

УДК 66.011

УЧЕТ ЗАВИСИМОСТИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ  
ПАРАМЕТРОВ В ОДНОЭТАПНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  $\chi$ -КВАДРАТ\*

И. В. Зайцев, Т. В. Лаптева, Г. М. Островский, Н. Н. Зиятдинов

*Кафедра «Системотехника»,  
ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский  
технологический университет», г. Казань; izaytsev.systech@gmail.com*

**Ключевые слова и фразы:** вероятностные ограничения; гибкость технологических систем; неопределенность исходной информации; одноэтапная задача оптимизации; оптимальное проектирование; оптимизация; учет зависимости неопределенных параметров.

**Аннотация:** Рассмотрен подход, основанный на переходе на независимые случайные величины, для решения одноэтапной задачи оптимизации с вероятностными ограничениями, когда неопределенные параметры имеют взаимную статистическую зависимость. Представлено решение этой задачи с использованием распределения  $\chi$ -квадрат. Предложенный подход позволяет находить оценку решения быстрее, чем ранее разработанный.

---

При проектировании химико-технологических систем (ХТС) необходимо учитывать ряд факторов, таких как изменение коэффициентов теплообмена в теплообменниках, непостоянство состава используемого сырья и прочие. Наиболее зарекомендовавшие себя способы формализации таких задач проектирования – использование постановок одно- и многоэтапных задач оптимизации. Такие задачи позволяют при проектировании ХТС учитывать неопределенность, появляющуюся в результате действия разных неконтролируемых факторов.

Ограничения задачи разделяют на жесткие, которые выполняются безусловно, и мягкие, которые выполняются с некоторой вероятностью или в среднем. Кроме того, задачи оптимизации с учетом неопределенности различаются по виду взаимной статистической зависимости неопределенных параметров: они могут быть независимыми или зависимыми. Ранее рассмотрен подход для решения одноэтапной задачи оптимизации с вероятностными ограничениями (ОЭЗОВ), когда неопределенные параметры имеют взаимную статистическую зависимость, основанный на переходе на независимые случайные величины.

Рассмотрим решение данной задачи, используя распределение  $\chi^2$ . В отличие от подхода [1], он не позволяет уточнять получаемую оценку решения. Подход,

---

\* По материалам доклада на конференции ММТТ-2014.

изложенный в статье, рекомендуется использовать при необходимости получения быстрой оценки решения [1].

Предположим, что ОЭЗОВ имеет вид [2]

$$\min_{x \in X} E_{\theta}[f(x, \theta)], \quad (1)$$

$$\Pr\{g_j(x, \theta) \leq 0\} \geq \alpha_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

где  $x$  – вектор поисковых параметров, включающий конструктивные параметры проектируемой ХТС, а также управляющие переменные;  $\theta$  – вектор неопределенных параметров,  $\theta = \{\theta_i, i = \overline{1, n_{\theta}}\}$ ;  $E_{\theta}[f(x, \theta)]$  – математическое ожидание целевой функции  $f(x, \theta)$  за период эксплуатации ХТС;  $\Pr\{g_j(x, \theta) \leq 0\}$  – вероятность выполнения ограничений  $g_j(x, \theta) \leq 0$ . Неопределенные параметры  $\theta_i$  имеют совместное нормальное распределение  $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ,

$$\rho(\theta) = (2\pi)^{-0,5n_{\theta}} (\det \Lambda)^{-0,5} \exp\{-0,5(\theta - \mu)^T \Lambda^{-1}(\theta - \mu)\}, \quad (3)$$

где  $\mu = \{\mu_i, i = \overline{1, n_{\theta}}\}$ ,  $\Lambda = \{\lambda_{ij}, i, j = \overline{1, n_{\theta}}\}$  – матрица ковариации

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n_{\theta}}\sigma_1\sigma_{n_{\theta}} \\ \rho_{21}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n_{\theta}}\sigma_2\sigma_{n_{\theta}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n_{\theta}1}\sigma_{n_{\theta}}\sigma_1 & \rho_{n_{\theta}2}\sigma_{n_{\theta}}\sigma_2 & \cdots & \sigma_{n_{\theta}}^2 \end{pmatrix}, \quad \rho_{ij}, i, j = \overline{1, n_{\theta}} \text{ – коэффициенты}$$

корреляции.

Рассмотрим случайные переменные

$$y = (\theta - \mu)^T \Lambda^{-1}(\theta - \mu). \quad (4)$$

Известно, что если случайные параметры  $\theta_i$  имеют многомерное нормальное распределение  $N_n(\mu, \Lambda)$ , то случайные переменные  $y$  имеют распределение  $\chi^2$  с  $n_{\theta}$  степенями свободы [3]. Согласно определению функции распределения

$$\text{имеем } \Pr\{y \leq C\} = \int_{-\infty}^C \rho(\theta) d\theta = \chi^2(C).$$

Для каждого параметра  $\alpha$  можем поставить в соответствие  $C$ , удовлетворяющее условно  $\Pr\{y \leq C\} = \alpha$ . Здесь  $C$  является некоторой функцией от  $\alpha$ . Значения такой функции можно найти с использованием таблиц значений распределения  $\chi^2$  [3]. Пусть  $\chi^2(C) = \alpha$ . Тогда имеем

$$\Pr\{y \leq C(\alpha)\} = \alpha. \quad (5)$$

Подставим в (5) выражение для  $y$  из (4) и получим

$$\Pr\{(\theta - \mu)^T \Lambda^{-1}(\theta - \mu) \leq C_{\alpha}\} = \alpha. \quad (6)$$

Введем следующую область  $T_{\alpha_j}$  в виде  $T_{\alpha_j} = \{\theta : (\theta - \mu)^T \Lambda^{-1}(\theta - \mu) \leq C(\alpha_j)\}$ .

В этом случае, согласно (6), вероятностная мера области  $T_{\alpha_j}$  равна  $\alpha_j$ , поэтому ограничение (2) выполняется. В этом случае область  $T_{\alpha_j}$  является областью, ограниченной гиперэллипсоидом  $(\theta - \mu)^T \Lambda^{-1}(\theta - \mu) = C(\alpha_j)$ .

Таким образом, задача (1) принимает вид

$$\bar{f} = \min_y E_{\theta}[f(y, \theta)], \quad \max_{\theta \in T_{\alpha_j}} g_j(y, \theta) \leq 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (7)$$

$$T_{\alpha_j} = \{\theta : (\theta - \mu)^T \Lambda^{-1} (\theta - \mu) \leq C(\alpha_j)\}. \quad (8)$$

Задача (7) в отличие от (1) является задачей с детерминированными ограничениями (8), в которой поисковые параметры являются независимыми случайными величинами. Следовательно, как для задачи полубесконечного программирования, для ее решения можем применить метод, представленный в [2].

#### *Список литературы*

1. Одноэтапная задача вероятностной оптимизации для случая зависимых неопределенных параметров / И. В. Зайцев [и др.] // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-25 : сб. тр. XXV Междунар. науч. конф. : в 10 т., г. Волгоград, 28 – 31 мая 2012 г. / под ред. А. А. Большакова. – Волгоград, Харьков, 2012. – Т. 2. – С. 16–17.

2. Оптимизация химико-технологических процессов с вероятностными ограничениями / Т. В. Лаптева [и др.] // Теорет. основы хим. технологии. – 2010. – Т. 44, № 5. – С. 507 – 515.

3. Cramér, H. *Mathematical Methods of Statistics* / H. Cramér. – Princeton : Princeton University Press, 1999. – 575 p.

---

## **The Dependence of Uncertain Parameters in One-Stage Optimization Problem Using $\chi$ -Squared Distribution**

**I. V. Zaitsev, T. V. Laptev, G. M. Ostrovskiy, N. N. Ziyatdinov**

*Department “Systems Engineering”, Kazan State Technological University,  
Kazan; izaytsev.systech@gmail.com*

**Key words and phrases:** chance constraints; chemical engineering systems flexibility; consideration of uncertainty parameters dependence; one-stage optimization problem; optimal designing; optimization; original data uncertainty.

**Abstract:** When designing optimal chemical and technological systems (CTS) it is necessary to consider the uncertainty in the available information on the CTS. The most reliable ways of formalization of such problems include one- and multiple-stage optimization problems. Earlier we considered an approach of solving one-stage optimization problems with chance constraints and statistically dependent uncertainty parameters. The approach is based on transformation of uncertainty parameters into independent values. In the paper, we consider a solution of such a problem, applying chi-squared distribution. The proposed approach allows finding an evaluation of the solution faster, than the previous one.

#### *References*

1. Zaitsev I.V., Lapteva T.V., Ostrovskii G.M., Ziyatdinov N.N. *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh - MMTT-25* (Mathematical Methods in Engineering and Technology - MMTT-25), Proceedings of the XXV International Conference, 28-31 May 2012, Volgograd, Khar'kov, 2012, vol. 2 of 10, pp. 16-17.

2. Lapteva T.V., Ziyatdinov N.N., Ostrovskii G.M., Pervukhin D.D. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2010, vol. 44, no. 5, pp. 507-515.

3. Cramér H. *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton: Princeton University Press, 1999, 575 p.

---

### **Berücksichtigung der Abhängigkeit der unbestimmten Parameter in der einstufigen Aufgabe der Optimierung mit der Ausnutzung der Verteilung des $\chi$ -Quadrates**

**Zusammenfassung:** Bei der Projektierung der optimalen chemietechnologischen Systeme (ChTS) muss man die Unbestimmtheit in den vorhandenen Informationen über ChTS berücksichtigen. Die am meisten bewährenden Weisen der Formalisierung solcher Aufgaben der Projektierung ist eine Nutzung der Errichtungen der rein- und vielstufigen Aufgaben der Optimierung. Früher ist das Herangehen für die Lösung der einstufigen Aufgabe der Optimierung mit den wahrscheinlichen Beschränkungen, wenn die unbestimmten Parameter die gegenseitige statistische Abhängigkeit haben. Das Herangehen ist auf dem Übergang auf die unabhängigen Zufallsgrößen gegründet. In der gegenwärtigen Arbeit ist die Lösung dieser Aufgabe betrachtet, die Verteilung das Chi-Quadrat verwendend. Das angebotene Herangehen lässt zu, die Einschätzung der Lösung schneller, als früher entwickelt zu finden.

---

### **Enregistrement de la dépendance des paramètres indéfinis dans un problème à une étape de l'optimisation avec l'emploi de la répartition des $\chi$ -carrés**

**Résumé:** Lors de la conception des systèmes chimiques et technologiques (SCT) il faut tenir compte de l'indétermination dans l'information sur SCT. Les moyens les plus recommandés de la formalisation de tels problèmes de la conception c'est l'emploi des position des problèmes d'optimisation à une étape et à plusieurs étapes. Auparavant a été examinée une approche pour la solution du problème d'optimisation à une étape avec les restrictions probables. L'approche est basée sur la transition sur les valeurs occasionnelles indépendantes. Dans le présent article est examiné la solution de ce problème en employant la répartition des  $\chi$ -carrés. L'approche proposée permet de trouver plus vite l'estimation de la solution.

---

**Авторы:** *Зайцев Илья Владимирович* – кандидат технических наук, ассистент кафедры «Системотехника»; *Лаптева Татьяна Владимировна* – кандидат технических наук, доцент кафедры «Системотехника»; *Островский Геннадий Маркович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Системотехника»; *Зиятдинов Надир Низамович* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Системотехника», декан факультета повышения квалификации преподавателей вузов Института дополнительного профессионального образования, ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технологический университет», г. Казань.

**Рецензент:** *Дворецкий Станислав Иванович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Технологии и оборудование пищевых и химических производств», проректор по научно-инновационной деятельности, ФГБОУ ВПО «ТГТУ».