

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ

И. А. Щербатов, И. О. Проталинский

*Кафедра «Автоматика и управление», ФГБОУ ВПО «Астраханский  
государственный технический университет», г. Астрахань;  
sherbatov2004@mail.ru*

**Ключевые слова и фразы:** компонента; математическая модель; робот; сложная слабоформализуемая система.

**Аннотация:** Рассматриваемый класс сложных систем – многокомпонентные слабоформализуемые системы, функционирующие в условиях различных типов неопределенности, требует разработки специфицированного подхода для целей математического моделирования. Разработан подход к моделированию указанного класса систем, основанный на ряде постулатов, обеспечивающих реализацию различных типов математических моделей совместно с вопросами их адекватности. Введен терминологический базис, на основе которого строится концепция математического моделирования сложных многокомпонентных слабоформализуемых систем, состоящая из девяти этапов. Приведено описание Э-компонентного подхода, обеспечивающего решение поставленной задачи разработки концепции моделирования. Показан пример математического описания компонент сложной системы группового управления роботами для достижения множества взаимосвязанных локальных целей. Проверена адекватность полученной математической модели.

---

### Введение

Вопросам математического [1] и имитационного моделирования сложных систем [2] посвящено значительное число работ. Расширение сфер применения сложных систем [3], функционирующих в условиях неопределенности [4] требует рассмотрения и модификации классического подхода к математическому моделированию, накладывающему существенные ограничения на анализ и синтез систем управления ими.

В работе [5] введено понятие сложных слабоформализуемых многокомпонентных систем (МС), функционирующих в условиях неопределенности [4]. Теоретико-множественное представление указанного класса сложных систем реализовано также в источнике [5]. Однако крайне актуальной остается проблема разработки концептуальных основ математического моделирования МС и ее практической реализации для построения моделей различных типов компонентных структур.

В этой связи необходимо разработать модифицированный подход к моделированию МС, функционирующих в условиях неопределенности. Для этой цели введем ряд определений, образующих терминологический базис рассматриваемой предметной области.

*Слабоформализуемая система* – система, в которой часть параметров не может быть измерена (ввиду отсутствия средств или методов измерения) и отсутст-

вует возможность математического описания традиционными методами (из-за сложности или слабой изученности) [6].

*Сложная система* – система, в модели которой не хватает информации для эффективного управления [7].

*Компонента* – множество элементов сложной слабоформализуемой системы, образующих единую структуру элементов для достижения некоторой локальной цели в процессе ее функционирования [5].

*Сложная слабоформализуемая многокомпонентная техническая система S* – это сложная система, обладающая свойствами развитой уровневой псевдоиерархичности, слабой формализуемости, множественности математического описания, функционирующая в условиях неопределенности и синергетического эффекта, образованная ограниченным множеством компонент  $S = \{K1, K2, \dots, K1\}$  [5].

*Компонентная структура (КС)* – набор компонент, образованный под воздействием механизмов формирования структурной организации на основе единства локальной цели, типа неопределенности, а также однородности информационных связей между компонентами.

*Интеллектуальная математическая модель (ИММ)* – модель, имеющая универсальный характер, функционирующая в условиях реального времени и основанная на принципах интеллектуальной деятельности человека [6].

*Гибридная математическая модель (ГММ)* – модель, сочетающая в себе, наряду с аналитическим описанием параметров сложной системы и их связей, также качественные описания, формализованные с помощью методологии искусственного интеллекта.

### **Концепция математического моделирования МС**

Разработка концепции математического моделирования – сложная задача, слабо поддающаяся алгоритмизации, однако, существует возможность выделить ряд ключевых этапов, наличие которых является обязательным при построении моделей МС.

Построение модели МС основано на принципе множественности описания концепции системного анализа МС, представленного в работе [8]. Моделирование МС зависит от выбора типа модели компоненты. Проверка адекватности модели МС и оценка ее чувствительности [8] проводится с применением подробно описанных и широко применяемых методов на основе экспериментальных данных. Концепция математического моделирования МС может быть представлена последовательностью этапов (рис. 1): проведение анализа МС [8]; определение компонент МС в соответствии с целью системного анализа и управления; графическая реализация компонентных структур с применением семантических сетей [9], диаграмм взаимного влияния факторов [6], когнитивных моделей [10], фреймов [11] и пр.; выделение глобальной цели МС; выделение локальных целей компонент; построение математической модели компоненты; формирование набора компонентных структур (КС) [8]; построение математической модели МС; оценка адекватности, проверка чувствительности и работоспособности математической модели МС.

В рамках *этапа 1* определяются исходные данные анализа, критерии оценки результатов и качества выполнения, анализируется необходимость привлечения сторонних экспертов для проведения анализа в соответствии с системным подходом. Кроме того, проводится анализ всех типов неопределенностей [4], осуществляется выбор способов и методов устранения неопределенностей, последовательность действий, которая приведет к успешному достижению требуемых выходных показателей с заданным качеством. После этого производится поиск возможных ошибок и устранение трудностей, возникших в процессе системного анализа.

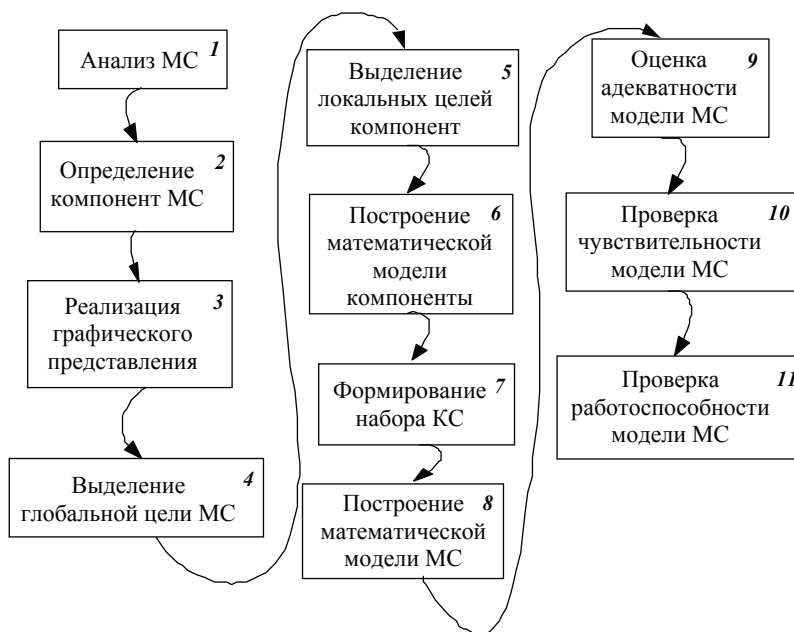


Рис. 1. Концепция математического моделирования МС

На *этапе 2* МС представляется как набор компонент и их взаимосвязей. Крайне важной на этом этапе является задача выбора системы допущений и упрощений. Систему допущений при этом можно разделить на два уровня: допущения, влияющие на модель в целом, и допущения, принимаемые для каждого параметра или связи. Выделяется два типа компонент [5]: *пассивная компонента* – техническая компонента, не обладающая признаками интеллектуальности; *активная компонента* – компонента, обладающая рациональными поведенческими признаками в условиях неопределенности.

*Этап 3* характеризуется трудностями присущими выбранному методу получения графического представления МС. Результатом данного этапа является сетевая структура в соответствии с выбранным подходом, включающая изображение компонент, связей между ними, а также степени влияния (мощности или веса) связей.

На *этапах 4 и 5* производится выбор глобальной цели системы и множества наборов локальных целей компонент, обеспечивающих достижение глобальной цели

$$\forall OS_i \in OS \exists \{I_j\}_k \xrightarrow{\text{opt}} G^*, \quad (1)$$

где  $i = \overline{1, m}$ ,  $m$  – общее число вариантов КС МС;  $j = \overline{1, n}$ ,  $n$  – общее число компонент в МС;  $k = \overline{1, l}$ ,  $l$  – общее число наборов локальных целей.

Это означает, что для любой организационной структуры МС  $OS_i$  существует множество наборов локальных целей  $\{I_j\}_k$ , один из которых приведет к достижению глобальной цели  $I$ .

В реальных условиях определяющими становятся аспекты, отражающие важность локальной цели и степень ее достижимости:

– все локальные цели известны и имеют рассчитанные веса  $w_k = f(v_k; d_k)$ , отражающие степень важности цели  $v_k$  и ее достижимость  $d_k$ ;

- все локальные цели известны, но веса получить не представляется возможным в силу ряда причин или неопределенностей МС;
- часть локальных целей недостижима.

В рамках *этапа 6* производится получение аналитической, ИММ или ГММ компонент, входящих в состав МС:

$$M = \{A, \Omega_1, \Omega_2\}, \quad (2)$$

где  $A$  – аналитическая модель;  $\Omega_1$  – ИММ;  $\Omega_2$  – ГММ.

В качестве представления КС МС в рамках *этапа 7* используется подход, описанный в работе [5]. Можно выделить пять основных организационных взаимодействий типов элементарных компонент (Э-компонент): № 1 – «пассивная компонента – пассивная компонента»; № 2 – «оператор – пассивная компонента»; № 3 – «пассивная компонента – активная компонента»; № 4 – «активная компонента – активная компонента»; № 5 – «оператор – активная компонента».

В рамках *этапа 8* математические модели компонент объединяются (*этап 6*) в модель МС на основе выделенных КС (*этап 7*). И наконец, *этап 9* позволяет оценить адекватность модели с применением статистических методов анализа данных, *этап 10* позволяет проверить чувствительность для выявления степени зависимости и влияния входных переменных на выходные, определить наиболее значимые входные параметры модели МС, *этап 11* позволяет выявить работоспособность модели на основе ретроспективных данных (свершившихся событий, для которых заранее известен результат). В случае если модель генерирует решение за время, которое соизмеримо, но не превышает времени протекания реальных процессов, – модель отвечает требованиям работоспособности. Данное условие, совместно с условием получения требуемого качества математической модели, является необходимым.

### Пример практической реализации подхода

В качестве примера пассивной компоненты может выступать слабоформализуемый технологический процесс (СФТП) [6], а активной – робот [11]. Наибольший интерес с точки зрения математического описания представляет собой Э-компонента тип № 4. Данный тип взаимодействия представляет собой широко распространенный класс задач групповой работы робототехнических систем. Математическое описание взаимодействия роботов представим на примере достижения взаимосвязанных локальных целей группой мобильных роботов. В результате системного анализа выделены следующие *ключевые аспекты*, характеризующие робота:  $L_i$  «Местоположение»,  $L_i(t)$  «Расчетное местоположение»,  $L'_i$  «Целевое местоположение»,  $V_i$  «Скорость»,  $V'_i$  «Направление движения»,  $\xi_i$  «Энергоемкость»,  $\xi_i(\min)$  «Минимальная энергоемкость»,  $\xi_i(t)$  «Расчетная энергоемкость»,  $\xi'_i$  «Целевая энергоемкость»,  $Q_i$  «Состояние». *Глобальная цель* рассматриваемой МС – выполнение единой стратегии, которая позволяет достигать все локальные цели компонент (роботов). *Локальная цель* характеризуется рядом атрибутов:  $P_j$  «Цена»,  $T_j$  «Время выполнения»,  $L_j$  «Местоположение»,  $L'_j$  «Изменение местоположения робота при выполнении задачи»,  $P_j$  «Состояние»,  $\xi'_i$  «Изменение энергоемкости при выполнении задачи»,  $F_j/C_j$  «Предок/Потомок». Значения атрибутов локальных целей определяются на основе фреймовой модели (рис. 2).

Математическая модель компоненты представляет собой известную модель робота [12]

$$\left\{ \begin{array}{l}
 V'_i = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi R|n_2 - n_1|}{lN\Delta t}\right); \\
 V_i = \frac{\pi R|n_2 + n_1|}{N\Delta t} \cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi R|n_2 - n_1|}{lN\Delta t}\right)\right); \\
 x'_i(\Delta t) = x_i + V_i \Delta t \sin \alpha; \\
 y'_i(\Delta t) = y_i + V_i \Delta t \cos \alpha; \\
 \xi'_i = a_0 \Delta t^3 + a_1 \Delta t^2 + a_2 \Delta t + a_3,
 \end{array} \right. \quad (3)$$

где  $R$  – радиус колеса (табличное значение), м;  $n$  – количество импульсов энкодера за период времени  $\Delta t$ ;  $N$  – количество импульсов энкодера за один оборот колеса (табличное значение);  $l$  – осевое расстояние между колесами, м;  $V_i$  – скорость перемещения робота, м/с;  $V'_i$  – угол отклонения вектора скорости от колесной оси робота, °;  $x_i, y_i$  – начальные координаты;  $x'_i, y'_i$  – координаты робота в момент времени  $T$ ;  $\xi'_i$  описывает изменение энергозаряда батареи;  $\Delta t$  – фиксированный интервал времени расчета характеристик робота.

Математическая модель рабочей зоны группы роботов (рис. 3) осуществляет формирование локальной цели, задаваемой табличной формой и активной компоненты, описываемой в аналитическом виде на основе входной информации, вводимой оператором, а также данных, поступающих от датчиков. При этом синтезируется математическое описание взаимосвязей локальных целей в вербальной форме с использованием аспекта «Имя».

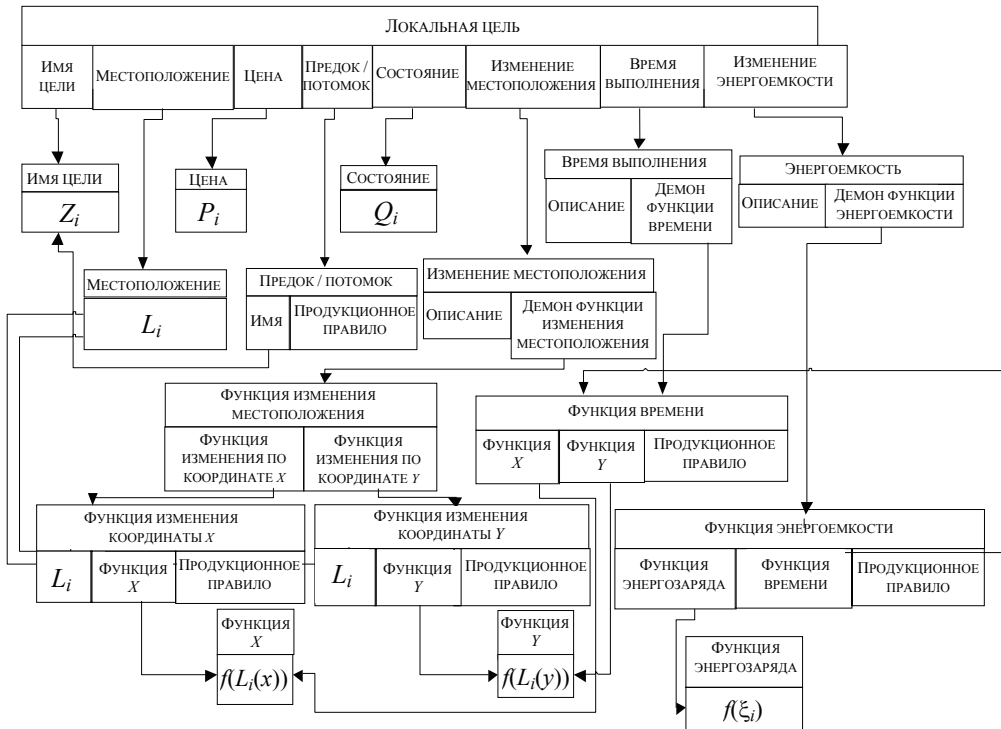


Рис. 2. Фреймовая модель атрибутов локальной цели компоненты

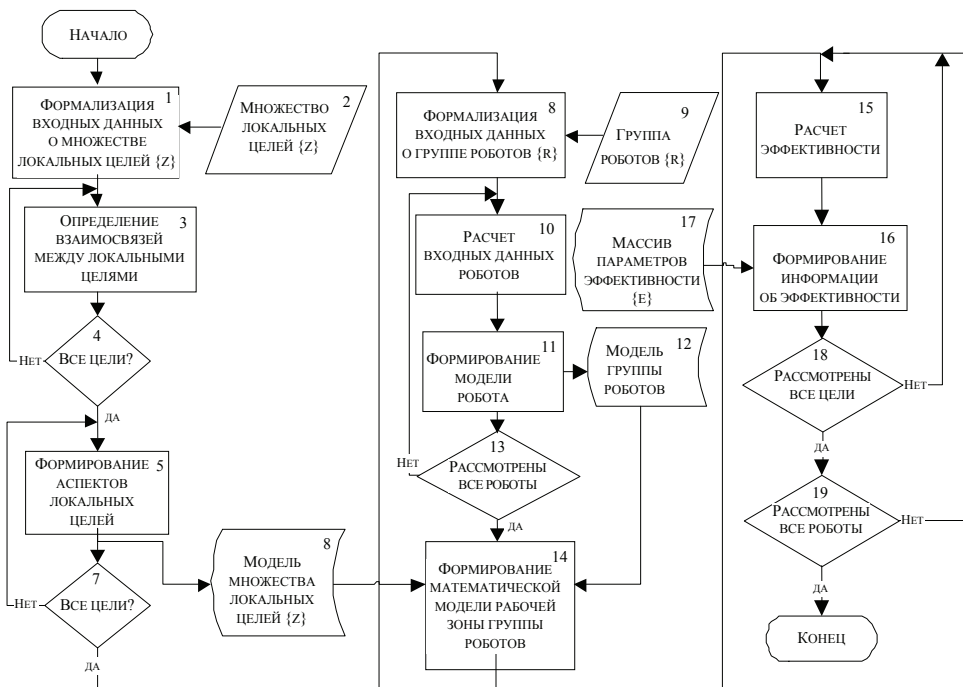


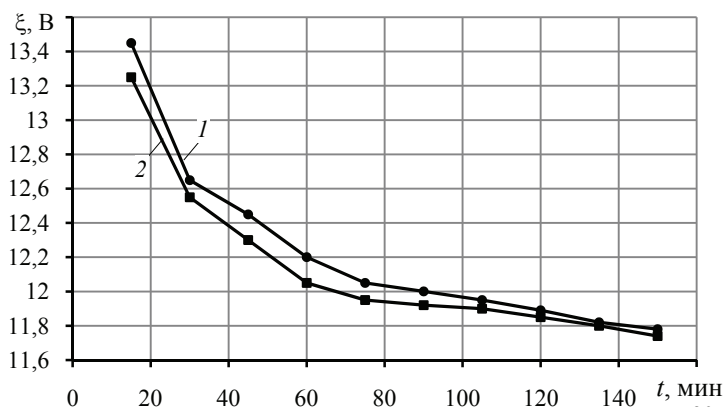
Рис. 3. Алгоритм построения модели для Э-компонент типа № 4

Для определения эффективности достижения локальных целей используется функция «робот – задача»  $\gamma_1^{i,j}$ , учитывающая потерю энергоёмкости  $i$ -го робота при достижении  $j$ -й цели (4). Реализована функция «робот – локальная цель – робот из группы»  $\gamma_2^{i,j,v}$ , оценивающая «расстояние» между  $i$ -й целью  $j$ -го робота и положением  $v$ -го робота из группы для возможности рассредоточения роботов по рабочей зоне (5)

$$\gamma_1^{i,j} = \begin{cases} \xi_i' \left( \frac{L_{i,j}}{V_i} \right), & \text{если } \xi_i - \xi_i'(t) < \xi_i(\min), \\ 0, & \text{если } \xi_i - \xi_i'(t) > \xi_i(\min), \end{cases} \quad (4)$$

$$\gamma_2^{i,j,v} = \begin{cases} \frac{l_{i,j,v}}{l_{\max}}, & \text{если } l_{i,j,v} < l_{\max}, \\ 0, & \text{если } l_{i,j,v} > l_{\max}, \\ v \neq j, & \end{cases} \quad (5)$$

где  $L_{i,j}$  – «расстояние» от местоположения  $j$ -й локальной цели до местоположения  $i$ -го робота, м;  $\xi_i' \left( \frac{L_{i,j}}{V_i} \right)$  – энергия, затраченная на достижение  $j$ -й цели;  $\xi_i$  – энергозаряд робота;  $l_{i,j,v}$  – расстояние от местоположения  $j$ -й локальной цели,



**Рис. 4. Оценка адекватности модели активной компоненты:**  
 1 – экспериментальная; 2 – рассчитанная по модели

описанной атрибутом  $L_i^Z$  до местоположения  $i$ -го робота, описанного аспектом  $L_i^R$   $v$ -го робота из группы, м;  $l_{\max}$  – наибольшее значение расстояния  $l_{i,j,v}$ , м.

В соответствии с предложенным алгоритмом построена модель общей рабочей зоны для трех роботов, перед которыми ставится задача объезда тридцати базисных точек. Геометрический размер рабочей зоны: 10×50 метров. Для проверки адекватности данные о множестве локальных целей вводятся оператором, а информация о роботах формируется на основе показаний датчиков. Адекватность модели оценивается традиционными методами по выходной координате – энергоемкость батареи робота (рис. 4).

Средняя квадратичная относительная ошибка расчетов по модели не превышает 0,8 %, а максимальная относительная ошибка – 1,6 %.

### Заключение

Предложенная концепция математического моделирования нового класса сложных систем обеспечивает формирование КС, описываемых двумя типами компонент – активной и пассивной. Приведенный в работе пример реализации модели указанного класса сложных систем позволяет применять данный подход для целей математического моделирования.

### Список литературы

1. Бусленко, Н. П. Моделирование сложных систем / Н. П. Бусленко. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
2. Павловский, Ю. Н. Имитационные модели и системы / Ю. Н. Павловский. – М. : Фазис, 2000. – 131 с.
3. Magee, C. Complex System Classification / C. Magee, O. L. de Weck // Fourteenth Annual International Symposium of the International Council on Systems Engineering, Toulouse, France, June 20 – 24, 2004 / INCOSE. – Toulouse, 2004. – P. 1 – 18.
4. Thunnissen, D. Uncertainty Classification for the Design and Development of Complex Systems / D. Thunnissen // Proceedings of the 3rd Annual Predictive Methods Conference, Santa Ana, CA, June, 2003 / Veros Software. – Santa Ana, 2003. – P. 1 – 16.

5. Щербатов, И. А. Сложные слабоформализуемые многокомпонентные технические системы / И. А. Щербатов, О. М. Проталинский // Управление большими системами : сб. тр. / Ин-т проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. – Вып. 45. – М. : ИПУ РАН, 2013. – С. 30 – 46.
6. Проталинский, О. М. Применение методов искусственного интеллекта при автоматизации технологических процессов : монография / О. М. Проталинский. – Астрахань : Изд-во Астрахан. гос. техн. ун-та, 2004. – 184 с.
7. Федосеев, С. А. Современные механизмы и инструменты управления большими производственными системами / С. А. Федосеев, М. Б. Гитман, В. Ю. Столбов // Управление большими системами : сб. тр. / Ин-т проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. – Вып. 31. – М. : ИПУ РАН, 2010. – С. 323 – 352.
8. Protalinskii, O. M. Analysis and Modelling of Complex Engineering Systems Based on the Component Approach / O. M. Protalinskii, I. A. Shcherbatov, V. N. Esaulenko // World Applied Sciences Journal. – 2013. – Vol. 24, No. 2. – P. 276 – 283.
9. Сукач, Е. И. Реализация вывода в семантической сети с использованием вероятностно-алгебраического моделирования / Е. И. Сукач, Д. В. Ратобильская, В. Л. Мережа // Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем (Open Semantic Technologies for Intelligent Systems) – OSTIS-2011 : Междунар. науч.-техн. конф., г. Минск, 10 – 12 февр. 2011 г. / Белорус. гос. ун-т информатики и радиоэлектроники. – Минск, 2011. – С. 241 – 246.
10. Ажмухамедов, И. М. Синтез управляющих решений в слабо структурированных плохо формализуемых социотехнических системах / И. М. Ажмухамедов // Управление большими системами : сб. тр. / Ин-т проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. – Вып. 42. – М. : ИПУ РАН, 2013. – С. 29 – 54.
11. Protalinskii, I. O. Optimal Strategy Synthesis for a Group of Mobile Robots with Variable Structure / I. O. Protalinskii, I. A. Shcherbatov, N. D. Shishkin // World Applied Sciences Journal. – 2013. – Vol. 24, No. 2. – P. 268 – 275.
12. Рапопорт, Л. Б. Оценка области притяжения в задаче управления колесным роботом / Л. Б. Рапопорт // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 9. – С. 69 – 89.

---

## Mathematical Modeling of Complex Multicomponent Systems

I. A. Shcherbatov, I. O. Protalinskii

*Department “Automation and Control”,  
Astrakhan State Technical University, Astrakhan; sherbatov2004@mail.ru*

**Key words and phrases:** complex weakly formalized system; component; mathematical model; robot.

**Abstract:** The class of complex systems, namely, multicomponent weakly formalized systems operating under different types of uncertainty, requires the development of the specified approach to mathematical modeling. The authors developed and described the approach to modeling of this class of systems; it is based on a number of postulates that implement various types of mathematical models together with questions of their adequacy. We propose a terminological basis to build the concept of mathematical modeling of complex multicomponent weakly formalized



systems consisting of nine stages. The E-component approach, which provides the solution to the problem of developing the concept of modeling, is described. The authors give the example of mathematical description of the components of a complex system of group control over robots to achieve multiple interconnected local purposes. The adequacy of the resulting mathematical model is reviewed.

### References

1. Buslenko N.P. *Modelirovanie slozhnykh sistem* (Modeling of complex systems), Moscow: Nauka, 1978, 400 p.
2. Pavlovskii Yu.N. *Imitatsionnye modeli i sistemy* (Simulation models and systems), Moscow: Fazis, 2000, 131 p.
3. Magee C., de Weck O. L., Complex System Classification, Fourteenth Annual International Symposium of the International Council on Systems Engineering (INCOSE), Toulouse, France, June 20-24, 2004.
4. Thunnissen, D., "Uncertainty classification for the design and development of complex systems," Proceedings of the 3rd Annual Predictive Methods Conference, Veros Software, Santa Ana, CA, June, 2003.
5. Shcherbatov I.A., Protalinskii O.M. in V. A. Trapeznikov Institut of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, *Large-scale Systems Control*, issue 45, Moscow: IPU RAN, 2013, pp. 30-46.
6. Protalinskii O.M. *Primenenie metodov iskusstvennogo intellekta pri avtomatizatsii tekhnologicheskikh protsessov* (Application of artificial intelligence methods in process automation), Astrakhan: Izdatel'stvo Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2004, 184 p.
7. Fedoseev S.A., Gitman M.B., Stolbov V.Yu. in V. A. Trapeznikov Institut of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, *Large-scale Systems Control*, issue 31, Moscow: IPU RAN, 2010, pp. 323-352.
8. Protalinskii O.M., Shcherbatov I.A., Esaulenko V.N. *World Applied Sciences Journal*, 2013, vol. 24, no. 2, pp. 276-283.
9. Sukach E.I., Ratobyl'skaya D.V., Merezha V. L., in *Open Semantic Technologies for Intelligent Systems (OSTIS-2011)*, Proceedings of the International Scientific and Technical Conference, Minsk, 10-12 February 2011, pp. 241-246.
10. Azhmukhamedov I.M., in V. A. Trapeznikov Institut of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, *Large-scale Systems Control*, issue 42, Moscow: IPU RAN, 2013, pp. 29-54.
11. Protalinskii I.O., Shcherbatov I.A., Shishkin N.D. *World Applied Sciences Journal*, 2013, vol. 24, no. 2, pp. 268-275.
12. Rapoport L.B. *Automation and Remote Control*, 2006, no. 9, pp. 69-89.

---

## Mathematische Modellierung der komplizierten Mehrelementensysteme

**Zusammenfassung:** Die betrachtete Klasse der komplizierten Systeme sind die mehrkomponentigen schwachformalisierten Systeme, die unter den Bedingungen verschiedener Typen der Unbestimmtheit funktionieren, fordert die Entwicklung des spezifizierten Herangehens zu Zwecken der mathematischen Modellierung. Es ist das Herangehen an die Modellierung der angegebenen Klasse der Systeme, gegründet auf der Reihe der Postulate, die die Realisierung verschiedener Typen der mathematischen Modelle zusammen mit den Fragen ihrer Angemessenheit gewährleisten entwickelt. Es ist die terminologische Basis eingeführt, auf dessen Grundlage wird die Konzeption der

mathematischen Modellierung der komplizierten mehrkomponentigen schwachformalisierten Systemen, bestehend aus neun Etappen gebaut. Es ist die Beschreibung des E-komponentenherangehens, das die Lösung der gestellten Aufgabe der Entwicklung der Konzeption der Modellierung gewährleistet gebracht. Es ist das Beispiel der mathematischen Beschreibung der Komponenten des komplizierten Systems der Gruppenverwaltung der Roboter für die Errungenschaft einer Menge der untereinander verbundenen lokalen Ziele vorgeführt. Es ist die Angemessenheit des bekommenen mathematischen Modells geprüft.

---

### **Modélage mathématique des systèmes complexes à multicomposants**

**Résumé:** Sont examinés les systèmes complexes à multicomposants qui fonctionnent dans les conditions de différents types d'indétermination ce qui exige une élaboration d'une approche spécifique pour les buts du modélage mathématique. Est élaborée une approche envers la classe des systèmes indiqués basée sur une série de postulats assurant la réalisation de différents types de modèles mathématiques. Est introduite une base terminologique à la base de laquelle est construite la conception du modélage mathématique des systèmes complexes à multicomposants comprenant neuf étapes. Est citée la description de l'E-approche de composants assurant la solution du problème posé. Est donné l'exemple de la description mathématique du système complexe de la commande des robots pour l'obtention des buts locaux. Est vérifiée l'adéquation du modèle reçu.

---

**Авторы:** *Щербатов Иван Анатольевич* – кандидат технических наук, доцент кафедры «Автоматика и управление»; *Проталинский Игорь Олегович* – аспирант кафедры «Автоматика и управление», ФГБОУ ВПО «Астраханский государственный технический университет», г. Астрахань.

**Рецензент:** *Попов Георгий Александрович* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Информационная безопасность», ФГБОУ ВПО «Астраханский государственный технический университет», г. Астрахань.

---