

УДК 66.012-52

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ
И АППАРАТОВ ПИЩЕВЫХ И ХИМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ
В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ.
ЧАСТЬ 2. ДВУХЭТАПНЫЕ ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМЫ
ИНТЕГРИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ**

Д. С. Дворецкий¹, С. И. Дворецкий¹, Г. М. Островский²

*Кафедра «Технологии и оборудование пищевых и химических производств»,
ФГБОУ ВПО «ТГТУ» (1); topt@topt.tstu.ru;
ОАО «Ордена Трудового Красного Знамени научно-исследовательский физико-
химический институт имени Л. Я. Карпова», г. Москва (2)*

Ключевые слова и фразы: верхняя и нижняя границы; двухэтапная задача оптимизации; метод внешней аппроксимации; нелинейное программирование; пищевые и химические технологии; процессы и аппараты; параметры неопределенности; проектные и регламентные ограничения; система автоматической стабилизации; функция гибкости; целевая функция.

Аннотация: Сформулированы двухэтапные задачи оптимального проектирования гибких (работоспособных) технологических процессов, аппаратов и систем пищевых и химических технологий, формирующих предпосылки эффективного управления и автоматизации. Представлены алгоритмы, основанные на хорошо разработанных методах дифференцируемой оптимизации (методах нелинейного программирования). Дано описание модификации, позволяющей использовать в алгоритме внешней аппроксимации верхнюю и нижнюю границы функции гибкости вместо вычисления самой функции, что приводит к существенному уменьшению вычислительных затрат.

Введение

В статье [1] рассмотрены одноэтапные задачи оптимизации технических систем (ТС) в условиях неопределенности, возникающие при проектировании управляемых технологических процессов, аппаратов и систем пищевых и химических технологий, и алгоритмы их решения. Однако постановки одноэтапных задач оптимизации аппаратов и систем пищевой и химической технологии обладают существенным недостатком, заключающимся в том, что при определении оптимального режима z^* их функционирования на этапе проектирования ТС не учитывается возможность уточнения векторов ξ и, соответственно, режимных переменных z (заданий регуляторам системы автоматической стабилизации (САС)) при эксплуатации ТС пищевых и химических технологий. Такую возможность предоставляют постановки двухэтапных задач оптимизации [2 – 5].

Двухэтапные задачи оптимизации

При формулировке двухэтапных задач оптимизации (ДЭЗО) будем считать: 1) существуют два этапа жизни ТС: проектирования и функционирования; 2) на этапе функционирования ТС возможно измерение (уточнение) неопределенных параметров $\hat{\xi}$ и выбор $z(\hat{\xi})$ – оптимальных режимов функционирования (оптимальных заданий регуляторам САС).

В этом состоит принципиальная разница между двухэтапными и одноэтапными задачами оптимизации. В одноэтапных задачах оптимизации [1–3, 6] переменные a, d, z равноправны в том смысле, что они не изменяются на этапе функционирования ТС. В ДЭЗО возможны два случая: а) переменные a, d по-прежнему постоянны на этапе функционирования ТС, в то время как оптимальные значения режимных переменных z (оптимальные задания регуляторам САС) выбираются в зависимости от уточнения исходных данных для проектирования (неопределенных параметров ξ); б) переменная a и одна часть конструктивных переменных $d^k, k = 1, 2, \dots, k_1$, постоянны на стадии функционирования ТС, в то время как другая часть конструктивных переменных $d^k, k = k_1 + 1, \dots, K$, и режимные переменные z становятся управляющими переменными и могут быть использованы для выполнения проектных и регламентных ограничений в ДЭЗО.

Введем понятие области гибкости ТС. Она состоит из точек области неопределенности Ξ , для которых можно найти такие значения части конструктивных $d^k, k = k_1 + 1, \dots, K$ и режимных z переменных, при которых все проектные и регламентные ограничения – $g_j(a, d, z, \xi) \leq 0, j = \overline{1, m}$, будут выполняться.

Случай 1. На этапе функционирования ТС возможно измерение (уточнение) всех неопределенных параметров $\xi \in \Xi$, при этом проектные и регламентные ограничения задачи оптимизации выполняются безусловно, то есть являются жесткими.

Условие гибкости для ДЭЗО имеет вид

$$\chi_1(a, d) = \max_{\xi \in \Xi} \min_z \max_{j \in J} g_j(a, d, z, \xi) \leq 0.$$

Предположим, что функция плотности распределения вероятности $P(\xi)$ известна. Поскольку на этапе функционирования ТС значение целевой функции оптимизации будет равно

$$C^*(a, d, \xi) = \min_z C(a, d, z, \xi) \Big| g_j(a, d, z, \xi) \leq 0, j = \overline{1, m},$$

то на этапе проектирования ТС можно оценить эффективность ее будущей работы, подсчитав математическое ожидание $M\{\cdot\}$ величины $C^*(a, d, \xi)$

$$M_{\xi} \{C^*(a, d, \xi)\} = \int_{\Xi} C^*(a, d, \xi) P(\xi) d\xi.$$

Эта величина будет использоваться как целевая функция в ДЭЗО.

Предположим, что внутренняя задача интегрированного проектирования $C^*(a, d, \xi) = \min_z C(a, d, z, \xi) \Big| g_j(a, d, z, \xi) \leq 0, j = \overline{1, m}$, имеет решение во всех точках ξ и функция плотности распределения вероятности $P(\xi)$ известна. Тогда можно записать

$$\min_{a, d} \int_{\Xi} \min_z \{C(a, d, z, \xi) \Big| g_j(a, d, z, \xi) \leq 0, j = \overline{1, m}\} P(\xi) d\xi.$$

Поскольку интеграл есть бесконечная сумма, и переменные z , соответствующие различным ξ , независимы друг от друга, то можно изменить порядок операторов интегрирования и минимизации:

$$\min_{a,d} \min_{z(\xi)} \int_{\Xi} C(a, d, z, \xi) P(\xi) d\xi; \quad (1)$$

$$g_j(a, d, z(\xi), \xi) \leq 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad \xi \in \Xi.$$

Так как оптимальное значение z во внутренней ДЭЗО зависит от ξ , то z есть многомерная функция $z(\xi)$. Таким образом, в задаче (1) определяются оптимальные значения векторов a, d и многомерной функции $z(\xi)$, доставляющие минимум функционалу $\int_{\Xi} C(a, d, z(\xi), \xi) P(\xi) d\xi$. Объединяя оба оператора минимизации по a, d и $z(\xi)$, получаем ДЭЗО для случая 1 (ДЭЗО1):

$$\min_{a,d,z(\xi)} \int_{\Xi} C(a, d, z(\xi), \xi) P(\xi) d\xi; \quad (2)$$

$$g_j(a, d, z(\xi), \xi) \leq 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad \xi \in \Xi. \quad (3)$$

Задача (2), (3) имеет бесконечное число ограничений и поисковых переменных (одна многомерная функция $z(\xi)$ эквивалентна бесконечному числу обычных поисковых переменных). Решение задачи (1) или (2), (3) a^*, d^* гарантирует гибкость ТС, так как внутренняя ДЭЗО1 решается во всех точках $\xi \in \Xi$. При этом нельзя гарантировать, что внутренняя задача оптимизации в ДЭЗО

$$C^*(a, d, \xi) = \min_z C(a, d, z, \xi) \Big| g_j(a, d, z, \xi) \leq 0, \quad j = \overline{1, m}$$

имеет решение для каждого $a \in A, d \in D$ и $\xi \in \Xi$. Поэтому задача (1) или (2), (3) должна быть дополнена условием гибкости

$$\chi_1(a, d) = \max_{\xi \in \Xi} \min_z \max_{j \in J} g_j(a, d, z, \xi) \leq 0.$$

В результате получаем другую постановку ДЭЗО1:

$$C_1 = \min_{a,d,z(\xi)} \int_{\Xi} C(a, d, z(\xi), \xi) P(\xi) d\xi;$$

$$g_j(a, d, z(\xi), \xi) \leq 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad \xi \in \Xi;$$

$$\chi_1(a, d) = \max_{\xi \in \Xi} \min_z \max_{j \in J} g_j(a, d, z, \xi) \leq 0.$$

Заменим многомерный интеграл в целевой функции C_1 некоторой конечной суммой с помощью соответствующей квадратурной формулы [7] и бесконечное число ограничений конечным числом ограничений только в аппроксимационных точках $\xi^i (i \in I_1)$. Таким образом, получим дискретный вариант ДЭЗО1:

$$C_1 = \min_{a,d,z^i} \sum_{i \in I_1} \omega_i C(a, d, z^i, \xi^i); \quad (4)$$

$$g_j(a, d, z^i, \xi^i) \leq 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad i \in I_1; \quad (5)$$

$$\chi_1(a, d) = \max_{\xi \in \Xi} \min_z \max_{j \in J} g_j(a, d, z, \xi) \leq 0, \quad (6)$$

где ω_i – весовые коэффициенты.

Используя соотношение $\max_x \varphi(x) \leq 0 \Leftrightarrow \varphi(x) \leq 0, x \in X$, преобразуем (4) – (6) к задаче (4), (5), (7) с бесконечным числом ограничений:

$$C_1 = \min_{a,d,z^i} \sum_{i \in I_1} \omega_i C(a, d, z^i, \xi^i);$$

$$g_j(a, d, z^i, \xi^i) \leq 0, j \in J, i \in I_1;$$

$$h(a, d, \xi) = \min_z \max_{j \in J} g_j(a, d, z, \xi) \leq 0, \xi \in \Xi. \quad (7)$$

Аппроксимационные точки желательно выбирать таким образом, чтобы они попадали в область наиболее вероятных значений, которые параметры ξ могут принимать при функционировании ТС, и достаточно плотно покрывали область Ξ . В некоторых случаях ДЭЗО1 решается без ограничений (7):

$$C_1 = \min_{a,d,z^i} \sum_{i \in I_2} \omega_i C(a, d, z^i, \xi^i);$$

$$g_j(a, d, z^i, \xi^i) \leq 0, j = \overline{1, m}, i \in I_2.$$

Здесь множество индексов I_2 содержит номера аппроксимационных и некоторых дополнительных (критических) точек. Такая постановка задачи оправдана только в случае, когда аппроксимационные точки достаточно плотно покрывают область Ξ .

Данное требование приводит к выбору большого числа аппроксимационных точек даже для сравнительно малой размерности n_ξ вектора ξ . Если число узловых точек по каждой компоненте вектора ξ равно p , то число аппроксимационных точек будет равно p^{n_ξ} , тогда размерность задачи будет равна $n_a + n_d + p^{n_\xi} n_z$. В случае, когда число аппроксимационных точек невелико, использование ограничения $\chi_1(a, d) \leq 0$ совершенно необходимо, поскольку гарантируется выполнение ограничений задачи не только в аппроксимационных точках $\xi^i, i \in I_1$, но и во всех других точках области Ξ .

При оптимальном проектировании в постановке ДЭЗО1 возможно оценить средние потери энергии, связанные с необходимостью выполнения регламентных требований, проектных ограничений и неточности исходной математической модели ТС – $y = \mathfrak{Z}(a, d, z, \xi)$. Пусть a^*, d^* – решение ДЭЗО1, а $z^*(a^*, d^*, \xi)$ – решение внутренней задачи

$$C^*(a, d, \xi) = \min_z C(a, d, z, \xi) \Big| g_j(a, d, z, \xi) \leq 0, j = \overline{1, m}$$

при фиксированных a^*, d^* и параметре ξ . Чтобы поддерживать значение управляющей переменной на уровне $z^*(a^*, d^*, \xi)$ необходимо расходовать энергию. Например, если z_l – температура, то необходимо тепло, чтобы поддерживать температуру z_l^* ; если z_l – расход некоторого потока, то необходима энергия для насоса или компрессора, поддерживающего требуемое значение потока тепло- или хладагента. Таким образом, величина $z^*(a^*, d^*, \xi)$ непосредственно связана с потребляемой энергией. Предположим, что потребляемая энергия пропорциональна величине $z^*(a^*, d^*, \xi)$ с коэффициентом пропорциональности k_i . Тогда

среднее потребление энергии, связанное с реализацией оптимального значения i -й управляющей переменной, будет определяться величиной

$$\bar{I}^* = \int_{\Xi} \sum_{i=1}^{n_z} k_i z_i^*(a^*, d^*, \xi) P(\xi) d\xi.$$

В этом случае можно ввести понятие энергетического коэффициента запаса

$$\eta_E = (\bar{I}^* - I_N) / I_N,$$

где I_N – потребляемая энергия при номинальных значениях неопределенных параметров.

Пусть $[a^*, d^*, z^{i*}]$ – решение задачи (4), (5), (7). Обозначим через S_{Ξ} бесконечное множество точек, содержащихся в области Ξ , и через S_{ap} – множество точек ξ^p , которым соответствуют активные ограничения в точке решения задачи (4), (5), (7): $S_{ap} = \{\xi^p : h(a^*, d^*, \xi^p) = 0, \xi^p \in \Xi\}$.

Будем называть такие точки активными. Из теоремы П.7 [2] следует, что решение $[a^*, d^*, z^{i*}]$ задачи (4), (5), (7) есть решение (локальный минимум) задачи

$$C_1 = \min_{a, d, z^i} \sum_{i \in I_1} \omega_i C(a, d, z^i, \xi^i);$$

$$g_j(a, d, z^i, \xi^i) \leq 0, \quad j \in J, \quad i \in I_1;$$

$$h(a, d, \xi^p) = \min_z \max_{j \in J} g_j(a, d, z, \xi^p) = 0, \quad \xi^p \in S_{ap}.$$

Определим *нижнюю границу* для задачи (4) – (6). Для этого введем некоторое произвольное множество точек $S_2 = \{\xi^l : l \in I_2, \xi^l \in \Xi\}$ из области неопределенности Ξ , где I_2 – множество индексов точек в S_2 . Точки S_2 будем называть критическими.

Рассмотрим задачу

$$C_1^L = \min_{a, d, z^i} \sum_{i \in I_1} \omega_i C(a, d, z^i, \xi^i); \quad (8)$$

$$g_j(a, d, z^i, \xi^i) \leq 0, \quad j \in J, \quad i \in I_1; \quad (9)$$

$$h(a, d, \xi^l) = \min_z \max_{j \in J} g_j(a, d, z, \xi^l) \leq 0, \quad \xi^l \in S_2. \quad (10)$$

Величина C_1^L является нижней границей оптимального значения целевой функции ДЭЗО1 [2]: $C_1^L \leq C_1$. Пусть множество $S_2^{(k+1)}$, где k – номер итерации в конкретном алгоритме, получено добавлением одной или нескольких точек к множеству критических точек $S_2^{(k)}$, тогда $C_1^{L, (k+1)} \geq C_1^{L, (k)}$.

Действительно, так как $S_2^{(k)} \subset S_2^{(k+1)}$, то соотношение $C_1^{L, (k+1)} \geq C_1^{L, (k)}$ следует из теоремы П.1 [2]. Таким образом, добавление точек к исходному множеству критических точек не ухудшает нижнюю границу, а в большинстве случаев ее улучшает.

Если множество критических точек ξ^l , принадлежащих множеству $S_2^{(k)}$, покрывает достаточно плотно область Ξ , то решение задачи (8) – (10) достаточно

близко к решению ДЭЗО1, таким образом $C_1 - C_1^{L,(k)} \leq \varepsilon$, где ε – достаточно малая положительная величина.

Если решение $a^{(k)}, d^{(k)}$ задачи (8)–(10) удовлетворяет условию $\chi_1(a^{(k)}, d^{(k)}) \leq 0$, то $a^{(k)}, d^{(k)}$ есть решение задачи (4)–(6).

Преобразуем задачу (8)–(10), используя теорему П.6 [2]:

$$C_1^L = \min_{a, d, z^i, z^l} \sum_{i \in I_1} \omega_i C(a, d, z^i, \xi^i); \quad (11)$$

$$g_j(a, d, z^i, \xi^i) \leq 0, \quad j \in J, \quad i \in I_1; \quad (12)$$

$$\max_{j \in J} g_j(a, d, z^l, \xi^l) \leq 0, \quad \xi^l \in S_2. \quad (13)$$

В соответствии с теоремой П.3 [2] можно заменить каждое ограничение (13) следующими m ограничениями

$$g_j(a, d, z^l, \xi^l) \leq 0, \quad j \in J, \quad l \in I_2.$$

Тогда задача (11)–(13) примет вид:

$$C_1^L = \min_{a, d, z^i, z^l} \sum_{i \in I_1} \omega_i C(a, d, z^i, \xi^i); \quad (14)$$

$$g_j(a, d, z^i, \xi^i) \leq 0, \quad j \in J, \quad i \in I_1; \quad (15)$$

$$g_j(a, d, z^l, \xi^l) \leq 0, \quad j \in J, \quad \xi^l \in S_2, \quad l \in I_2. \quad (16)$$

Сравним задачи (8)–(10) и (14)–(16). Прямое решение задачи (8)–(10) требует использования методов недифференцируемой оптимизации, так как функция $h(a, d, \xi)$ недифференцируема. В свою очередь, задача (14)–(16) является задачей дифференцируемой оптимизации и для ее решения могут быть использованы высокоэффективные методы нелинейного программирования [8–11].

Приведем алгоритм решения задачи (14)–(16).

Алгоритм 1

Шаг 1. Принимаем $\mu = 1$, число альтернативных типов аппаратного оформления ТС $\mu_{\text{зад}}$, начальное приближение для конструкции ТС $a^{(\mu)}$.

Шаг 2. Положим $\nu = 1$ и зададим начальные значения $d^{(0)}$, множества аппроксимационных $S_0 = \{\xi^i : i \in I_0\}$ и критических $S_2^{(\nu-1)} = \{\xi^i : i \in I_2^{(\nu-1)}\}$ точек, достаточно малое число $\varepsilon > 0$.

Шаг 3. Решаем задачу (14)–(16) для определения нижней границы $C_1^{L,(\nu)}$. Пусть $a^{(\mu)}, d^{(\nu)}, z^i, i \in I$ ($I = I_0 \cup I_2^{(\nu-1)}$) – решение этой задачи.

Шаг 4. Вычисляем значение функции гибкости $\chi_1(a^{(\mu)}, d^{(\nu)})$, то есть решаем задачу $\chi_1(a^{(\mu)}, d^{(\nu)}) = \max_{\xi \in \Xi} \min_z \max_{j \in J} g_j(a^{(\mu)}, d^{(\nu)}, z, \xi) \leq 0$. Пусть $\xi^{(\nu)}$ – решение этой задачи.

Шаг 5. Если $\chi_1(a^{(\mu)}, d^{(\nu)}) \leq 0$, то решение для μ -й конструкции ТС получено и переходим к шагу 6, в противном случае переходим к шагу 7.

Шаг 6. Проверяем выполнение условия «Множество альтернативных типов аппаратного оформления ТС исчерпано?», то есть $\mu \geq \mu_{\text{зад}}$. Если «Да», то получаем окончательное решение $a^* = a^{(\mu)}$, $d^* = d^{(\mu)}$, $z^* = z^{i,(\mu)}$, $i \in I^{(v)}$, и алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае переходим к альтернативному типу аппаратного оформления, то есть увеличиваем число μ на единицу, $\mu = \mu + 1$, и переходим к шагу 2.

Шаг 7. Образуем новое множество критических точек $S_2^{(v+1)}$, добавляя точку $\xi^{(v)}$ к множеству $S_2^{(v)}$: $S_2^{(v+1)} = S_2^{(v)} \cup \{\xi^{(v)}\}$.

Шаг 8. Полагаем $v = v + 1$ и переходим к шагу 2.

Для вычисления значения $\chi_1(a^{(\mu)}, d^{(v)}) = \max_{\xi \in \Xi} \min_z \max_{j \in J} g_j(a^{(\mu)}, d^{(v)}, z, \xi)$

на шаге 4 можно использовать метод ветвей и границ [2, 3] или следующее приближение:

$$\chi_1(a^{(\mu)}, d^{(v)}) = \begin{cases} \chi_1^{U,(v)}, & \text{если } \chi_1^{U,(v)} < 0; \\ \bar{\chi}_1 = \frac{\chi_1^{U,(v)} + \chi_1^{L,(v)}}{2}, & \text{если } \left| \chi_1^{U,(v)} - \chi_1^{L,(v)} \right| < \varepsilon; \\ \chi_1^{L,(v)}, & \text{если } \chi_1^{L,(v)} \geq \varepsilon, \end{cases}$$

где $\chi_1^{U,(v)}$ и $\chi_1^{L,(v)}$ – верхняя и нижняя границы функции гибкости $\chi_1(a, d)$ соответственно. Заметим, что если условие $\chi_1^{U,(v)} \leq 0$ выполняется, то тем более выполняется условие $\chi_1(a^{(\mu)}, d^{(v)}) \leq 0$. Следовательно, если выполняется условие $\chi_1^{U,(v)} \leq 0$, либо условие $\bar{\chi}_1 \leq \varepsilon$, где ε мало, то решение ДЭЗО1 получено.

Описанный алгоритм 1 позволяет использовать только верхнюю и нижнюю границы функции гибкости $\chi_1(a, d)$ вместо вычисления самой этой функции. Это часто приводит к существенному уменьшению вычислительных затрат. Например, если во время вычисления $\chi_1(a, d)$ на v -й итерации получаем $\chi_1^{L,(v)} > 0$, то алгоритм вычисления $\chi_1(a, d)$ заканчивает свою работу и новая критическая точка $\xi^{(v)}$ добавляется к множеству критических точек $S_2^{(v)}$. Вычислительные эксперименты [2, 3] показывают, что либо условие $\chi_1^{U,(v)} \leq 0$, либо условие $\chi_1^{L,(v)} > 0$ часто выполняются на первых трех итерациях процедуры вычисления $\chi_1(a, d)$. В данном случае выполняются только 1–3 итерации метода ветвей и границ вместо проведения полной многошаговой процедуры.

Предположим, что функции $g_j(\hat{a}, d, z, \xi) \leq 0$, $j \in J$ квазивыпуклы по переменным z , ξ и функция $C(\hat{a}, d, z, \xi)$ является совместно выпуклой по переменным d и z при фиксированном типе конструкции \hat{a} . В этом случае множество $S_2^{(v)}$ образуется только из вершин области неопределенности Ξ [4, 5]. Множество $\{\Xi\}$ вершин области Ξ может быть представлено в виде

$\{\Xi\} = S_0 \cup S_2^{(v)} \cup \bar{\Xi}^{(v)}$, где множество $\bar{\Xi}^{(v)}$ содержит вершины области Ξ , не входящие в множество $S_0 \cup S_2^{(v)}$.

На шаге 4 алгоритма максимум функции $h(a, d, \xi)$ на множестве всех вершин, принадлежащих $\bar{\Xi}^{(v)}$, определяется с помощью процедуры перебора. Пусть максимум функции $h(a^{(\mu)}, d^{(v)}, \xi)$ находится в точке $\xi = \xi^{(v)} \in \bar{\Xi}^{(v)}$. Если $h(a^{(\mu)}, d^{(v)}, \xi^{(v)}) \leq 0$, то $h(a^{(\mu)}, d^{(v)}, \xi) \leq 0, \xi \in \bar{\Xi}^{(v)}$. Тогда и $\chi_1(a^{(\mu)}, d^{(v)}) \leq 0$.

Если $h(a^{(\mu)}, d^{(v)}, \xi) > 0$, то

$$\chi_1(a^{(\mu)}, d^{(v)}) = h(a^{(\mu)}, d^{(v)}, \xi^{(v)}) > 0$$

и точка $\xi^{(v)}$ добавляется к множеству $S_2^{(v)}$ на шаге 7.

Случай 2. На этапе функционирования ТС можно определить точные значения неопределенных параметров, при этом все ограничения являются мягкими и должны быть удовлетворены с заданной вероятностью ρ .

В качестве критерия оптимизации в ДЭЗО для случая 2 (ДЭЗО2) будем использовать верхнюю границу α исходной целевой функции $C(a, d, z, \xi)$ [12]:

$$C_2^* = \min_{a, d, z(\xi), \alpha} \alpha; \quad (17)$$

$$\text{Pr}_{\xi} \{g_0 = C(a, d, z(\xi), \xi) - \alpha \leq 0\} \geq \rho_0; \quad (18)$$

$$\text{Pr}_{\xi} \{g_j(a, d, z(\xi), \xi) \leq 0\} \geq \rho_j, \quad j \in J_1, \quad (19)$$

где α – скалярная переменная (зависящая от значений конструктивных переменных); $\text{Pr}_{\xi} \{\bullet\}$ – вероятность выполнения ограничения $\{\bullet\}$; g_0, g_j – функции ограничений; $g_0(a, d, z(\xi), \xi) = C(a, d, z(\xi), \xi)$ – целевая функция (критерий) задачи оптимизации; ρ_0, ρ_j – заданные значения вероятности выполнения ограничений.

Введем обозначения

$$\bar{g}_j(a, d, z, \xi) = \begin{cases} g_j(a, d, z, \xi) - \alpha, & j = 0; \\ g_j(a, d, z, \xi), & j \in J; \end{cases} \quad j \in \bar{J}, \quad \bar{J} = 0 \cup J,$$

и множество $S^{(v)} = \{\xi^i : i \in I^{(v)}\}$ накопления точек ξ , в которых нарушаются ограничения (18), (19). Кроме того, в алгоритме используем вспомогательную задачу нелинейного программирования вида:

$$C_2^*(a, d, z^i, \xi) = \min_{a, d, z^i, \alpha} \alpha; \\ \bar{g}_j(a, d, z^i, \xi^i) \leq 0, \quad j \in \bar{J}, \quad i \in I^{(v)}.$$

Решение этой задачи заключается в нахождении типа аппаратного оформления ТС a^* , значений векторов конструктивных d^* и режимных (заданий регулятором САС) переменных z^{i*} , при которых достигается минимальное значение скалярной переменной α в случае выполнения всех ограничений вспомогательной задачи в заданном наборе точек $\xi^i, i \in I^{(v)}$.

Алгоритм 2

Шаг 1. Принимаем $\mu = 1$, число альтернативных типов аппаратурного оформления ТС $\mu_{\text{зад}}$, начальное приближение для конструкции ТС $a^{(\mu)}$.

Шаг 2. Принимаем $\nu = 1$, задаем начальное множество $S^{(\nu-1)} = \{\xi^i : i \in I^{(\nu-1)}\}$ из условия наилучшей аппроксимации функций $z(\xi)$ и начальные приближения $d^{(\nu-1)}, z^{i,(\nu-1)}, \xi^i, i \in I^{(\nu-1)}$.

Шаг 3. Решаем вспомогательную задачу

$$I(a^{(\mu)}, d^{(\nu)}, z^{i,(\nu)}, \xi) = \min_{a, d, z^i, \alpha} \alpha;$$
$$\bar{g}_j(a^{(\mu)}, d, z^i, \xi^i) \leq 0, \quad j \in \bar{J}, \quad i \in I^{(\nu-1)};$$

и пусть $a^{(\mu)}, d^{(\nu)}, z^{i,(\nu)}$ есть решение этой задачи.

Шаг 4. Вычисляем

$$\text{Pr}_{\xi} \{ \bar{g}_j(a, d, z(\xi), \xi) \leq 0 \} \geq \rho_j, \quad j \in J_1. \quad (20)$$

Для аппроксимации функции $z = z(\xi)$ будем использовать значения этих функций в дискретных точках $\xi^i, i \in I^{(\nu-1)}$.

Если условие (20) выполняется, то переходим к шагу 6, в противном случае – к шагу 5.

Шаг 5. Вычисляем значение функции гибкости ТС $a^{(\mu)}, d^{(\nu)}$

$$\chi_2(a^{(\mu)}, d^{(\nu)}) = \max_{\xi \in \Xi} \min_z \max_{j \in \bar{J}} \bar{g}_j(a^{(\mu)}, d^{(\nu)}, \alpha^{(\nu)}, z, \xi), \quad (21)$$

с использованием алгоритма внешней аппроксимации [2].

Обозначим через $\bar{\xi}^{(\nu)}$ решение задачи (21) и дополним точкой $\bar{\xi}^{(\nu)}$ множество точек $S^{(\nu-1)}$, в которых нарушаются мягкие ограничения (20):

$$S^{(\nu)} = S^{(\nu-1)} \cup \bar{\xi}^{(\nu)}, \quad I^{(\nu)} = I^{(\nu-1)} \cup (n+1).$$

Увеличиваем число критических точек n на 1, то есть $n = n+1$, и переходим к шагу 3.

Шаг 6. Решение для μ -го типа конструкции ТС получено $a^{(\mu)}, d^{(\mu)} = d^{(\nu)}, z^{(\mu)} = z^{i,(\nu)}$.

Шаг 7. Проверяем выполнение условия «Множество альтернативных типов аппаратурного оформления ТС исчерпано?», то есть $\mu \geq \mu_{\text{зад}}$. Если «Да», то получаем окончательное решение $a^* = a^{(\mu)}, d^* = d^{(\mu)}, z^* = z^{i,(\mu)}(\xi^i), i \in I^{(\nu)}$, и алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае переходим к альтернативному типу аппаратурного оформления, то есть увеличиваем число μ на единицу, $\mu = \mu + 1$, и переходим к шагу 2.

Дадим некоторые пояснения алгоритму 2. На шаге 4 осуществляется многомерная интерполяция с помощью функций $z = z(\xi)$ по известным дискретным точкам $\xi^i, z^i, i \in I^{(\nu)}$. Это можно сделать с помощью многомерных кубических сплайнов или с использованием процедуры приближенной аппроксимации, суть

которой заключается в следующем. При реализации математической модели для каждого полученного случайного значения ξ в качестве соответствующего $z(\xi)$ берем значение $z^l(\xi^l)$, $l \in I^{(v)}$, которое соответствует точке ξ^i , наиболее близкой к точке ξ , то есть

$$r^i(\xi, \xi^i) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_\xi} (\xi_j - \xi_j^i)^2}, \quad i \in I^{(v)}, \quad n_\xi = \dim \xi;$$

$$\xi^l = \min_{i \in I^{(v)}} r^i(\xi, \xi^i) \Rightarrow l = \arg \min_{i \in I^{(v)}} r^i(\xi, \xi^i).$$

Фактически в описанной процедуре используется кусочно-постоянная аппроксимация функций $z = z(\xi)$.

На шаге 5 неравенство $\chi_2(a^{(u)}, d^{(v)}) \leq 0$ означает, что мягкие ограничения выполняются с вероятностью, равной 1. Поэтому, если не выполняется условие (20), то заведомо не выполняется условие $\chi_2(a^{(u)}, d^{(v)}) \leq 0$ и, следовательно, получаем точку $\bar{\xi}^{(k)}$, в которой нарушаются мягкие ограничения.

При использовании дополнительной переменной α проводим масштабирование поисковых переменных, чтобы диапазоны их изменения были примерно одинаковы.

Случай 3. На этапе функционирования ТС можно определить точные значения неопределенных параметров, при этом имеются смешанные ограничения: ограничения с номерами $j \in J_1 = \{1, \dots, m_1\}$ являются мягкими, а ограничения с номерами $j \in J_2 = \{m_1 + 1, \dots, m\}$ – жесткими и должны быть удовлетворены с заданной вероятностью ρ .

В качестве критерия оптимизации ДЭЗО для случая 3 (ДЭЗОЗ), так же как и для случая 2, будем использовать верхнюю границу α исходной целевой функции $C(a, d, z, \xi)$ [12]:

$$C_3^* = \min_{a, d, z(\xi), \alpha} \alpha; \quad (22)$$

$$\Pr_{\xi} \{g_0 = C(a, d, z(\xi), \xi) - \alpha \leq 0\} \geq \rho_0; \quad (23)$$

$$\Pr_{\xi} \{g_j(a, d, z(\xi), \xi) \leq 0\} \geq \rho_j, \quad j \in J_1; \quad (24)$$

$$\chi_1(a, d, J_2) = \max_{\xi \in \Xi} \min_z \max_{j \in J_2} g_j(a, d, z, \xi) \leq 0, \quad (25)$$

где $\chi_1(d)$ – функция гибкости ТС.

Введем обозначения

$$\bar{g}_j(a, d, z, \xi) = \begin{cases} g_j(a, d, z, \xi) - \alpha, & j = 0; \\ g_j(a, d, z, \xi), & j \in J_1; \end{cases} \quad j \in \bar{J}_1, \quad \bar{J}_1 = 0 \cup J_1,$$

и множество $S^{(v)} = \{\xi^i : i \in I^{(v)}\}$ накопления точек ξ с индексами $i \in I^{(v)}$, в которых нарушаются ограничения (24) – (25), причем во множестве точек $S_1^{(v)}$ будут накапливаться точки, в которых нарушаются мягкие ограничения, а во множестве $S_2^{(v)}$ – жесткие.

Кроме того, в алгоритме используем вспомогательную задачу нелинейного программирования вида:

$$I^*(a, d, z^i, \xi) = \min_{a, d, z^i, \alpha} \alpha,$$

$$\bar{g}_j(a, d, z^i, \xi^i) \leq 0, \quad j \in \bar{J}_1, \quad i \in I^{(v)},$$

$$g_j(a, d, z^i, \xi^i) \leq 0, \quad j \in J_2, \quad i \in I^{(v)}.$$

Алгоритм 3

Шаг 1. Принимаем $\mu = 1$, число альтернативных типов аппаратного оформления ТС $\mu_{\text{зад}}$, начальное приближение для конструкции ТС $a^{(\mu)}$.

Шаг 2. Принимаем $v = 1$, задаем начальные множества $S^{(v-1)} = S_1^{(v-1)} + S_2^{(v-1)}$, $I^{(v-1)}$ из условия наилучшей аппроксимации функций $z(\xi)$, число n номеров точек ξ^i , $i \in I^{(v-1)}$ и начальные приближения $d^{(v-1)}$, $z^{i, (v-1)}$, $i \in I^{(v-1)}$.

Шаг 3. Решаем вспомогательную задачу

$$C(a^{(\mu)}, d^{(v)}, z^{i(v)}, \xi) = \min_{a, d, z^i, \alpha} \alpha,$$

$$\bar{g}_j(a^{(\mu)}, d, z^i, \xi^i) \leq 0, \quad j \in \bar{J}_1, \quad i \in I^{(v-1)},$$

$$g_j(a^{(\mu)}, d, z^i, \xi^i) \leq 0, \quad j \in J_2, \quad i \in I^{(v-1)},$$

и пусть $a^{(\mu)}$, $d^{(v)}$ есть решение этой задачи.

Шаг 4. Вычисляем

$$\chi_1(a^{(\mu)}, d^{(v)}) = \max_{\xi \in \Xi} \min_z \max_{j \in J_2} g_j(a^{(\mu)}, d^{(v)}, z, \xi) \quad (26)$$

с использованием алгоритма внешней аппроксимации [2]. Обозначим через $\bar{\xi}^{(v)}$ решение задачи (26) и проверяем выполнение условия

$$\chi_1(a^{(\mu)}, d^{(v)}) \leq 0 \quad (27)$$

в точке решения $\bar{\xi}^{(v)}$ задачи (26). Если условие (27) не выполняется, то переходим к шагу 5, в противном случае – к шагу 6.

Шаг 5. Дополним множество точек $S_2^{(v)}$, в которых нарушаются ограничения (27), точкой $\bar{\xi}^{(v)}$, то есть $S_2^{(v)} = S_2^{(v-1)} \cup \bar{\xi}^{(v)}$, $I_1^{(v)} = I_1^{(v-1)} \cup (n+1)$, увеличиваем число критических точек n на 1, $n = n+1$, $p = B_1$ и переходим к шагу 9.

Шаг 6. Проверяем выполнение мягких (вероятностных) ограничений

$$\text{Pr}_{\xi} \left\{ \bar{g}_j(a^{(\mu)}, d^{(v)}, z(\xi), \xi) \leq 0 \right\} \geq p_j, \quad j \in J_1. \quad (28)$$

Для аппроксимации функции $z = z(\xi)$ будем использовать значения этих функций в дискретных точках ξ^i , $i \in I^{(v-1)}$.

Если условие (27) выполняется, а (28) не выполняется, то переходим к шагу 8.

Если условия (27), (28) выполняются, то решение для заданного типа аппаратного оформления найдено $a^{(\mu)}$, $d^{(\mu)} = d^{(v)}$, $z^{(\mu)} = z^{i, (v)}$.

Шаг 7. Проверяем выполнение условия «Множество альтернативных типов аппаратурного оформления ТС исчерпано?», то есть $\mu \geq \mu_{\text{зад}}$. Если «Да», то получаем окончательное решение $a^* = a^{(\mu)}$, $d^* = d^{(\mu)}$, $z^* = z^{i,(\mu)}$, $i \in I^{(v)}$, и алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае переходим к альтернативному типу аппаратурного оформления, то есть увеличиваем число μ на единицу и переходим к шагу 2.

Шаг 8. Вычисляем

$$\chi_2(a^{(\mu)}, d^{(v)}) = \max_{\xi \in \Xi} \min_z \max_{j \in J_1} \bar{g}_j(a^{(\mu)}, d^{(v)}, \alpha^{(v)}, z, \xi), \quad (29)$$

где $\bar{J}_1 = (0, 1, 2, \dots, m_1)$, с использованием алгоритма внешней аппроксимации [2].

Обозначим через $\bar{\xi}^{(v)}$ решение задачи (29) и дополним точкой $\bar{\xi}^{(v)}$ множество точек $S_1^{(v)}$, в которых нарушаются мягкие ограничения (28), то есть $S_1^{(v)} = S_1^{(v-1)} \cup \bar{\xi}^{(v)}$, $I_2^{(v)} = I_2^{(v-1)} \cup (n+1)$, $p = B_2$ и увеличиваем число критических точек n на 1, $n = n+1$.

Шаг 9. Если $p = B_1$, то переобозначим множества $S_2^{(v-1)}$, $I_2^{(v-1)}$, то есть $S_2^{(v)} = S_2^{(v-1)}$, $I_2^{(v)} = I_2^{(v-1)}$, если $p = B_2$, то $S_1^{(v)} = S_1^{(v-1)}$, $I_1^{(v)} = I_1^{(v-1)}$. Сформируем множества $S^{(v)} = S_1^{(v)} \cup S_2^{(v)}$, $I^{(v)} = I_1^{(v)} \cup I_2^{(v)}$, присвоим числу итераций v значение $v+1$ и переходим к шагу 3.

Результаты решения задачи (22) – (25) в соответствии с методологией интегрированного проектирования используются при определении оптимальных значений конструктивных параметров a^* , d^* ТС и оптимальных заданий $z^*(\hat{\xi})$ регуляторам САС автоматизированного комплекса «ТС-САУ» в зависимости от уточнения (измерения) $\hat{\xi}$ вектора неопределенных параметров ξ .

Заключение

В настоящей работе получили дальнейшее развитие методы и алгоритмы решения двухэтапных задач стохастической оптимизации с «мягкими» (вероятностными) и смешанными ограничениями, возникающими при аппаратурно-технологическом оформлении промышленных энерго- и ресурсосберегающих гибких автоматизированных ТС пищевых и химических технологий в условиях неопределенности.

Однако, несмотря на известные достижения в теории интегрированного проектирования гибких автоматизированных ТС пищевых и химических технологий, остается немало проблем, связанных с экономичным вычислением математического ожидания (многомерного интеграла) в двухэтапных задачах оптимизации; разработкой новых быстродействующих методов и алгоритмов решения двухэтапных задач при интегрированном проектировании ТС и задач планирования в условиях неопределенности; обеспечением устойчивости, надежности и робастности ТС и др. Эти вопросы требуют скорейшего разрешения, и молодые ученые, аспиранты и студенты должны включиться в исследовательский процесс и внести свой вклад в разработку теоретических основ интегрированного проектирования энерго- и ресурсосберегающих гибких автоматизированных ТС пищевых и химических производств.

Список литературы

1. Проектирование управляемых процессов и аппаратов пищевых и химических технологий в условиях неопределенности. Часть 1. Одноэтапные задачи и алгоритмы интегрированного проектирования / Д. С. Дворецкий, С. И. Дворецкий, Г. М. Островский // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 66 – 85.
2. Островский, Г. М. Технические системы в условиях неопределенности: анализ гибкости и оптимизации / Г. М. Островский, Ю. М. Волин. – М. : БИНОМ, Лаборатория знаний, 2008. – 319 с.
3. Дворецкий, Д. С. Новые подходы к проектированию химико-технологических процессов, аппаратов и систем в условиях интервальной неопределенности / Д. С. Дворецкий, С. И. Дворецкий, Г. М. Островский. – М. : Спектр, 2012. – 344 с.
4. Halemane, K. R. Optimal Process Design under Uncertainty / K. R. Halemane, I. E. Grossmann // AIChE Journal. – 1983. – Vol. 29. – P. 425 – 433.
5. Biegler, L. T. Systematic Methods of Chemical Process Design / L. T. Biegler, I. E. Grossmann, A.W. Westerberg. – Upper Saddle River, New Jersey : Prentice Hall, 1997. – 796 p.
6. Бодров, В. И. Оптимальное проектирование энерго- и ресурсосберегающих процессов и аппаратов химической технологии / В. И. Бодров, С. И. Дворецкий, Д. С. Дворецкий // Теорет. основы хим. технологии. – 1997. – Т. 31, № 5. – С. 542 – 548.
7. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : БИНОМ. Лаб. знаний, 2008. – 636 с.
8. Реклейтис, Г. Оптимизация в технике : пер. с англ. : в 2 кн. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсел. – М. : Мир, 1986. – 2 кн.
9. Гилл, Ф. Практическая оптимизация : пер. с англ. / Ф. Гилл, У. Моррей, М. Райт. – М. : Мир, 1985. – 509 с.
10. Поляк, Б. Т. Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. – М. : Наука, 1983. – 384 с.
11. Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М. : Мир, 1975. – 534 с.
12. Новые подходы к интегрированному синтезу гибких автоматизированных химико-технологических систем / Д. С. Дворецкий, С. И. Дворецкий, С. В. Мищенко, Г. М. Островский // Теорет. основы хим. технологии. – 2010. – Т. 44, № 1. – С. 69 – 77.

Design of Controlled Processes and Devices of Food and Chemical Technologies under Uncertainty. Part 2. Two-Stage Problems and Algorithms of Integrated Design

D. S. Dvoretzkiy¹, S. I. Dvoretzkiy¹, G. M. Ostrovskiy²

*Department "Technology and Equipment of Food
and Chemical Industries", TSTU (1); topt@topt.tstu.ru;
Karpov Institute of Physical Chemistry, Moscow (2)*

Key words and phrases: automatic stabilization system; design and process constraints; flexibility function; food and chemical technologies; goal function; nonlinear programming; outer approximation method; processes and apparatus; two stage optimization; uncertain parameters; upper and lower bounds.

Abstract: Two-stage problems of optimal design of flexible (workable) engineering processes, apparatus and systems of food and chemical industry, with the prerequisites for efficient control and automation, are formulated. The algorithms based on the methods of differentiated optimization (nonlinear programming methods) are developed. The paper describes a modification of the outer approximation algorithm that allows implementing upper and lower bounds of the flexibility function instead of computing the function itself, which significantly decreases computation costs.

References

1. Dvoretzkiy D.S., Dvoretzkiy S.I., Ostrovskiy G.M. *Transactions of the Tambov State Technical University*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 66-85.
2. Ostrovskii G.M., Volin Yu.M. *Tekhnicheskie sistemy v usloviyakh neopredelennosti: analiz gibkosti i optimizatsii* (Technical systems under uncertainty: flexibility analysis and optimization), Moscow: BINOM, Laboratoriya znanii, 2008, 319 p.
3. Dvoretzkiy D.S., Dvoretzkiy S.I., Ostrovskii G.M. *Novye podkhody k proektirovaniyu khimiko-tehnologicheskikh protsessov, apparatov i sistem v usloviyakh interval'noi neopredelennosti* (New approaches to the design of chemical processes, devices and systems under interval uncertainty), Moscow: Spektr, 2012, 344 p.
4. Halemane K.R., Grossmann I.E. *AIChE Journal*, 1983, vol. 29, pp. 425-433.
5. Biegler L.T., Grossmann I.E., Westerberg A.W. *Systematic methods of chemical process design*, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1997, 796 p.
6. Bodrov V.I., Dvoretzkiy S.I., Dvoretzkiy D.S. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 1997, vol. 31, no. 5, pp. 494-499.
7. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennye metody* (Numerical Methods), Moscow: BINOM. Laboratoriya znanii, 2008, 636 p.
8. Ravindran A., Ragsdell K.M., Reklaitis G.V. *Engineering Optimization: Methods and Applications*, 2nd edition, Hoboken, New Jersey, John Wiley & Sons, 2006, 688 p.
9. Gill P.E., Murray W., Wright M.H. *Practical optimization*, London, Academic Press, 1981, 401 p.
10. Polyak B.T. *Vvedenie v optimizatsiyu* (Introduction to Optimization), Moscow: Nauka, 1983, 384 p.
11. Himmelblau, D.M. *Applied Nonlinear Programming*. New York: McGraw-Hill, 1972.
12. Dvoretzkiy D.S., Dvoretzkiy S.I., Mishchenko S.V., Ostrovskiy G.M. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2010, vol. 44, no. 1, pp. 67-75.

Projektierung der gesteuerten Prozesse und der Apparate der Nahrungs- und chemischen Technologien unter den Bedingungen der Unbestimmtheit. Teil 2. Zweietappenaufgaben und Algorithmen der integrierten Projektierung

Zusammenfassung: Es sind die Zweietappenaufgaben der optimalen Projektierung der flexiblen (arbeitsfähigen) technologischen Prozesse, der Apparate und der Systeme der Nahrungs- und Chemischtechnologien, die die Vorbedingungen der wirksamen Verwaltung und der Automatisierung bilden, formuliert. Es sind die Algorithmen entwickelt, die auf den gut entwickelten Methoden der differenzierten Optimierung gegründet sind (die Methoden des nichtlinearen Programmierens). Es ist die Modifikation beschrieben, die im Algorithmus der äußerlichen Approximation die oberen und unteren Grenzen der Funktion der Flexibilität anstelle der Berechnung der Funktion zu verwenden zulässt, was zur wesentlichen Verkleinerung der Rechenaufwände bringt.

**Conception des processus et appareils des technologies alimentaires
et chimiques commandés dans les conditions de l'indétermineté.
2-ème partie. Problèmes à deux étapes et algorithmes
de la conception intégrée**

Résumé: Sont formulés les problèmes à deux étapes de la conception optimal des processus techniques, des appareils et des systèmes flexibles des technologies alimentaires et chimiques formant des conditions pour une commande efficace et pour l'automatisation. Sont élaborés les algorithmes fondés sur les méthodes de l'optimisation différentielle (méthodes de la programmation non linéaire). Est décrite la modification qui aboutit à la diminution considérable des dépenses.

Авторы: *Дворецкий Дмитрий Станиславович* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Технологии и оборудование пищевых и химических производств»; *Дворецкий Станислав Иванович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Технологии и оборудование пищевых и химических производств», проректор по научно-инновационной деятельности, ФГБОУ ВПО «ТГТУ»; *Островский Геннадий Маркович* – старший научный сотрудник, ОАО «Ордена Трудового Красного Знамени научно-исследовательский физико-химический институт имени Л. Я. Карпова», г. Москва.

Рецензент: *Матвейкин Валерий Григорьевич* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Информационные процессы и управление»; ФГБОУ ВПО «ТГТУ».
