УДК 66.01.011

РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ТЕЛ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Е.Н. Туголуков, В.А. Карпук, А.В. Рухов

Кафедра «Техника и технологии производства нанопродуктов», ФГБОУ ВПО «ТГТУ»; tugolukov.en@mail.ru

Ключевые слова и фразы: аналитическое решение; математическое моделирование; обратная задача теплопроводности.

Аннотация: Рассмотрена методика аналитического решения обратных задач теплопроводности для многослойных областей канонической формы в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.

Обозначения

a_i – коэффициент температуропроводности материала слоя;	t_c – температура окружающей среды;
i – номер слоя;	$t_i(r_i, \tau)$ – температурное поле слоя;
$Q_i(r_i, \tau)$ – тепло, выделяемое внутренним источником i-го слоя;	$t_{i,0}(r_i)$ – температурное поле слоя в начальный момент времени;
R_i – толщина слоя;	α_i – коэффициент теплоотдачи слоя;
r_i – координата, направленная по нормали к поверхности слоя;	λ_i – теплопроводность материала слоя соответственно;
	τ – время.

При математическом моделировании температурных полей, как правило, основным источником погрешностей служат значения конвективных коэффициентов теплоотдачи, входящие в граничные условия третьего рода задачи теплопроводности.

Коэффициент теплоотдачи является комплексной характеристикой интенсивности теплообмена теплоотдающей (тепловоспринимающей) поверхности и омывающего ее потока жидкости (газа). Он зависит от большого количества физических, геометрических и режимных параметров теплообменного процесса (10 и более). Поэтому вывод прямых аналитических зависимостей для расчета коэффициентов конвективной теплоотдачи на основе фундаментальных знаний о природе процессов теплопереноса в пространстве не представляется возможным.

Существуют различные возможности для определения численных значений коэффициентов конвективной теплоотдачи в конкретных условиях протекания теплообменного процесса.

Классическая инженерная методика расчета коэффициентов конвективной теплоотдачи, базирующаяся на теории подобия, основана на использовании критериальных уравнений алгебраического типа, обобщающих экспериментальные данные по различным веществам, выступающим в роли теплоносителей, для каждого набора условий протекания теплообменного процесса. Поэтому использование критериальных уравнений, являющихся по сути результатом многомерной аппроксимации, приводит в каждом конкретном расчете к погрешностям, не поддающимся оценке [1]. Как правило, погрешность расчета коэффициентов конвективной теплоотдачи по критериальным уравнениям составляет 30–50 %.

Другой путь связан с непосредственным измерением температурных полей в лабораторных или промышленных условиях на действующем оборудовании для исследуемых условий протекания теплообменных процессов и видов теплоносителей. По результатам измерений температурных полей могут быть вычислены локальные значения коэффициентов теплоотдачи.

Методики расчета коэффициентов теплоотдачи по экспериментальным данным:

1) расчет по определению коэффициента теплоотдачи как удельного количества тепла, приходящегося на единицу площади поверхности теплообмена в единицу времени и отнесенного к единичной разности температур поверхности и определяющей температуры потока. Этот способ широко освещен в литературе и является своего рода классическим;

2) итеративный алгоритм нахождения коэффициента теплоотдачи, в котором при каждой итерации решается прямая задача теплопроводности, то есть рассчитывается температурное поле в моделируемых условиях и корректируется значение коэффициента теплоотдачи, входящего в граничные условия задачи теплопроводности; итерации выполняются до приемлемого совпадения расчетного и измеренного температурных полей. Этот способ целесообразно использовать в оценочных расчетах;

3) прямой расчет коэффициента теплоотдачи по результатам решения обратной задачи теплопроводности для исследуемого процесса. Этому посвящено много работ, но их результаты часто оказываются не адаптированными для решения прикладных инженерных задач.

В литературе достаточно хорошо показаны численные методы решения обратных задач теплопроводности [1, 2], однако, мало внимания уделяется аналитическим подходам к решению таких задач. Это связано со сложностями их реализации.

Следует отметить, что численные методы решения задач для плоских многослойных тел описаны достаточно широко [3], но аналитические методы решения рассматриваются значительно реже.

Рассмотрим метод решения обратной задачи теплопроводности, основанный на использовании конечных интегральных преобразований. Он устойчив, но требует экспериментального определения температурного профиля по толщине образца. Определение пространственного температурного профиля может быть затруднено практически, особенно для действующего промышленного оборудования.

Проиллюстрируем данный метод на примере – для многослойных тел канонической формы, температурное поле которых описывается решением задачи (1) – (6):

$$\frac{\partial t_i(r_i,\tau)}{\partial \tau} = a_i\left(\frac{\partial^2 t_i(r_i,\tau)}{\partial r_i^2} + A_{k,i}\frac{\partial t_i(r_i,\tau)}{\partial r_i}\right) + Q_i(r_i,\tau); \tag{1}$$

где $i = 1, 2, ..., N$; $R_{i-1} \le r_i \le R_i$; $k = 0, 1, 2; \tau > 0$;

$$t_i(r_i, 0) = t_{i,0}(r_i); \tag{2}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(R_0,\tau)}{\partial r_1} - \alpha_0\big(t_1(R_0,\tau) - t_{c0}\big) = 0; \tag{3}$$

$$\lambda_N \frac{\partial t_N(R_N,\tau)}{\partial r_N} + \alpha_N\big(t_N(R_N,\tau) - t_{cN}\big) = 0; \tag{4}$$

$$t_i(R_i,\tau)=t_{i+1}(R_i,\tau); \quad (5)$$

$$\lambda_i \frac{\partial t_i(R_i,\tau)}{\partial r_i}=\lambda_{i+1}\frac{\partial t_{i+1}(R_i,\tau)}{\partial r_{i+1}}, \quad (6)$$

где $i=1,2,...,N-1$.

Введем замену переменной

$$T_i(r_i,\tau)=t_i(r_i,\tau)-t_{cN}, \quad (7)$$

позволяющую перейти к задаче с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial T_i(r_i,\tau)}{\partial\tau}=a_i\left(\frac{\partial^2 T_i(r_i,\tau)}{\partial r_i^2}+A_{k,i}\frac{\partial T_i(r_i,\tau)}{\partial r_i}\right)+Q_i(r_i,\tau); \quad (8)$$

где $i=1,2,...,N;\ R_{i-1}\le r_i\le R_i;\ k=0,1,2;\ \tau>0;$

$$T_i(r_i,0)=t_{i,0}(r_i)-t_{cN}; \quad (9)$$

$$\lambda_1\frac{\partial T_1(R_0,\tau)}{\partial r_1}-\alpha_0\left(T_1(R_0,\tau)-t_{c0}+t_{cN}\right)=0; \quad (10)$$

$$\lambda_N\frac{\partial T_N(R_N,\tau)}{\partial r_N}+\alpha_N T_N(R_N,\tau)=0; \quad (11)$$

$$T_i(R_i,\tau)=T_{i+1}(R_i,\tau); \quad (12)$$

$$\lambda_i\frac{\partial T_i(R_i,\tau)}{\partial r_i}=\lambda_{i+1}\frac{\partial T_{i+1}(R_i,\tau)}{\partial r_{i+1}}; \quad (13)$$

где $i=1,2,...,N-1$.

Для исключения координаты r, вдоль которой свойства тела изменяются ступенчато, используется формула перехода к изображениям

$$W(\mu,\tau)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{a_i}\int_{R_{i-1}}^{R_i}\rho(r_i)T_i(r_i,\tau)S_i(r_i,\mu)dr_i, \quad (14)$$

где $\rho(r_i)$ – весовая функция, определяемая с точностью до постоянного множителя для систем координат:

$$\frac{d\rho(r_i)}{dr_i}-\frac{1}{r_i}\rho(r_i)=0; \quad (15)$$

декартовой

$$\rho(r_i)=1; \quad (16)$$

цилиндрической

$$\rho(r_i)=r_i; \quad (17)$$

сферической

$$\rho(r_i)=r_i^2. \quad (18)$$

Ядро интегрального преобразования $S_i(r_i,\mu)$ является решением задачи Штурма–Лиувилля с соответствующими граничными условиями, определяемыми с точностью до постоянного множителя (μ – параметр):

$$\left(\frac{d^2 S_i(r_i,\mu)}{dr_i^2}+A_{k,i}\frac{dS_i(r_i,\mu)}{dr_i}\right)+\frac{\mu^2}{a_i}S_i(r_i,\mu)=0, \tag{19}$$

$i=0,1,...,N;\;\; k=0,1,2;$

$$\lambda_1\frac{dS_1(R_0,\mu)}{dr_1}-\alpha_0 S_1(R_0,\mu)=0; \tag{20}$$

$$\lambda_N\frac{dS_N(R_N,\mu)}{dr_N}+\alpha_N S_N(R_N,\mu)=0; \tag{21}$$

$$\lambda_j\frac{dS_j(R_j,\mu)}{dr_j}=\lambda_{j+1}\frac{dS_{j+1}(R_j,\mu)}{dr_{j+1}}; \tag{22}$$

$$S_j(R_j,\mu)=S_{j+1}(R_j,\mu);\;\; j=1,...,N-1. \tag{23}$$

Решение уравнения (19) имеет вид

$$S(r_i,\mu)=C_{1,i}\exp\left(-\frac{r_i}{2}\left(A_{k,i}+\sqrt{A_{k,i}^2-4\frac{\mu^2}{a_i}}\right)\right)+$$

$$+C_{2,i}\exp\left(-\frac{r_i}{2}\left(A_{k,i}+\sqrt{A_{k,i}^2-4\frac{\mu^2}{a_i}}\right)\right), \tag{24}$$

для декартовой системы координат

$$S(r_i,\mu)=C_{1,i}\sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{a_i}}r_i\right)+C_{2,i}\cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{a_i}}r_i\right); \tag{25}$$

для цилиндрической

$$S(r_i,\mu)=C_{1,i}J_0\left(\frac{\mu}{\sqrt{a_i}}r_i\right)+C_{2,i}Y_0\left(\frac{\mu}{\sqrt{a_i}}r_i\right), \tag{26}$$

где $J_0(z)$ и $Y_0(z)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядков соответственно;
для сферической

$$S(r_i,\mu)=\frac{1}{r_i}\left(C_{1,i}\sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{a_i}}r_i\right)+C_{2,i}\cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{a_i}}r_i\right)\right). \tag{27}$$

Коэффициенты $C_{1,i}$ и $C_{2,i}$ определяются из граничных условий (20) – (23), причем $C_{1,1}=1$.

Для перехода к изображениям формулу (14) применим почленно к уравнению (8) и начальному условию (9).

В общем случае интегралы в правой части (14) берутся по частям с учетом граничных условий (10) – (13) и (20) – (23).

Запишем задачу в изображениях:

– частная производная по времени

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{a_i}\int_{R_{i-1}}^{R_i}\rho(r_i)\frac{\partial T_i(r_i,\tau)}{\partial\tau}S_i(r_i,\mu)dr_i=\frac{\partial W(\mu,\tau)}{\partial\tau}; \tag{28}$$

– частную производную по координате находим, применяя дважды формулу интегрирования по частям

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{a_i}\int\limits_{R_{i-1}}^{R_i}\rho(r_i)a_i\left(\frac{\partial^2 T_i(r_i,\tau)}{\partial r_i^2}+A_{k,i}\frac{\partial T_i(r_i,\tau)}{\partial r_i}\right)S_i(r_i,\mu)dr_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\rho(r_i)\frac{\partial T_i(r_i,\tau)}{\partial r_i}S_i(r_i,\mu)\Big|_{R_{i-1}}^{R_i}-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\rho(r_i)T_i(r_i,\tau)\frac{dS_i(r_i,\mu)}{dr_i}\Bigg|_{R_{i-1}}^{R_i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\int\limits_{R_{i-1}}^{R_i}\rho(r_i)T_i(r_i,\tau)\left(\frac{d^2 S_i(r_i,\mu)}{dr_i^2}+A_{k,i}\frac{dS_i(r_i,\mu)}{dr_i}\right)dr_i=$$

$$=\alpha_0\rho(R_0)(t_{cN}(\tau)-t_{c0}(\tau))S_1(R_0,\mu)-\mu^2 W(\mu,\tau).$$

В итоге, получаем

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{a_i}\int\limits_{R_{i-1}}^{R_i}\rho(r_i)a_i\left(\frac{\partial^2 t_i(r_i,\tau)}{\partial r_i^2}+A_{k,i}\frac{\partial t_i(r_i,\tau)}{\partial r_i}\right)S_i(r_i,\mu)dr_i=$$

$$=\alpha_0\rho(R_0)(t_{cN}(\tau)-t_{c0}(\tau))S_1(R_0,\mu)-\mu^2 W(\mu,\tau); \qquad (29)$$

– начальное условие

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{a_i}\int\limits_{R_{i-1}}^{R_i}\rho(r_i)T_{0i}(r_i)S_i(r_i,\mu)dr_i=W(\mu,0), \qquad (30)$$

– функция источника

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{a_i}\int\limits_{R_{i-1}}^{R_i}\rho(r_i)\frac{Q_i(r_i,\tau)}{c_i\rho_i}S_i(r_i,\mu)dr_i=G(\mu,\tau). \qquad (31)$$

Окончательно получаем задачу в изображениях:

$$\frac{\partial W(\mu,\tau)}{\partial\tau}+\mu^2 W(\mu,\tau)=G(\mu,\tau)+\alpha_0\rho(R_0)(t_{cN}(\tau)-t_{c0}(\tau))S_1(R_0,\mu); \qquad (32)$$

$$W(\mu,0)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{a_i}\int\limits_{R_{i-1}}^{R_i}\rho(r_i)T_{0i}(r_i)S_i(r_i,\mu)dr_i;$$

$$G(\mu,\tau)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{a_i}\int\limits_{R_{i-1}}^{R_i}\rho(r_i)\frac{Q_i(r_i,\tau)}{c_i\rho_i}S_i(r_i,\mu)dr_i,$$

решение которой примет вид

$$W(\mu_j,\tau)=\mathrm{e}^{-\mu_j^2\tau}\left(W(\mu_j,0)+\int\limits_0^{\tau}\left(G(\mu_j,\tau)+FW(\mu_j,\tau)\right)\mathrm{e}^{\mu_j^2\tau}d\tau\right), \qquad (33)$$

где

$$FW(\mu_j,\tau)=\alpha_0\rho(R_0)(t_{cN}(\tau)-t_{c0}(\tau))S_1(R_0,\mu). \qquad (34)$$

Обратный переход осуществляется по формуле

$$T_i(r_i,\tau)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{W(\mu_j,\tau)S_i(r_i,\mu_j)}{\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{a_i}\int_{R_{i-1}}^{R_i}\rho(r_i)S_i^2(r_i,\mu_j)dr_i}. \tag{35}$$

Подставляя выражение (14) в (33), получим

$$\frac{\lambda_i}{a_i}\int_{R_{i-1}}^{R_i}\rho(r_i)T_i(r_{i,l},\tau)S_i(r_i,\mu)dr_i =$$

$$= e^{-\mu_j^2\tau}\left(W(\mu_j,0)+\int_0^{\tau}\left(G(\mu_j,\tau)+FW(\mu_j,\tau)\right)e^{\mu_j^2\tau}d\tau\right), \tag{36}$$

где $T_i(r_{i,l},\tau)$ – измеренные значения температуры с учетом уравнения (7).

Из формулы (36) определяем значения параметра μ с точностью до постоянного множителя. Лучше выбирать первый корень во избежание накопления погрешности компьютерного счета. Для момента времени τ найдем искомое значение коэффициента теплоотдачи α_N

$$\alpha_N=\lambda_N\frac{\partial S_N(R_N,\mu)}{\partial r_N}\frac{1}{S_N(R_N,\mu)}. \tag{37}$$

Устойчивость метода обусловлена сглаживанием значений экспериментальных температур при интегрировании по толщине пластины.

Список литературы

1. Алифанов, О.В. Обратные задачи теплообмена / О.В. Алифанов. – М. : Машиностроение, 1988. – 280 с.

2. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск : Сиб. науч. изд-во, 2009. – 458 с.

3. Кузнецов, Г.В. Разностные методы решения задач теплопроводности : учеб. пособие / Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет. – Томск : Изд-во Томск. политехн. ун-та, 2007. – 172 с.

Solution to Inverse Heat Conduction Problems for Multilayer Bodies of Canonical Form

E.N. Tugolukov, V.A. Karpuk, A.V. Rukhov

Department "Equipment and Technology of Nanoproducts", TSTU; tugolukov.en@mail.ru

Key words and phrases: analytical solution; inverse problem of heat conductivity; mathematical modeling.

Abstract: The paper studies the methodology of analytical solution to inverse problems of heat conductivity for multi-layer areas of canonical form in Cartesian, cylindrical and spherical coordinates.

Lösung der Rückaufgaben der Wärmeleitfähigkeit für die mehrschichtigen Körper der kanonischen Form

Zusammenfassung: Es ist die Methodik der analytischen Lösung der Rückaufgaben der Wärmeleitfähigkeit für die mehrschichtigen Gebiete der kanonischen Form in den kartesischen, zylindrischen und sphärischen Koordinaten betrachtet.

Solution des problèmes inverses de la conductibilité thermique pour les corps multicouches de la forme canonique

Résumé: Est examinée la méthode de la solution analytique pour la solution des problèmes inverses de la conductibilité thermique pour les corps multicouches de la forme canonique dans les coordonnées rectilignes, cylindriques et sphériques.

Авторы: ***Туголуков Евгений Николаевич*** – доктор технических наук, профессор кафедры «Техника и технологии производства нанопродуктов»; ***Карпук Валентин Александрович*** – аспирант кафедры «Техника и технологии производства нанопродуктов»; ***Рухов Артем Викторович*** – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры «Техника и технологии производства нанопродуктов», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: ***Карпушкин Сергей Викторович*** – доктор технических наук, профессор кафедры «Автоматизированное проектирование технологического оборудования», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».
