УДК 539.3

О ПОСТАНОВКЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

Г.И. Дубровина

Кафедра теоретической механики,
ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана»;
dubrovina@bmstu.ru

Ключевые слова и фразы: активная пропорциональная деформация; краевая задача; критерий равновесного разрушения; механика хрупкого разрушения; предельная поверхность разрушения; равновесное сопротивление среды; функция сопротивления среды.

Аннотация: Рассмотрена постановка краевой задачи механики хрупкого разрушения для первоначально сплошного твердого тела, в котором в процессе разрушения появляются нарушения сплошности (вырожденные полости). Такие полости представляют нематериальную среду, сопротивление которой действию внешней нагрузки равно нулю. При составлении уравнений краевой задачи механики разрушения вводится тензорная функция сопротивления среды и записывается условие равновесия между действием внешних сил и сопротивлением среды. При решении краевой задачи необходимо проверять условие равновесия. Если оно выполняется, задача поставлена корректно. Если условие равновесия нарушено, то получаем динамическую задачу неустойчивого равновесия. Приведена теорема о пропорциональном нагружении в теории хрупкого разрушения для изотропной среды.

В работах [1–6] рассмотрены задачи хрупкого разрушения, приведен метод решения краевой задачи хрупкого разрушения, критерии устойчивости.

Для сохранения несущей способности элементов конструкций необходимо установить условия разрушения, критерии разрушения и устойчивости процесса разрушения.

В линейной теории упругости конструкционные материалы моделируются сплошным деформируемым телом. Под действием внешних сил среда деформируется. Обозначим: $p = i_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}$, $e = i_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}$, $S = i_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}$, $C = i_{\alpha\beta\chi\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – тензоры напряжений, деформаций, сопротивления и упругости соответственно; i_{mn}, i_{mnrs} – орты в пространстве (p, e).

Для линейно-упругой среды справедлив обобщенный закон Гука. Будем считать, что сопротивление среды действию внешних нагрузок равновесно, если

$$p = S. \tag{1}$$

В теории упругости среда не теряет свойства сплошности, поэтому условие (1) равносильно тождеству и не имеет практического значения для постановки и решения краевых задач. В любой точке первоначально сплошного твердого тела напряжения от действия внешних сил равны сопротивлению среды $S_{ij} = p_{ij}$ и не равны нулю, поэтому эта точка материальна, наделена свойствами среды и не может быть вырожденной полостью. Отсюда следует достаточность равенства (1) как условия сохранения первоначальной сплошности среды.

В теории разрушения первоначально сплошная среда может потерять свойство сплошности под действием внешних сил. Нематериальная среда не наделена никакими свойствами, сопротивление деформациям нематериальной среды малой окрестности любой ее точки равно нулю. Потеря сплошности равносильна образованию полости – геометрического места точек, где сопротивление деформациям равно нулю. Для вырожденной полости ее точка нематериальна, среда не является сплошной в смысле непрерывности координат точек. Так как первоначально сплошная среда может потерять свойство сплошности под действием внешних сил, введем тензор предельного сопротивления среды $S^* = i_{\alpha\beta} S^*_{\alpha\beta}$, Классическое предельное сопротивление среды – тензор пределов прочности $S^{\text{в}}$, радиус-вектор предельной поверхности прочности в пространстве (p). Тензор $S^{\text{в}}$ соответствует максимальному равновесному в смысле (1) сопротивлению среды. Он определяется однозначно только при специальных условиях нагружения элемента среды, когда изменение составляющих тензора деформаций пропорциональное и активное. Пропорциональное нагружение среды будет активным, если $d|p| > 0$ и пассивным, если $d|p| < 0$. Деформирование элемента среды будет активным при $d|e| > 0$ и пассивным при $d|e| < 0$.

Введем локальный критерий разрушения. Пусть элемент первоначально сплошного твердого тела сохраняет свойства:

1) сплошности при активной деформации при условии (1) до предельного равновесного сопротивления

$$p = S^*, \tag{2}$$

где $S^* = S(e^*)$, e^* – тензор предельных деформаций;

2) нарушение сплошности элемента состоит в образовании вырожденной полости, разделяющей элемент на две равные части. Неравновесное разрушение элемента происходит при $|e| > \left|e^*\right|$ в результате неравенства

$$|p| > \left|S^*\right|. \tag{3}$$

Переход от (2) к (3) при деформации $|e| = \left|e^{\text{в}}\right| + \delta|e| > \left|e^{\text{в}}\right|$ установлен на основании стандартных испытаний на прочность. Он применяется в стандартных расчетах на прочность, поэтому его можно считать стандартным критерием разрушения.

Краевая задача механики разрушения. Введем функцию сопротивления среды. Тензорную функцию сопротивления $S = S(e)$ на интервале $0 \le e \le e^{\text{в}}$ активного пропорционального деформирования запишем в виде

$$S = C \cdot\cdot eI_1 + \left[S^{\text{в}} - D \cdot\cdot (e - e^{\text{в}})\right] I_2 + S_{\text{o}} I_3,$$

где $0 \le e \le e^{\text{в}}$; $I_1 = 1$; $I_2 = 0$; $I_3 = 0$; $e^{\text{в}} \le e \le e^{\text{р}}$; $I_1 = 0$; $I_2 = 1$; $I_3 = 0$; $e > e^{\text{р}}$.

В изотропной среде тензоры S и D изотропны, тензоры $S^{\text{в}}$, $e^{\text{в}}$ – радиус-векторы предельных поверхностей изотропных материалов. На интервале $I_1 = 1$ при $p = S$ активной пропорциональной деформации соответствует активное пропорциональное нагружение элемента функция (3) имеет восходящую ветвь, где $d|p| > 0$. На интервале $I_2 = 1$ она имеет спадающую ветвь, где $d|p| < 0$, если выполнено условие равновесия (1) (условие сплошности деформируемого тела). В точке $|e| = |e^{\text{р}}|$ элемент имеет равновесную вырожденную полость и остаточное сопротивление $S_{\text{о}}$ $(I_3 = 1)$.

Рассмотрим постановку краевой задачи механики хрупкого разрушения С.Д. Волкова [1, 2]. В этом случае при $p = S^{\text{в}}$ предельное равновесное сопротивление среды зависит от жесткости системы нагружения, передающей нагрузку в зону формирования макротрещины.

Так как сплошность среды может быть сохранена при специальных условиях, сначала применяем вспомогательную гипотезу о равновесии (1), затем составляем уравнения краевой задачи (она имеет смысл только для сплошной среды) и решаем их при заданных граничных условиях. Результат используем для проверки вспомогательной гипотезы (1) на достоверность по критериям устойчивости.

Поэтому уравнения классической теории упругости должны быть дополнены вспомогательной гипотезой о равновесии

$$p = S.$$

Проверка гипотезы проходит по предложенным критериям устойчивости.

Для активной пропорциональной деформации основные уравнения механики хрупкого разрушения имеют вид:

$$\begin{gathered} \nabla \cdot p = 0, \quad e = \operatorname{def} u; \\ p = C \cdot\cdot e I_1 + \left[S^{\text{в}} = D \cdot\cdot (e - e^{\text{в}})\right] I_2 + S_{\text{о}} I_3, \end{gathered} \tag{4}$$

где p, D, $S_{\text{о}}$ – тензоры напряжений, модулей хрупкости и остаточного сопротивления среды соответственно; $0 \le e \le e^{\text{в}}$; $I_1 = 1$; $I_2 = 0$; $I_3 = 0$; $e^{\text{в}} \le e \le e^{\text{р}}$; $I_1 = 0$; $I_2 = 1$; $I_3 = 0$; $e > e^{\text{р}}$.

По заданным геометрическим параметрам тела, физическим свойствам среды и граничным условиям требуется найти тензоры $p(x)$, $e(x)$, вектор $u(x)$ в любой точке тела. При этом необходимо проверять вспомогательную гипотезу о равновесии (1). Если после проверки гипотезы получается, что она недостоверна, то обсуждаемая краевая задача поставлена некорректно и, следовательно, не относится к классу задач о равновесии деформируемых тел, а является динамической, принадлежащей к другому классу задач.

Если задача корректна, то ее решение можно использовать для определения несущей способности конструкции на стадии нагружения, когда сопротивление среды перешло через максимум. Такая постановка краевой задачи называется прямой.

Простейшая изотропная среда. Общая линейная зависимость между двумя тензорами C и D содержит две положительные скалярные величины a_0 и b_0:

$$D_{11} = a_0 C_{11}, \ D_{23} = b_0 C_{23}.$$

Постоянные a_0, b_0 можно определить по функциям сопротивления среды одноосному растяжению и чистому сдвигу. Изотропную среду назовем простейшей, если $a_0 = b_0$. Тогда

$$D = a_0 C. \tag{5}$$

При условии (5) постоянная a_0 определяется из функции сопротивления материала одноосному растяжению:

$$a_0 = E_{\text{р}} / E,$$

где E – модуль Юнга.

Теорема о пропорциональном нагружении в теории хрупкого разрушения С.Д. Волкова. Система (4) задана для пропорциональной активной деформации, поэтому нужны условия, которым должна удовлетворять внешняя нагрузка и физические свойства среды, чтобы в любой точке данного тела деформации были пропорциональными и активными. Эти условия дает теорема о пропорциональном нагружении. Для системы (4) нельзя применять известную из теории пластичности теорему о пропорциональном нагружении, так как в ней рассмотрена неубывающая функция $p = p(e)$. Нагружение границ тела, по определению, пропорциональное, если

$$p^n(x) = a^n(x)Q, \tag{6}$$

где $a^n(x) = i_\alpha a_\alpha^n$, $a_j^n = \text{const}$; Q – коэффициент или параметр пропорциональности (скалярная переменная величина). Пропорциональное нагружение активное, если $dQ > 0$ и является разгрузкой при $dQ < 0$.

Если на части S' границы S сил $(a_0^n = 0)$, то нагружение тела также пропорциональное и активное или разгружающее, равенство (6) выполнено на остальной части границы S.

Теорема. Для того чтобы малая окрестность какой-либо точки тела при $I_1 = 1$ была пропорционально и активно деформируема и нагружена, а при $I_2 = 1$ – пропорционально и активно деформируема с пропорциональным уменьшением нагрузки, достаточно: 1) чтобы среда была изотропна в смысле (5); 2) нагружение границы S данного тела было пропорциональным и активным; 3) $\nabla \cdot S^\text{в} = 0$.

Доказательство. Полагаем $I_1 = 1$ на части $V_\text{у}$ тела V и $I_2 = 1$ на части $V_\text{р}$ с границей $S_\text{р}$, где $p = S^\text{в}$.

Если $M(x)$ границы $S_\text{р}$, то в ее окрестности по (1) и (4) при $S = S^\text{в}$, $\nabla \cdot S^\text{в} = 0$. Так как $S^\text{в} = C \cdot\cdot e^\text{в}$, $D = a_0 C$, имеем

$$\nabla \cdot S^\text{в} = \nabla \cdot C \cdot\cdot e^\text{в} = \nabla \cdot D \cdot\cdot e^\text{в} = 0.$$

В области $V_\text{у}$ из (4) имеем:

$$\nabla \cdot p = 0, \quad e = \operatorname{def} u, \quad p = C \cdot\cdot e, \tag{7}$$

откуда

$$\nabla \cdot C \cdot\cdot \operatorname{def} u = 0\ . \tag{8}$$

В области $V_\text{р}$

$$\nabla \cdot p = 0, \quad e = \operatorname{def} u, \quad p = S^\text{в} - D \cdot\cdot (e - e^\text{в}), \tag{9}$$

откуда

$$\nabla \cdot p \cdot\cdot \operatorname{def} u = 0; \quad \nabla \cdot \mathrm{C} \cdot\cdot \operatorname{def} u = 0. \tag{10}$$

Если уравнение (9) решено для всего тела V при граничных условиях (6), то в силу (7) вектор $u(x)$ остается неизменным в области $V_\text{р}$, где свойства и состояние среды описывает уравнение (10).

Пусть $p'(e)$, $e'(x)$, $u'(x)$ – решение системы (8) при граничных условиях (6) для $Q = 1$ получаем

$$\nabla \cdot p' = 0, \quad e' = \operatorname{def} u', \quad p' = C \cdot\cdot e', \quad p' \cdot n = a^n(x).$$

Легко проверить подстановкой, что

$$p = Qp', \quad e = Qe', \quad u = Qu'.$$

Так же получается решение и для $Q > 1$. Этим доказана первая часть теоремы $(I_1 = 1)$.

Полагаем $I_2 = 1$. Из формул (10) следует, что перемещение $u = Qu'$ является решением системы (9) при $Q > 1$ и граничных условиях (6). Подставим $u = Qu'$ в уравнение (10). Находим

$$e = \mathrm{def}\, u' = Q e'.$$

Деформирование малой окрестности точки области $V_\text{р}$ действительно пропорционально и активно. Далее

$$p = S^\text{в} - (Q e' - e^\text{в}).$$

Отсюда

$$p = (1 + a_0)\, S^\text{в} - p' Q\, a_0.$$

Поскольку векторы $S^\text{в}$ и p' в пространстве (p) коллинеарны, то

$$|p| = (1 + a_0)\left|S^\text{в}\right| - |p'| Q\, a_0, \quad d|p| = -|p'|\, dQ\, a_0 < 0,$$

что и требовалось доказать.

Список литературы

1. Волков, С.Д. К механике разрушения. Сообщение 1 / С.Д. Волков, Г.И. Дубровина // Проблемы прочности. – 1980. – № 8. – С. 11–15.

2. Волков, С.Д. К механике разрушения. Сообщение 2 / С.Д. Волков, Г.И. Дубровина // Проблемы прочности. – 1980. – № 9. – С. 41–45.

3. Дубровина, Г.И. Об одной задаче механики разрушения / Г.И. Дубровина // 2-й Всерос. семинар им. С.Д. Волкова. Механика неоднородных материалов и разрушение : г. Пермь, март 2000 г. / Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 2000. – С. 23.

4. Волков, С.Д. О неустойчивости деформаций в задачах механики разрушения / С.Д. Волков, Г.И. Дубровина // Проблемы прочности. – 1977. – № 5. – С. 8–12.

5. Волков, С.Д. Проблема прочности и механика разрушения / С.Д. Волков // Проблемы прочности. – 1978. – № 7. – С. 3–10.

6. Дубровина, Г.И. Краевая задача механики хрупкого разрушения / Г.И. Дубровина // Механика. Научные исследования и учебно-практические разработки. – 2012. – Вып. 6. – Р. 57–62.

Formulation of Boundary Value Problem of Brittle Fracture

G.I. Dubrovina

Department of Theoretical Mechanics,
Moscow State Technical University named after N.E. Bauman;
dubrovina@bmstu.ru

Key words and phrases: active proportional deformation; boundary value problem; criterion of the equilibrium of destruction; equilibrium temperature resistance; limiting surface damage; resistance function of the medium; mechanics of brittle fracture.

Abstract: The paper discusses the statement of the boundary value problem of brittle fracture mechanics for originally solid body, which is subject to producing degenerate cavities caused by destruction. These cavities are non-material environment, the resistance of which to the external load is zero. When making the equations of the boundary value problem of fracture mechanics the tensor function of environmental resistance is introduced and the condition of equilibrium between the action of external forces and the resistance of the medium is recorded. In solving the boundary value problem it is necessary to check the condition of equilibrium. If it is true, the problem is posed. If the equilibrium condition is violated, then we get a dynamic problem of unstable equilibrium. The theorem of proportional loading in the brittle fracture theory for isotropic medium is described.

Über die Errichtung der Ortsaufgabe der brüchigen Zerstörung

Zusammenfassung: Es ist die Errichtung der Ortsaufgabe der Mechanik der brüchigen Zerstörung für den ursprünglich ununterbrochenen festen Körper, in denen im Laufe der Zerstörung die Verstöße der Kontinuität (die entarteten Höhlen) erscheinen, betrachtet. Diese Höhlen stellen die immaterielle Umgebung, deren Widerstand der äußerlichen Belastung gleich der Null ist, dar. Bei der Zusammenstellung der Angleichungen der Ortsaufgabe der Mechanik der Zerstörung wird die tensorielle Funktion des Widerstandes der Umgebung eingeführt und es wird die Bedingung des Gleichgewichtes zwischen der Handlung der Auβenkräfte und dem Widerstand der Umgebung eingeschrieben. Bei der Lösung der Ortsaufgabe ist es notwendig, die Bedingung des Gleichgewichtes zu prüfen. Wenn es erfüllt wird, ist die Aufgabe korrekt gestellt. Wenn die Bedingung des Gleichgewichtes verletzt ist, so erhalten wir die dynamische Aufgabe des instabilen Gleichgewichtes. Es ist das Theorem über die proportionalen Beaufschlagung in der Theorie der brüchigen Zerstörung für die isotropen Umgebung gebracht.

Sur le problème de limite de la destruction fragile

Résumé: Est examiné le problème de limite de la mécanique de la destruction fragile pour un corps initial solide dans lequel au cours de la destruction surgissent les violations de la totalité (cavités dégénérées). Ces cavités représentent le milieu non matériel la résistance duquel à l’action de la charge extérieure est égale au zéro. Lors de la composition du problème de limite de la mécanique de la destruction fragile est introduite la fonction tensorielle de la résistance du milieu, est inscrite la condition de l’équilibre entre l’action des forces extérieures et la résistance du milieu. Lors de la solution du problème de limite il est nécessaire de vérifier la condition de l’équilibre. Est cité le théorème sur le chargement proportionnel dans la théorie de la destruction fragile pour le milieu isotopique.

Автор: ***Дубровина Галина Ивановна*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва.

Рецензент: ***Андронов Вячеслав Васильевич*** – доктор технических наук, профессор кафедры теоретической механики ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана», г. Москва.