УДК 511

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОЦЕНКАХ ОДНОГО РАДИКАЛА

В. И. Фомин

Кафедра «Прикладная математика и механика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ»; vasiliufomin@bk.ru

Ключевые слова и фразы: касательная к кривой; линейная оценка сверху; линейная оценка снизу; неулучшаемая оценка; секущая к кривой.

Аннотация: Для гёльдеровой нормы в вещественном двумерном пространстве указаны оптимальные линейные оценки относительно координат вектора.

В ряде работ [1 – 3] для $n \geq 2,\ \ 0 < x < y$ предлагаются соотношения вида

$$\varphi(x, y, n) < \sqrt[n]{x^n + y^n} < \psi(x, y, n), \tag{1}$$

где выражения $\varphi(x, y, n),\ \psi(x, y, n)$ линейны по $x,\ y$. В связи с этим возникает вопрос о нахождении оптимальных оценок типа (1), то есть оценок вида (1), не допускающих улучшения на множестве $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y\right\}$.

Теорема. При произвольном фиксированном $n \in \mathbb{R},\ \ n \geq 2,$ для любого $(x, y) \in M$ справедливы оценки

$$\sqrt[n]{x^n + y^n} < \left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right)x + y; \tag{2}$$

$$\sqrt[n]{x^n + y^n} \geq \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4}\right)^{1 - \frac{1}{n}} x + \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4}\right)^{1 - \frac{1}{n}} y, \tag{3}$$

не улучшаемые на множестве M в классе линейных по $x,\ y$ оценок.

Доказательство. Пусть $(x, y) \in M$. Положим

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt[n]{x^n + y^n}},\ \ \beta = \frac{y}{\sqrt[n]{x^n + y^n}}.$$

Заметим, что $(\alpha, \beta) \in L_n$, где $L_n = \left\{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < \mu < \nu < 1,\ \mu^n + \nu^n = 1\right\}$.

Запишем L_n в виде

$$L_n = \left\{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \mu = \cos^{\frac{2}{n}} t,\ \nu = \sin^{\frac{2}{n}} t,\ \frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Кривая L_n является выпуклой, ибо

$$\nu''_{\mu\mu} = -(n-1)\left(\frac{\cos^{1-\frac{2}{n}} t}{\sin^{2-\frac{1}{n}} t}\right)^2 < 0.$$

Пусть F – множество прямых d вида

$$d = \left\{(\mu,\nu) \in \mathbb{R}^2 \middle| p\mu + q\nu = 1;\ p,q \in \mathbb{R};\ p,q > 0\right\}$$

(ниже будет видно, что прямые другого вида можно не рассматривать),

$$d_{++} = \left\{(\mu,\nu) \in \mathbb{R}^2 \middle| p\mu + q\nu > 1\right\};$$

$$d_{-} = \left\{(\mu,\nu) \in \mathbb{R}^2 \middle| p\mu + q\nu \le 1\right\};$$

$$\Omega = \{ d \in F \,|\, L_n \subset d_{++} \};$$

$$W = \{ d \in F \,|\, L_n \subset d_{-} \};$$

$$\kappa = \inf_{d \in \Omega} \sup_{M \in L_n} \rho(M,d);$$

$$\eta = \inf_{d \in W} \sup_{M \in L_n} \rho(M,d),$$

где $\rho(M,d)$ – расстояние от точки M до прямой d.

Заметим, что κ достигается при $d = S$, где S – секущая к кривой L_n, проходящая через граничные точки $A(0;1)$, $B\left(2^{-\frac{1}{n}}; 2^{-\frac{1}{n}}\right)$, соответствующие значениям параметра $t = \frac{\pi}{2}$ и $t = \frac{\pi}{4}$:

$$S = \left\{ (\mu,\nu) \in \mathbb{R}^2 \middle| \left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right)\mu + \nu = 1 \right\}$$

($S \in \Omega$ в силу выпуклости L_n). Величина η достигается при $d = K$, где K – касательная к кривой L_n в точке

$$M\left(\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^{\frac{1}{n}}; \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^{\frac{1}{n}}\right),$$

соответствующей значению параметра $t = \frac{3\pi}{8}$:

$$K = \left\{(\mu,\nu) \in \mathbb{R}^2 \middle| \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^{1-\frac{1}{n}} \mu + \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^{1-\frac{1}{n}} \nu = 1 \right\}$$

($K \in W$ в силу выпуклости L_n).

Так как $(\alpha,\beta)\in L_n$, $S\in\Omega$, то есть $L_n\subset S_{++}$, то $(\alpha,\beta)\in S_{++}$, откуда следует оценка (2). Аналогично, $(\alpha,\beta)\in L_n$, $K\in W$, то есть $L_n\subset K_-$, следовательно, $(\alpha,\beta)\in K_-$, откуда вытекает оценка (3).

Теорема доказана.

Заметим следующее:

1. Из неравенства (3) следует оценка

$$\sqrt[n]{x^n+y^n}>\frac{x+y}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}(y-x). \qquad (4)$$

2. При выполнении условия

$$\frac{y}{x}>\frac{\sqrt{2}+2\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\sqrt{2}-2\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)}$$

оценка (4) сильнее известной оценки [4]

$$\sqrt[n]{x^n+y^n}>\frac{2^{\frac{1}{n}}}{2}(x+y). \qquad (5)$$

3. Оценку (5) можно получить тем же приемом, что и оценку (3).

Действительно, рассмотрим касательную K к кривой L_n в точке $B\left(2^{-\frac{1}{n}};2^{-\frac{1}{n}}\right)$:

$$K=\left\{(\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2\left|\frac{2^{\frac{1}{n}}}{2}\mu+\frac{2^{\frac{1}{n}}}{2}\nu=1\right.\right\}.$$

Заметим, что $K\in W$ в силу выпуклости L_n. Так как $(\alpha,\beta)\in L_n$, $K\in W$, то есть $L_n\subset K_-$, то $(\alpha,\beta)\in K_-$, откуда следует оценка (5).

Список литературы

1. Zeitlin, D. A Note on Fermat's Last Theorem / D. Zeitlin // Fibonacci Quart. – 1978. – Vol. 12. – No. 4. – P. 368 – 402.

2. Meres, L. O Pewnym Oszacowanin Rozwiazan Rownania Fermata / L. Meres // Zesz. nauk PSl. – 1979. – No. 560. – P. 215 – 218.

3. Meres, L. O pewnych nierównosciach zwiazanych z wielkim twierozeniem Fermata / L. Meres // Zesz. nauk PSl. – 1979. – No. 560. – P. 219 – 225.

4. Справочное пособие по математическому анализу. В 2 ч. Ч. 2 / И. И. Ляшко [и др.]. – Киев : Вища школа, 1979. – 736 с.

On Optimal Linear Estimates of One Radical

V. I. Fomin

Department «Applied Mathematics and Mechanics», TSTU;
vasiliufomin@bk.ru

Key words and phrases: lower linear bound; section of curve; tangent of curve; unimprovable bound; upper linear bound.

Abstract: Optimal linear estimates of the components of a vector are given for Holder norm in the real two-dimensional space.

References

1. Zeitlin D. *Fibonacci Quart.*, 1978, vol. 12, no. 4, pp. 368-402.
2. Meres L. *Zesz. nauk PSl.*, 1979, no. 560, pp. 215-218.
3. Meres L. *Zesz. nauk PSl.*, 1979, no. 560, pp. 219-225.
4. Lyashko I.I., Boyarchuk A.K., Gai Ya.G., Golovach G.P. *Spravochnoe posobie po matematicheskomu analizu* (Handbook on mathematical analysis), vol. 2 of 2, Kiev: Vishcha shkola, 1979, 736 p.

Über die optimalen linearen Einschätzungen eines Radikalen

Zusammenfassung: Für die Holdernorm im materiellen zweidimensionalen Raum sind die optimalen linearen Einschätzungen bezüglich der Koordinaten des Vektors angegeben.

Sur les estimations optimales linéaires d'un radical

Résumé: Pour la norme Holder dans un espace réel à deux dimensions sont indiquées les estimations optimales linéaires relativement aux coordonnées du vecteur.

Автор: ***Фомин Василий Ильич*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и механика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: ***Федоров Виктор Александрович*** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Общая физика», ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина», г. Тамбов.
