi(t)\right)^2}{4a^2\left(t_{ni}-\tau\right)}\right) \pi_j^{(n)}(\tau)\,d\tau. \qquad (7)$$

Сходимость приближенного решения $Q_n^u(x,t)$ к точному $u(x,t)$ вытекает из следующей теоремы.

Теорема. Если функция $\mu(t)$ принадлежит классу Гёльдера, то приближенное решение $Q_n^u(x,t)$ равномерно стремится к точному $u(x,t)$ при $n\to\infty$, то есть выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n^u(x,t) = u(x,t).$

Для *доказательства* сходимости приближенного решения $Q_n^{\bar{\mu}}(t)$ к точному решению $\bar{\mu}(t)$ используются результаты работ [2 – 4], из которых следует, что оценка погрешности уравнения Вольтерра (2)

$$R_n^{\bar{\mu}} = \left\|\bar{\mu} - Q_n^{\bar{\mu}}\right\| \le \exp\left(Nh|\lambda|\right) \sum_{s=n}^{\infty} \left|L_{ns}^{\bar{\mu}}\right| \left\|\psi_{s+1}^{(n)}\right\|, \qquad (8)$$

где λ – коэффициент перед интегралом в уравнении (2); $L_{ns}^{\bar{\mu}}$ – линейные функционалы функции $\bar{\mu}(t)$, которые вычисляются по формуле

$$L_{ns}^{\bar{\mu}} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n+1}{}^{\parallel}(-1)^j \left(\lambda\int_0^{t_j} K\left(t_{nj},\tau\right)\, Q_n^{\bar{\mu}}(\tau)\,d\tau - \mu_{nj}\right) = L_{ns}^K + L_s^{\mu}.$$

Линейные функционалы интегрального оператора $K(t)$ и функции $\mu(t)$ имеют вид

$$L_{ns}^K = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n+1}{}^{\parallel}(-1)^j \left(\lambda\int_0^{t_j} K\left(t_{nj},\tau\right)\, Q_n^{\bar{\mu}}(\tau)\,d\tau\right);$$

$$L_s^{\mu} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n+1}{}^{\parallel}(-1)^j \mu_{nj}.$$

Функции $\psi_{s+1}^{(n)}(x)$ определяются через полиномы Чебышева [2, 3] и легко оцениваются сверху $\left\|\psi_{s+1}^{(n)}\right\| = \max\limits_x \left|\psi_{s+1}^{(n)}(x)\right|$. Многочлены $Q_n^H\left(x,(t),\tau\right)$ и последовательность линейных функционалов $\left\{L_{ns}^{H}(x,\tau)\right\}_{s=n}^{\infty}$ вычисляются при фиксированном значении x

$$L_{ns}^{H}(x,\tau)=\frac{1}{s+1}\sum_{i=0}^{s+1}{}^{\|}(-1)^{i}H(x,t_{ni},\tau),$$

$$L_{ns}^{H}(x)=\int_{0}^{h}\left|L_{ns}^{H}(x,\tau)\right|d\tau,\quad R_{n}^{H}=\sum_{s=n}^{\infty}\left\|\psi_{s+1}^{(n)}\right\|L_{ns}^{H}(x).$$

В результате имеет место неравенство

$$\left\|u(x)-Q_{n}^{u}(x)\right\|\le R_{n}^{H}(x)\left(\left\|Q_{n}^{\bar{\mu}}\right\|+R_{n}^{\bar{\mu}}\right)+\left\|Q_{n}^{H}(x)\right\|R_{n}^{\bar{\mu}},$$

где $\left\|Q_{n}^{H}(x)\right\|=\max\limits_{0\le t\le h}\int_{0}^{h}\left|Q_{n}^{H}(x,(t),\tau)\right|d\tau$. Если функция $\mu(t)$ принадлежит классу Гёльдера, то для ее линейных функционалов L_{s}^{μ}, $s=n,n+1,\ldots$ справедливы неравенства $\left|L_{s}^{\mu}\right|\le c^{\mu}/n^{1+\alpha}$. Для линейных функционалов L_{ns}^{K} аналогичное неравенство удовлетворяется всегда, как для аналитической функции [3, 4]. Тогда, для линейных функционалов $L_{ns}^{\bar{\mu}}$ будет иметь место оценка $\left|L_{ns}^{\bar{\mu}}\right|\le c^{\bar{\mu}}/n^{1+\alpha}$.

Из неравенства (8) следует, что выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty}Q_{n}^{\bar{\mu}}(t)=\bar{\mu}(t)$, тогда будет выполняться $\lim\limits_{n\to\infty}Q_{n}^{u}(x,t)=u(x,t)$. Очевидно, что сходимость приближенного решения $Q_{n}^{u}(x,t)$ к точному $u(x,t)$ существует для всех случаев, когда $\mu(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера.

При определении ординат $\bar{\mu}_{ni}$, $i=\overline{0,n+1}$, из решения системы уравнений (5) необходимо вычислять определенные интегралы

$$\int_{0}^{t_{ni}}K(t_{ni},\tau)\pi_{j}^{(n)}(\tau)d\tau=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t_{ni}}\frac{\chi(t_{ni})-\chi(\tau)}{\left(a^{2}(t_{ni}-\tau)\right)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\left(\chi(t_{ni})-\chi(\tau)\right)^{2}}{4a^{2}(t_{ni}-\tau)}\right)\pi_{j}^{(n)}(\tau)d\tau,$$

а затем, при вычислении ординат $u_{ni}(x,t_{ni})$ приближенного решения $Q_{n}^{u}(x,t)$ из системы уравнений (7), интегралы

$$\int_{0}^{t_{ni}}\frac{x-\chi(\tau)}{\left(a^{2}(t_{ni}-\tau)\right)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\left(x-\chi(t)\right)^{2}}{4a^{2}(t_{ni}-\tau)}\right)\pi_{j}^{(n)}(\tau)d\tau..$$

Данные интегралы невозможно определить с помощью рациональных функций. В таком случае для их приближенного вычисления можно использовать квадратурные формулы, предложенные в работах [2, 5], также основанные на асимптотических многочленах.

Все изложенные алгоритмы достаточно просто реализуются с помощью вычислительной техники. Реальные оценки погрешности могут быть получены сразу после определения приближенного решения с помощью вычисления последовательностей линейных функционалов $\left\{L_{ns}^{\bar{\mu}}\right\}_{s=n}^{\infty}$ и $\left\{L_{ns}^{H}(x)\right\}_{s=n}^{\infty}$ при любом значении x, что является главным выгодным отличием данного метода от всех других, у которых оценки приближенного решения требуют вычисления производных высокого порядка.

Список литературы

1. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 742 с.
2. Грибкова, В. П. Эффективные методы равномерных приближений, основанные на полиномах Чебышева / В. П. Грибкова. – М. : Спутник+, 2013. – 209 с.
3. Этерман, И. И. К вопросу восстановления функции по некоторой характеристической последовательности / И. И. Этерман // Изв. вузов. Математика. – 1966. – № 2 (51). – С. 148 – 157.
4. Габдулхаев, Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач / Б. Г. Габдулхаев. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 234 с.
5. Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. В 2 ч. Ч. 1. Сингулярные интегралы / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2005. – 378 с.

Approximate Solution of Thermal Conductivity Problem with Unstable Boundary

V. P. Gribkova, A. E. Filichenok

Department of "Business Administration",
Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus;
v.gribkova@gmail.com

Key words and phrases: asymptotic polynomial function; Chebyshev polynomial; Green's function; linear functional; problem of thermal conductivity.

Abstract: The solution of the problem of thermal conductivity with unstable boundary is written down in the form of integral equations of the heat potential type. It is offered to get the approximate solution of these equations with the help of asymptotic polynomial functions based on the first genre Chebyshev polynomial. This method is convenient due to the fact that its real estimated faulty proportion can be calculated in the form of infinitive series, based on the linear functionals, immediately after the determination of the approximate solution. The terms of the convergence of the approximate solution with the accurate solution are given. The whole process of calculation is easily realized with the help of computers.

References

1. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (Equations of mathematical physics), Moscow: Nauka, 1977, 742 p.
2. Gribkova V.P. *Effektivnye metody ravnomernykh priblizhenii, osnovannye na polinomakh Chebysheva* (Effective methods of uniform approximations based on Chebyshev polynomials), Moscow: Sputnik+, 2013, 209 p.

3. Eterman I.I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*, 1966, no. 2 (51), pp. 148-157.

4. Gabdulkhaev B.G. *Optimal'nye approksimatsii reshenii lineinykh zadach* (Оптимальные аппроксимации решений линейных задач), Kazan': Izdatel'stvo Kazanskogo universiteta, 1980, 234 p.

5. Boikov I.V. *Priblizhennye metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov. Chast' 1. Singulyarnye integraly* (Approximate methods of calculating singular and hypersingular integrals. In 2 hours. Part 1. Singular integrals), Penza: Izdatel'stvo Penzenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2005, 378 p.

Genäherte Lösung der Aufgabe der Wärmeleitfähigkeit mit der variabelen Grenze

Zusammenfassung: Die Lösung der Aufgabe der Wärmeleitfähigket mit der variabelen Grenze wird in der Form von den Integralgleichungen als das thermische Potential eingeschrieben. Es wird vorgeschlagen, die genäherte Lösung dieser Gleichungen mit Hilfe der asimtotischen Polynome, die auf den Polynomen von Tschebyschew des ersten Geschlechtes gegründet sind, zu bekommen. Die Methode ist davon bequem, dass sofort nach der Bestimmung der genäherten Lösung sein realer Fehler in Form von der unendlichen Reihe ausgerechnet sein kann, die auf den linearen Funktionalen gegründet ist. Es sind die Bedingungen der Konvergenz der genäherten Lösung zum Genauen gebracht. Der ganze Prozess der Berechnung wird mit Hilfe der Rechentechnik leicht realisiert.

Solution approximée du problème de la conductibilité thermique avec une limite instable

Résumé: La solution du problème de la conductibilité thermique avec une limite instable est inscrite en vue des équations intégrales du potentiel thermique. Est proposé de recevoir une solution approximée de ces équations à l'aide des polynoms asymptotiques de premier genre de Chebyshev. La méthode est commode puisque juste après la définition de la solution approximée peut être calculée l'erreur réelle en vue d'une série infinie basée sur les fonctionnelles linéaires. Le processus des calculs est facilement réalisé à l'aide de l'ordinateur.

Авторы: ***Грибкова Валентина Петровна*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Бизнес-администрирование»; ***Филиченок Алла Евгеньевна*** – старший преподаватель кафедры «Бизнес-администрирование», Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Беларусь.

Рецензент: ***Туголуков Евгений Николаевич*** – доктор технических наук, профессор кафедры «Техника и технологии производства нанопродуктов», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».
