

УДК 681.5.017:621.929

**ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ МАРКОВА  
К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССА СМЕШИВАНИЯ  
В ГЛАДКОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ БАРАБАНЕ**

**А. С. Дурнев, В. Ф. Першин**

*Кафедра «Техническая механика и детали машин», ФГБОУ ВПО «ТГТУ»;  
lehidtcvif@mail.ru*

**Ключевые слова и фразы:** линейная и нелинейная модели процесса смешивания; сыпучий материал; теория цепей Маркова.

**Аннотация:** Проанализировано движение частиц, склонных к сегрегации во вращающемся барабане. С использованием теории цепей Маркова разработаны линейная и нелинейная модели процесса смешивания, которые позволяют оценить влияние геометрических и режимных параметров на качество смеси. Организация виртуальных перемещений ячеек с помощью матрицы перемещений упростила процедуру расчета концентрации ключевого компонента в ячейках и, в итоге, сократила время расчетов кинетики процесса смешивания.

---

**Введение**

Процесс приготовления смесей из сыпучих компонентов является одной из ключевых операций в химической, фармацевтической, строительной, пищевой и других отраслях промышленности [1–5]. Кроме этого, смешивание сильно влияет на интенсивность и эффективность таких технологических процессов, как гранулирование [6], механическая классификация (грохочение) [7], сушка [8], дозирование [9]. Перечисленные выше процессы успешно реализуются в промышленности с использованием машин, основным рабочим органом которых является гладкий вращающийся барабан. При создании методик расчета геометрических и режимных параметров барабанных смесителей используются математические модели процесса смешивания. Несмотря на большое число работ по моделированию процесса смешивания сыпучих материалов многие вопросы остаются нерешенными, по крайней мере, в таком виде, который считался бы общепризнанным. В первую очередь это касается смешивания компонентов, склонных к сегрегации, и приготовления смесей с малым содержанием одного или нескольких компонентов. Именно эти проблемы часто возникают в промышленности, в частности, при модификации ряда композиционных материалов углеродными наноматериалами семейства ТАУНИТ – его содержание в смеси составляет менее 1 %, а иногда и менее 0,1 % [10, 11]. В последние годы при моделировании механических процессов переработки сыпучих материалов используют математический аппарат случайных марковских процессов [12, 13] и в первую очередь это относится к моделированию процесса смешивания [2, 3, 14]. В данной статье рассмотрена модель процесса смешивания сыпучих компонентов склонных к сегрегации, построенная на основе цепей Маркова.

## Линейная ячеечная модель периодического процесса смешивания

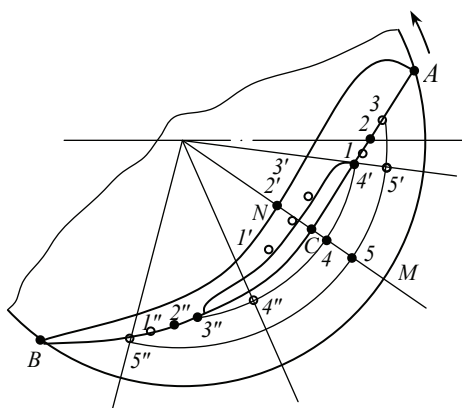
Рассмотрим распределение сыпучего материала в поперечном сечении гладкого вращающегося барабана, которое показано на рис. 1. Весь материал делится на поднимающийся (зона  $ACBM$ ) и скатывающийся (зона  $ACBN$ ) подслои. В поднимающемся слое частицы неподвижны относительно друг друга и смешивание осуществляется только в скатывающемся слое за счет перемещения частиц в радиальном и угловом направлениях [15]. Перемещение в радиальном направлении происходит в основном за счет того, что толщина скатывающегося слоя (отрезок  $CM$ ) меньше толщины поднимающегося слоя (отрезок  $CM$ ), и поэтому несколько частиц (1, 2, 3), находящихся на разных радиусах в поднимающемся слое, попадают в один скатывающийся подслой ( $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ ). При повторном попадании в поднимающийся слой частицы могут изменить свое взаимное расположение на  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ . Угловое смещение частиц происходит за счет того, что частицы 4, 5, первоначально находящиеся в одном радиальном сечении поднимающегося слоя, не одновременно переходят в скатывающийся слой (положение  $4'$ ,  $5'$ ), в результате чего после скатывания они попадают в разные радиальные сечения поднимающегося слоя ( $4''$ ,  $5''$ ). В скатывающемся слое реализуются одновременно оба механизма смешивания, поэтому они могут как усиливать друг друга, так и ослаблять.

Разделим поднимающийся слой на  $N=3$  подслоев равной объемной производительности (рис. 2), то есть таким образом, чтобы в единицу времени из каждого подслоя поднимающегося слоя в скатывающийся слой переходили одинаковые объемы материала. Окружные границы подслоев можно определить, используя следующую зависимость [16]:

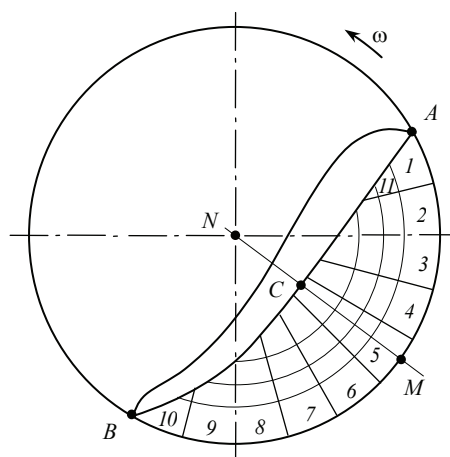
$$R_i = \left[ \frac{NR_{i-1}^2 - R^2 + R_c^2}{N} \right]^{0,5}, \quad (1)$$

где  $R_i$  – радиус наружной границы  $i$ -го подслоя;  $R_{i-1}$  – радиус наружной границы  $(i-1)$ -го подслоя;  $R_c$  – радиус центра циркуляции.

Граница раздела подслоев может быть найдена с использованием энергетического подхода [17].



**Рис. 1. Схема движения частиц сыпучего материала в поперечном сечении гладкого вращающегося барабана**



**Рис. 2. Схема разбиения на подслои и ячейки**

Каждый подслою радиальными сечениями разделим на ячейки равных объемов. Ранее [15] делалось допущение о том, что количество ячеек в каждом скатывающемся подслое прямо пропорционально количеству ячеек в поднимающемся подслое и поскольку модель была адекватна реальному процессу, сделаем аналогичное допущение. Проведем единую нумерацию ячеек, как это показано на рис. 2.

Как известно, марковские процессы подразделяют на три вида: 1) дискретные в пространстве и во времени; 2) дискретные в пространстве и непрерывные во времени; 3) непрерывные в пространстве и во времени.

Для случая барабанного смесителя, учитывая, что одновременно не весь материал участвует в процессе смешивания, а только тот, который находится в данный момент времени в скатывающемся слое, можно использовать наиболее простой первый вид марковских процессов [16], дискретный в пространстве и во времени.

Принимаем допущение о том, что за один оборот вокруг центра циркуляции частица может перейти только в близлежащий «верхний» или «нижний» элементарный объем. Именно за счет этих переходов осуществляется перемещение частиц в радиальном направлении. Угловое смещение происходит за счет того, что число элементарных объемов в каждом подслое различно, и слои «проскальзывают» один относительно другого [16]. При данном допущении модель процесса становится одномерной, а ее свойством является принадлежность частицы к одной из  $m$  ячеек. Вероятности принадлежности к конкретным ячейкам в общем случае различны и меняются с течением времени. Поскольку в процессе участвует большое число частиц, то соответствующая вероятность равна доле частиц, принадлежащих ячейке, а если ячейки символизируют пространственные интервалы, то их относительной концентрации в ячейке. Таким образом, частица может находиться в одной из  $m$  ячеек, то есть свойство принадлежности есть дискретная величина. Весь набор этих дискретных величин образует модельное пространство всевозможных состояний системы. Набор вероятностей, характеризующих текущее состояние системы можно представить вектором-строкой

$$\mathbf{S} = [S_1 \ S_2 \ \dots \ S_m]. \quad (2)$$

В любой момент времени вектор состояния полностью характеризует состояние системы и весь процесс. Если цепь является цепью Маркова, то зависимость между величинами  $S_k$  и  $S_{k+1}$  можно описать следующей матричной формулой

$$\mathbf{S}_{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{S}_k, \quad (3)$$

где  $\mathbf{P}$  – матрица переходных вероятностей или матрица переходов.

При смешивании компонентов склонных к сегрегации более мелкие или более тяжелые частицы ключевого компонента двигаясь в скатывающемся слое могут перемещаться только по направлению к центру циркуляции (т. С на рис. 2), то есть переходить в ячейки с большим порядковым номером. В этом случае матрица переходных вероятностей имеет следующий вид

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1m-1} & P_{1m} \\ 0 & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2m-1} & P_{2m} \\ 0 & 0 & P_{33} & \dots & P_{3m-1} & P_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{m-1m-1} & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & P_{mm} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

В общем случае имеются только два ограничения для вероятностей перехода  $p_{ij}$ , которые непосредственно следуют из математической постановки задачи

$$0 \leq p_{ij} \leq 1; \quad (5)$$

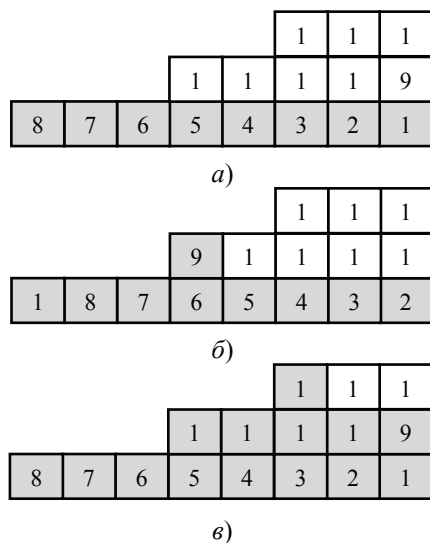
$$\sum_{i=1}^m p_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

Рассмотрим циркуляционный контур, состоящий из 16 ячеек, в развернутом виде, как это показано на рис. 3. Пусть в начальном состоянии ключевой компонент находится только в ячейках первого подслоя, расположенного в непосредственной близости к обечайке барабана (на рис. 3, *а*, данные ячейки закрашены серым цветом).

Данный вариант загрузки не только легко реализуем [14], но и, в ряде случаев, является оптимальным [15]. При первом переходе, в скатывающийся слой перейдут ячейки с номерами 1, 9, 14. При сделанном ранее допущении, обмен частицами ключевого компонента может происходить только между ячейками 1 и 9, точнее, часть частиц ключевого компонента перейдет из ячейки 1 в ячейку 9. Состояние системы, после первого перехода показано на рис. 3, *б*. После второго перехода ключевой компонент появится в 10-й ячейке и т.д. После того, как ключевой компонент появится во всех ячейках второго подслоя, начнется его переход в ячейки третьего подслоя. На рис. 3, *в*, показано состояние системы после 6-го перехода. Ранее [11], при использовании ячеечных моделей, была получена формула для расчета номеров ячеек, участвующих в процессе обмена частицами при переходе  $k$ :

$$u_{\alpha}^{+} = \sum_{i=1}^{\alpha-1} N_i + \left[ k - N_{\alpha} \text{entier} \left( \frac{k-1}{N_{\alpha}} \right) \right], \quad (7)$$

где  $u_{\alpha}^{+}$  – номер объема подслоя  $\alpha$ , участвующего в процессе смешения при переходе  $k$ ;  $N_{\alpha}$  – количество объемов в подслое; выражение  $\text{entier}$  означает, что берется целая часть от числа, находящегося в круглых скобках.



**Рис. 3. Распределение ключевого компонента по ячейкам в процессе смешивания:**  
*а* – начальное состояние; *б* – после первого перехода; *в* – после шестого перехода

Одна из возможных классификаций цепей Маркова приведена на рис. 4 [2]. Наиболее простым случаем является случай постоянства матрицы в течение всего времени процесса, то есть для всех возможных переходов. В этом случае цепь называется однородной. При переменной матрице (неоднородная цепь) возможны две причины ее непостоянства. Во-первых, если в процессе изменяются вероятности переходов частиц ключевого компонента из ячейки в ячейку из-за изменения расположения ячеек в циркуляционном контуре, матрицу необходимо изменять от перехода к переходу. В этом случае цепь становится неоднородной, но остается линейной. Во-вторых, элементы матрицы могут зависеть от элементов вектора состояния. Мы не меняем матрицу на каждом переходе, а она должна

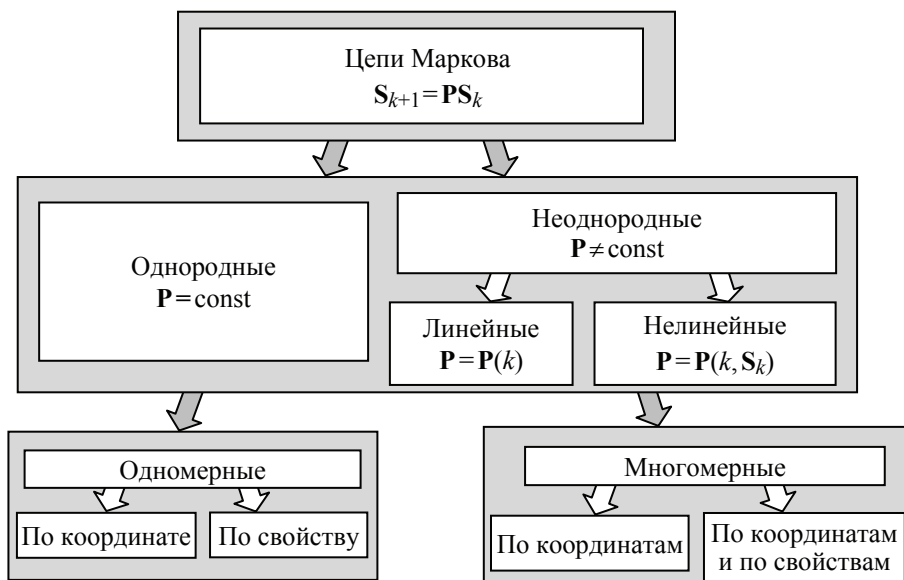


Рис. 4. Классификация цепей Маркова

изменяться сама в зависимости от того, какой вектор состояния «поступает» на преобразование. В частности, в процессе смешивания изменяется концентрация частиц ключевого компонента в ячейках, следовательно, изменяется вероятность проникновения новых частиц в ячейку и элементы матрицы переходных вероятностей. Цепь становится нелинейной и наиболее сложной для моделирования.

Поскольку мы рассматриваем процесс с очень малой концентрацией ключевого компонента указанную нелинейность можно не учитывать. Таким образом, рассмотренная нами модель [11] неоднородна, но линейна. Необходимость на каждом переходе рассчитывать номера ячеек, участвующих в процессе обмена частицами и создание матрицы, каждый раз, новой матрицы переходных вероятностей существенно ограничивают применение модели [11].

От указанной нелинейности можно избавиться если организовать виртуальное перемещение ячеек, то есть перемещать не ячейки, а полностью материал из одной ячейки в другую. Виртуальное перемещение с помощью матрицы перемещений было использовано ранее при моделировании процесса грохочения [9]. Для рассматриваемого нами примера матрица перемещений имеет вид

$$\mathbf{P}_{\text{mov}} = \begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
 \end{pmatrix} \quad (8)$$

В матрице переходных вероятностей значения, отличные от нуля и не равные единице имеют следующие элементы:  $p_{1,1}$ ;  $p_{1,9}$ ;  $p_{9,9}$ ;  $p_{9,14}$ . Остальные вероятности  $p_{i,i} = 1$ , а  $p_{i,j} = 0$ . Если, при моделировании реального процесса смешивания количество подслоев равно  $N$ , то поскольку сумма вероятностей в строке равна единице, то есть  $p_{1,1} + p_{1,9} = 1$ , идентифицировать необходимо  $(N-1)$  параметр.

При использовании предлагаемой математической модели для расчета вектора текущего состояния системы, в любой момент времени  $t = k\Delta t$ , где  $\Delta t$  – время одного перехода, необходимо вектор состояния системы после предыдущего перехода последовательно умножать на матрицу переходных вероятностей, а затем на матрицу перемещений, то есть:

$$\mathbf{S}_k^* = \mathbf{S}_{k-1} \mathbf{P}, \quad \mathbf{S}_k = \mathbf{S}_k^* \mathbf{P}_{\text{mov}}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{S}_k^*$  – промежуточное состояние системы на переходе  $k$ .

### Нелинейная модель периодического смешивания

Предложенная выше модель достаточно универсальна и ее можно, с некоторой корректировкой, использовать для описания кинетики процесса смешивания при любой концентрации ключевого компонента. Как отмечалось выше, в процессе смешивания изменяется концентрация частиц ключевого компонента в ячейках, следовательно, изменяются элементы матрицы переходных вероятностей. В соответствии с классификацией цепей Маркова (рис. 4) модель становится неоднородной и нелинейной. Ранее была предложена следующая формула для расчета вероятности перехода частиц ключевого компонента из ячейки

$$P_{ij}(k) = P_0[1 - C_j(k-1)], \quad (10)$$

где  $P_{ij}(k)$  – вероятность перехода частиц ключевого компонента из ячейки  $i$  в ячейку  $j$  на переходе  $k$ ;  $P_0$  – вероятность перехода частиц ключевого компонента из ячейки  $i$  в ячейку  $j$  при нулевой концентрации ключевого компонента в ячейке  $j$ ;  $C_j(k-1)$  – концентрация ключевого компонента в ячейке  $j$  на переходе  $k-1$ .

Состояние системы в любой момент времени  $t = k\Delta t$  рассчитывается по соотношениям (9).

Таким образом, при использовании нелинейной модели, необходимо на каждом переходе рассчитывать элементы матрицы переходных вероятностей, но поскольку организовано виртуальное перемещение ячеек, за счет использования матрицы перемещений, структура матрицы переходных вероятностей не изменяется. Расчет элементов матрицы с использованием формулы (10) можно легко организовать программными средствами.

### Проверка адекватности математических моделей

Нелинейная модель является более общей по сравнению с линейной, поэтому если она адекватна реальному процессу, то и линейная модель будет адекватна.

Идентификация параметров математической модели сводится к определению по экспериментальным данным наилучшей оценки константы  $P_0$ .

Для идентификации параметра  $P_0$  и проверки адекватности математической модели эксперименту экспериментальными данными из работ [12, 13], в которых было проведено несколько серии параллельных опытов по сегрегации бинарных композиций модельных смесей в барабанном смесителе диаметром 0,25 м и длиной 0,08 м. В качестве компонентов модельных смесей использовались следующие

шие сыпучие материалы: кварцевый песок, стеклянные шарики, гранулированный полиэтилен, силикагель.

Порядок проведения опытов был следующий. Готовилась двухкомпонентная смесь с определенной концентрацией ключевого компонента (за ключевой принимали компонент с меньшим диаметром частиц). Смесь загружалась в барабан, после чего он приводился во вращение. Через заданный промежуток времени барабан останавливался, и из объема смеси в точках, расположенных на разных расстояниях от оси вращения барабана, точечным способом отбирались пробы объемом 6–8 см или весом 10–12 г. Пробы разделяли на отдельные компоненты, которые взвешивали на весах марки ВЛК-500г-М с точностью до 0,01 г. По результатам взвешивания рассчитывали концентрацию ключевого компонента в каждой пробе. Оставшуюся в барабане смесь методом квартования делили на порции, определяли в каждой порции концентрацию ключевого компонента и затем рассчитывали дисперсии  $\sigma_{i\text{эксп}}^2$ . Модельные смеси приготавливались со следующими концентрациями ключевого компонента: 0,466; 0,5; 0,666. Объемная загрузка смесителя изменялась от 700 до 900 см<sup>3</sup>, а угловая скорость вращения барабана – от 1,56 до 4 с<sup>-1</sup>.

Прежде всего, проводилась проверка результатов параллельных опытов на однородность по критерию Кохрена. Для каждой серии параллельных опытов вычисляли среднее арифметическое значение концентрации  $\bar{C}_j$ , дисперсии  $S_j^2$  и далее рассчитывали критерий Кохрена  $G_p$

$$G_p = \frac{\sum_{i=1}^4 (\sigma_{i\text{эксп}}^2 - \bar{\sigma}_{\text{эксп}}^2)_{\max}^2}{3 \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^4 (\sigma_{ji\text{эксп}}^2 - \bar{\sigma}_{j\text{эксп}}^2)^2}.$$

Для смеси песка и стеклянных шариков [18]  $G_p = 0,195$ , а табличное значение  $G_{\text{табл}} = 0,221$ . Аналогичная проверка на однородность дисперсии проводилась и для других серий опытов. Экспериментальные значения  $\bar{C}_j$  использовались для нахождения параметров  $P_0$ . Для рассмотренной смеси из песка и стеклянных шариков  $P_0 = 0,128$ .

Проверка адекватности математической модели при найденном параметре  $P_0$ , проводилась следующим образом. С использованием зависимостей (9) и (10) рассчитывались концентрации ключевого компонента в ячейках и значения  $\sigma_{\text{расч}}^2$ . Вычислялась остаточная дисперсия  $S_{\text{ост}}^2$ , дисперсия воспроизводимости  $S_{\text{восп}}^2$ , дисперсия среднего значения  $\bar{S}^2$  и критерий Фишера  $F_p$ . Значение  $F_p$  сравнивали с табличным значением  $F_{\text{табл}}$ , найденным при соответствующих степенях свободы  $f_1 = 5 - 1 = 4$  и  $f_2 = 4 - 1 = 3$  и уровне значимости  $P = 0,05$ . Для рассматриваемых примеров  $F_{\text{табл}} = 9,12$ . Для всех случаев математическая модель адекватна эксперименту, поскольку максимальное значение  $F_p = 2,1$ , то есть было меньше табличного значения.

Были также проведены численные эксперименты, в которых изменялись следующие параметры: радиус барабана; угловая скорость вращения; коэффициент заполнения барабана материалом; регламент загрузки ключевого компонента [19, 20]. Результаты этих экспериментов показали, что при изменении указанных

параметров изменяется распределение материала в поперечном сечении барабана, в частности, граница раздела поднимающегося и скатывающегося слоев и, как следствие, изменяется кинетика процесса. Это дает основание, что предложенные модели в дальнейшем могут быть использованы при оптимизации геометрических и режимных параметров барабанных смесителей.

### Заключение

На основе теории цепей Маркова разработаны линейная и нелинейная математические модели процесса смешивания сыпучих компонентов в гладком вращающемся барабане. Эти модели позволяют оценить влияние конструктивных и режимных параметров процесса смешивания на качество смеси. Организация виртуальных перемещений ячеек, за счет использования матрицы перемещений, существенно упростила процедуру расчета концентраций ключевого компонента в ячейках и, в конечном счете, сократило время расчета кинетики процесса смешивания.

#### *Список литературы*

1. Макаров, Ю. И. Аппараты для смешения сыпучих материалов : монография / Ю. И. Макаров. – М. : Машиностроение, 1973. – 216 с.
2. Баранцева, Е. А. Процессы смешивания сыпучих материалов: моделирование, оптимизация, расчет : монография / Е. А. Баранцева, В. Е. Мизонов, Ю. В. Хохлов ; ГОУ ВПО «Иван. гос. энергет. ун-т им. В. И. Ленина». – Иваново : Иван. гос. энергет. ун-т, 2008. – 116 с.
3. Баранева, Е. А. Роль лопастного перемешивания в формировании качества смесей сыпучих материалов с малым содержанием ключевого компонента / Е. А. Баранева // Изв. вузов. Химия и хим. технология. – 2009. – Т. 52, вып. 1. – С. 102 – 104.
4. Пат. 2449829 Российская Федерация, МПК В 01 F 7/16. Агрегат для смешения сыпучих материалов / А. И. Зайцев, А. Е. Лебедев, Е. А. Виноградова, В. Н. Сидоров, Ю. В. Никитина, И. С. Шеронина, М. Ю. Таршис ; заявитель и патентообладатель ГОУ ВПО «Ярослав. гос. техн. ун-т». – № 2010116920/05 ; заявл. 28.04.2010 ; опубл. 10.05.2012, Бюл. 13. – 6 с.
5. Шеронина, И. С. Исследование процессов смешения сыпучих материалов в центробежном смесителе с соосными распыливающими каналами / И. С. Шеронина, А. Е. Лебедев, А. И. Зайцев // 65-я Всероссийская научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием : тез. докл. / Ярослав. гос. техн. ун-т. – Ярославль, 2012. – С. 259.
6. Минаев, Г. А. Моделирование процесса гранулирования методом окатывания / Г. А. Минаев, В. Ф. Першин // Теорет. основы хим. технологии. – 1990. – Т. 24, № 1. – С. 91 – 97.
7. Першин, В. Ф. Моделирование процесса классификации в барабанном грохоте / В. Ф. Першин // Теорет. основы хим. технологии. – 1989. – Т. 23, № 4. – С. 499 – 505.
8. Антипов, С. Т. Влияние неравномерности распределения потока на эффективность работы сушильного барабана / С. Т. Антипов, И. Т. Кретов, В. Я. Валуйский // Изв. вузов. Пищевая технология. – 1987. – № 1. – С. 72 – 74.
9. Весовое дозирование зернистых материалов / С. В. Першина [и др.]. – М. : Машиностроение, 2009. – 260 с.
10. Мищенко, С. В. Углеродные наноматериалы. Производство, свойства, применение / С. В. Мищенко, А. Г. Ткачев – М. : Машиностроение, 2008. – 320 с.



11. Ткачев, А. Г. Получение катализатора синтеза углеродных наноструктурных материалов в аппарате пульсирующего горения / А. Г. Ткачев, А. А. Баранов // Хим. технология. – 2008. – Т. 9, № 1. – С. 12 – 16.
12. Ткачев, А. Г. Моделирование процесса грохочения / А. Г. Ткачев, А. А. Ковынев, В. М. Нечаев, В. Ф. Першин // Теорет. основы хим. технологии. – 2008. – Т. 42, № 4. – С. 477 – 479.
13. Mizonov, V. E. Application of Multi-Dimensional Markov Chains to Model Kinetics of Grinding with Internal Classification / H. Berthiaux, V. P. Zhukov, S. Bernotat // Int. J. Miner. Process. – Vol. 74, No. 1001. – 2004. – P. 307 – 315.
14. Математическая модель кинетики лопастного перемешивания сыпучих материалов / Е. А. Баранцева [и др.] // Строит. материалы. – 2008. – № 2. – С. 12 – 13.
15. Першин, В. Ф. Моделирование процесса смешения сыпучего материала в поперечном сечении вращающегося барабана / В. Ф. Першин // Теорет. основы хим. технологии. – 1986. – Т. 20, № 4. – С. 508 – 513.
16. Першин, В. Ф. Переработка сыпучих материалов в машинах барабанного типа / В. Ф. Першин, В. Г. Однолько, С. В. Першина. – М. : Машиностроение, 2009. – 220 с.
17. Першин, В. Ф. Энергетический метод описания движения сыпучего материала в поперечном сечении гладкого вращающегося цилиндра / В. Ф. Першин // Теорет. основы хим. технологии. – 1988. – Т. 22, № 2. – С. 255 – 260.
18. Першин, В. Ф. Модель процесса смешивания сыпучего материала в поперечном поперечном сечении гладкого вращающегося барабана / В. Ф. Першин // Теорет. основы хим. технол. – 1989. – Т. 23, № 2. – С. 370.
19. Пат. 2478420 Российская Федерация, МПК В 01 F 3/18, В 01 F 9/02, В 01 F 15/02. Способ непрерывного приготовления многокомпонентных смесей и устройство для его реализации / Селиванов Ю. Т., Першин В. Ф., Дурнев А. С. ; заявитель и патентообладатель ГОУ ВПО «Тамб. гос. техн. ун-т». – № 2011131090/05 ; заявл. 25.07.2011 ; опубл. 10.04.2013, Бюл. 10. – 10 с.
20. Селиванов, Ю. Т. Расчет регламента загрузки компонентов в циркуляционные смесители / Ю. Т. Селиванов, В. Ф. Першин, А. С. Дурнев // Хим. и нефтегазовое машиностроение. – 2011. – № 1. – С. 16 – 19.

---

## Modeling Bulk Solids Mixing in Rotating Drum by Means of the Theory of Markov Chains

A. S. Durnev, V. F. Pershin

*Department “Engineering Mechanics and Machine Parts”, TSTU;  
lehidtcvif@mail.ru*

**Key words and phrases:** bulk solids; linear model of mixing; mixing process; nonlinear model of mixing; theory of Markov chains.

**Abstract:** We analyzed the motion of particles, which tend to segregate in rotating drum and used the theory of Markov chains to develop linear and nonlinear models of mixing. These models enable to estimate the influence of geometrical and operational parameters on the quality of the mixture. The organization of virtual displacements cells using matrix displacement simplified the procedure for calculating the concentration of a key component in the cell and, ultimately, reduced the time for calculating the kinetics of the mixing process.

## **Anwendung der Theorie der Ketten von Markow zur Modellierung des Prozesses der Vermischung in der glatten Drehtrommel**

**Zusammenfassung:** Es ist die Bewegung der Teilchen, die zur Segregation in der Drehtrommel geneigt sind, analysiert und es sind unter Ausnutzung der Theorie der Ketten von Markow die linearen und nichtlinearen Modelle der Vermischung entwickelt. Diese Modelle lassen zu, den Einfluss der geometrischen und Regimeparameter auf die Qualität der Mischung zu bewerten. Die Organisation der virtuellen Umstellungen der Zellen mit Hilfe der Matrix der Umstellungen hat die Prozedur der Berechnung der Konzentration der Schlüsselkomponente in den Zellen vereinfacht und hat die Zeit für die Berechnung der Kinetik des Prozesses der Vermischung im Endeffekt verringert.

---

## **Application de la théorie des chaînes de Markov pour le modélage du processus du mélange dans un cylindre lisse tournant**

**Résumé:** Est analysé le mouvement des particules qui sont aptes à la ségrégation dans un cylindre tournant et avec l'emploi de la théorie des chaînes de Markov. Sont élaborés les modèles linéaire et non linéaire du mélange. Ces modèles permettent d'apprécier l'influence des paramètres géométriques et ceux de régime sur la qualité du mélange. L'organisation des déplacements virtuels des cellules à l'aide de la matrice des déplacements a simplifié la procédure du calcul de la concentration du composant clé dans les cellules et, finalement, a réduit le temps pour le calcul de la cinétique du processus du mélange.

---

**Авторы:** *Дурнев Александр Сергеевич* – аспирант кафедры «Техническая механика и детали машин»; *Першин Владимир Федорович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Техническая механика и детали машин», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».

**Рецензент:** *Червяков Виктор Михайлович* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Техническая механика и детали машин», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».

---