

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В МЕТОДЕ НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ ДВУХСЛОЙНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Н.П. Жуков, Н.Ф. Майникова, И.В. Рогов, А.О. Антонов

*Кафедра «Энергообеспечение предприятий и теплотехника»,
ФГБОУ ВПО «ТГТУ»; teplotehnika@nnn.tstu.ru*

Ключевые слова и фразы: математическое моделирование; неразрушающий контроль; тепловое воздействие; теплофизические свойства.

Аннотация: Представлена математическая модель процесса теплопереноса от круглого плоского нагревателя в двухслойном теле. Сформулирована краевая задача теплопроводности. Получено решение применительно к неразрушающему методу теплового контроля.

Обозначения и аббревиатуры

a – температуропроводность, $\text{м}^2/\text{с}$; c – удельная теплоемкость, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; C_n – теплоемкость единицы площади бесконечного плоского нагревателя, $\text{Дж}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$; h – толщина слоя материала, м ; q – плотность теплового потока, $\text{Вт}/\text{м}^2$; T – избыточная температура, К ; x – координата, м ; ε – тепловая активность, $\text{Вт}\cdot\text{с}^{0.5}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$;	λ – теплопроводность, $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$; ρ – плотность, $\text{кг}/\text{м}^3$; τ – время, с ; ТФС – теплофизические свойства.
Индексы	
$1, 2$ – материалы первого и второго тел соответственно; n – материал подложки зонда.	

Применение в методах неразрушающего контроля теплофизических свойств материалов теплового воздействия постоянной мощности от круглого плоского нагревателя в виде диска, встроенного в подложку измерительного зонда, достаточно обосновано и полно представлено в работах [1–3].

Теоретическое обоснование теплового метода неразрушающего контроля двухслойных изделий, сформулированное в работе [4], распространяется на полуграниченные тела и не учитывает оттоки тепла в материал подложки измерительного зонда (рис. 1, а). Полученное в работе [4] решение краевой задачи теплопроводности не позволяет с достаточной точностью определять теплофизические свойства слоев двухслойных объектов.

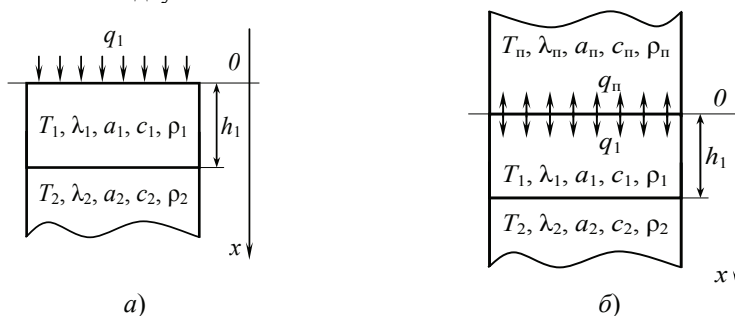


Рис. 1. Тепловые схемы метода при воздействии плоского бесконечного источника тепла на двухслойное изделие:

а – система, состоящая из ограниченного и полуграниченного тел;
 б – система, состоящая из ограниченного и двух полуграниченных тел

В целях повышения точности определения теплофизических свойств при разрушающем контроле двухслойных материалов в данной работе рассматривается система, состоящая из ограниченного и двух полуограниченных тел (рис. 1, б).

Ограниченный стержень толщиной h_1 приведен в соприкосновение с двумя полуограниченными стержнями. Теплофизические свойства стержней различны. В начальный момент времени на свободном конце ограниченного стержня начинает работать источник тепла постоянной мощности, который действует на протяжении всего процесса нагрева.

Требуется найти распределение температуры по длине стержней в любой момент времени. Сформулируем краевую задачу теплопроводности:

$$\frac{\partial T_1(x, \tau)}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 T_1(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad \tau > 0, \quad 0 < x < h_1; \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_2(x, \tau)}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 T_2(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad \tau > 0, \quad h_1 < x < \infty; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_{\Pi}(x, \tau)}{\partial \tau} = a_{\Pi} \frac{\partial^2 T_{\Pi}(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad \tau > 0, \quad -\infty < x < 0; \quad (3)$$

$$T_1(x, 0) = T_2(x, 0) = T_{\Pi}(x, 0) = 0; \quad (4)$$

$$T_1(0, \tau) = T_{\Pi}(0, \tau); \quad (5)$$

$$T_1(h_1, \tau) = T_2(h_1, \tau); \quad (6)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(h_1, \tau)}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2(h_1, \tau)}{\partial x}; \quad (7)$$

$$q = -\lambda_1 \frac{\partial T_1(0, \tau)}{\partial x} + \lambda_{\Pi} \frac{\partial T_{\Pi}(0, \tau)}{\partial x} + C_{\Pi} \frac{\partial T_1(0, \tau)}{\partial \tau}; \quad (8)$$

$$T_2(+\infty, \tau) = T_{\Pi}(-\infty, \tau) = 0. \quad (9)$$

Систему уравнений (1) – (9) решим методом интегрального преобразования Лапласа.

После преобразования система примет вид:

$$pT_{1L}(x, p) = a_1 \frac{d^2 T_{1L}(x, p)}{dx^2}, \quad 0 < x < h_1; \quad (10)$$

$$pT_{2L}(x, p) = a_2 \frac{d^2 T_{2L}(x, p)}{dx^2}, \quad h_1 < x < \infty; \quad (11)$$

$$pT_{\Pi L}(x, p) = a_{\Pi} \frac{d^2 T_{\Pi L}(x, p)}{dx^2}, \quad -\infty < x < 0; \quad (12)$$

$$T_{1L}(0, p) = T_{\Pi L}(0, p); \quad (13)$$

$$T_{1L}(h_1, p) = T_{2L}(h_1, p); \quad (14)$$

$$-\lambda_1 \frac{dT_{1L}(h_1, p)}{dx} = -\lambda_2 \frac{dT_{2L}(h_1, p)}{dx}; \quad (15)$$

$$\frac{q}{p} = -\lambda_1 \frac{dT_{1L}(0, p)}{dx} + \lambda_{\Pi} \frac{dT_{\Pi L}(0, p)}{dx} + C_{\Pi} p T_{1L}(0, p); \quad (16)$$

$$T_{2L}(+\infty, p) = T_{\Pi L}(-\infty, p) = 0. \quad (17)$$

Решения задачи в области изображений [5]:

$$T_{1L}(x, p) = A \exp\left(x\sqrt{\frac{p}{a_1}}\right) + B \exp\left(-x\sqrt{\frac{p}{a_1}}\right); \quad (18)$$

$$T_{2L}(x, p) = C \exp\left(x\sqrt{\frac{p}{a_2}}\right) + D \exp\left(-x\sqrt{\frac{p}{a_2}}\right); \quad (19)$$

$$T_{nL}(x, p) = E \exp\left(x\sqrt{\frac{p}{a_n}}\right) + F \exp\left(-x\sqrt{\frac{p}{a_n}}\right), \quad (20)$$

где A, B, C, D, E, F – постоянные относительно x и независимые относительно p величины, которые определяются исходя из граничных условий (13) – (17).

После преобразований получим зависимости:

$$A = \frac{qh^* \exp\left(-2h_1\sqrt{\frac{p}{a_1}}\right)}{p\sqrt{p}\left(h^*(\varepsilon_{II} - \varepsilon_I + C_H\sqrt{p}) \exp\left(-2h_1\sqrt{\frac{p}{a_1}}\right) + \varepsilon_{II} + \varepsilon_I + C_H\sqrt{p}\right)}; \quad (21)$$

$$B = \frac{q}{p\sqrt{p}\left(h^*(\varepsilon_{II} - \varepsilon_I + C_H\sqrt{p}) \exp\left(-2h_1\sqrt{\frac{p}{a_1}}\right) + \varepsilon_{II} + \varepsilon_I + C_H\sqrt{p}\right)}; \quad (22)$$

$$D = \frac{q \exp\left(h_1\sqrt{p} \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1 a_2}}\right) (h^* + 1)}{p\sqrt{p}\left(h^*(\varepsilon_{II} - \varepsilon_I + C_H\sqrt{p}) \exp\left(-2h_1\sqrt{\frac{p}{a_1}}\right) + \varepsilon_{II} + \varepsilon_I + C_H\sqrt{p}\right)}; \quad (23)$$

$$E = \frac{q\left(h^* \exp\left(-2h_1\sqrt{\frac{p}{a_1}}\right) + 1\right)}{p\sqrt{p}\left(h^*(\varepsilon_{II} - \varepsilon_I + C_H\sqrt{p}) \exp\left(-2h_1\sqrt{\frac{p}{a_1}}\right) + \varepsilon_{II} + \varepsilon_I + C_H\sqrt{p}\right)}, \quad (24)$$

$$C = F = 0, \quad (25)$$

где $h^* = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$.

Подставив (21) – (25) в (18) – (20), получим решения задачи в области изображений:

$$T_{1L}(x, p) = \frac{q\left(h^* \exp\left((x - 2h_1)\sqrt{\frac{p}{a_1}}\right) + \exp\left(-x\sqrt{\frac{p}{a_1}}\right)\right)}{p\sqrt{p}\left(h^*(\varepsilon_{II} - \varepsilon_I + C_H\sqrt{p}) \exp\left(-2h_1\sqrt{\frac{p}{a_1}}\right) + \varepsilon_{II} + \varepsilon_I + C_H\sqrt{p}\right)}; \quad (26)$$

$$T_{2L}(x, p) = \frac{q \exp\left(h_1\sqrt{p} \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1 \cdot a_2}}\right) \exp\left(-x\sqrt{\frac{p}{a_2}}\right) (h^* + 1)}{p\sqrt{p}\left(h^*(\varepsilon_{II} - \varepsilon_I + C_H\sqrt{p}) \exp\left(-2h_1\sqrt{\frac{p}{a_1}}\right) + \varepsilon_{II} + \varepsilon_I + C_H\sqrt{p}\right)}; \quad (27)$$

$$T_{nL}(x, p) = \frac{q \left(h^* \exp \left(-2h_1 \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) + 1 \right) \exp \left(x \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right)}{p \sqrt{p} \left(h^* (\varepsilon_{\text{п}} - \varepsilon_1 + C_{\text{н}} \sqrt{p}) \exp \left(-2h_1 \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) + \varepsilon_{\text{п}} + \varepsilon_1 + C_{\text{н}} \sqrt{p} \right)}. \quad (28)$$

Выполнить обратное преобразование Лапласа для выражений (26) – (28) не представляется возможным.

Краевую задачу теплопроводности (1) – (9) для схемы, представленной на рис. 1, б, также можно сформулировать относительно плотности теплового потока q . Дифференциальные уравнения теплопроводности относительно q будут аналогичны уравнениям (1) – (3) [5]. Следовательно, справедливо равенство

$$q_{1L}(x, p) = -\lambda_1 \frac{dT_{1L}(x, p)}{dx}, \quad 0 < x < h_1. \quad (29)$$

Найдем из выражения (26)

$$q_{1L}(x, p) = \frac{-\lambda_1 q \sqrt{\frac{p}{a_1}} \left(h^* \exp \left((x - 2h_1) \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) - \exp \left(-x \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) \right)}{p \sqrt{p} \left(h^* (\varepsilon_{\text{п}} - \varepsilon_1 + C_{\text{н}} \sqrt{p}) \exp \left(-2h_1 \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) + \varepsilon_{\text{п}} + \varepsilon_1 + C_{\text{н}} \sqrt{p} \right)}. \quad (30)$$

Для неразрушающего теплофизического контроля свойств двухслойных систем интерес представляют изменения температуры и плотности теплового потока от времени на поверхности первого тела (плоскость с координатой $x = 0$).

Найдем изображение плотности теплового потока для $x = 0$

$$q_{1L}(0, p) = \frac{-\lambda_1 q \sqrt{\frac{p}{a_1}} \left(h^* \exp \left(-2h_1 \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) - 1 \right)}{p \sqrt{p} \left(h^* (\varepsilon_{\text{п}} - \varepsilon_1 + C_{\text{н}} \sqrt{p}) \exp \left(-2h_1 \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) + \varepsilon_{\text{п}} + \varepsilon_1 + C_{\text{н}} \sqrt{p} \right)}. \quad (31)$$

Очевидно, что для определения теплофизических свойств слоев двухслойной системы необходимо «прогреть» ее на глубину больше h_1 , поэтому необходимо получить решение краевой задачи относительно q при больших значениях времени τ .

Применим теорему о конечном значении [6]:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{-\lambda_1 q p \sqrt{\frac{p}{a_1}} \left(h^* \exp \left(-2h_1 \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) - 1 \right)}{p \sqrt{p} \left(h^* (\varepsilon_{\text{п}} - \varepsilon_1 + C_{\text{н}} \sqrt{p}) \exp \left(-2h_1 \sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) + \varepsilon_{\text{п}} + \varepsilon_1 + C_{\text{н}} \sqrt{p} \right)} = \frac{q \varepsilon_2}{\varepsilon_{\text{п}} + \varepsilon_2}. \quad (32)$$

Таким образом, запишем

$$q_1(0, +\infty) = \frac{q \varepsilon_2}{\varepsilon_{\text{п}} + \varepsilon_2}. \quad (33)$$

Аналогично получим выражение

$$q_{\text{п}}(0, +\infty) = \frac{q \varepsilon_{\text{п}}}{\varepsilon_{\text{п}} + \varepsilon_2}. \quad (34)$$

Если на тепловой схеме (см. рис. 1, б) отбросить подложку и учесть потери тепловой энергии в нагревателе при разделении общего теплового потока на два, то можно упростить краевую задачу (1) – (9).

Тепловая схема упрощенной задачи представлена на рис. 1, а.
Решение задачи теплопроводности (см. рис. 1, а) получено в работе [4]:

$$T_1'(0, \tau) = \frac{2q_1\sqrt{\tau}}{\varepsilon_2\sqrt{\pi}} + \left(\frac{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} \right) \frac{q_1 h_1}{\lambda_1}. \quad (35)$$

Подставив выражение (33) в первое слагаемое выражения (35), получим одно из частных решений краевой задачи (1) – (9)

$$T_1(0, \tau) = \frac{2q\sqrt{\tau}}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_{\text{п}})\sqrt{\pi}}. \quad (36)$$

Найдем разность между выражением (26) в точке с координатой $x = 0$ и изображением выражения (36) и применим к ней теорему о конечном значении [6], после чего найдем сумму остальных частных решений краевой задачи (1) – (9):

$$T_{1L}(0, p) = \frac{q \left(h^* (\varepsilon_2 + \varepsilon_1 - c\sqrt{p}) \exp\left(\frac{-2h_1\sqrt{p}}{\sqrt{a_1}} \right) + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - C_{\text{н}}\sqrt{p} \right)}{p\sqrt{p}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(h^* (\varepsilon_{\text{п}} - \varepsilon_1 + C_{\text{н}}\sqrt{p}) \exp\left(\frac{-2h_1\sqrt{p}}{\sqrt{a_1}} \right) + \varepsilon_{\text{п}} + \varepsilon_1 + C_{\text{н}}\sqrt{p} \right)}; \quad (37)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{pq \left(h^* (\varepsilon_2 + \varepsilon_1 - C_{\text{н}}\sqrt{p}) \exp\left(-2h_1\sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - C_{\text{н}}\sqrt{p} \right)}{p\sqrt{p}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(h^* (\varepsilon_{\text{п}} - \varepsilon_1 + C_{\text{н}}\sqrt{p}) \exp\left(-2h_1\sqrt{\frac{p}{a_1}} \right) + \varepsilon_{\text{п}} + \varepsilon_1 + C_{\text{н}}\sqrt{p} \right)} =$$

$$= \frac{q(h_1(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2) - C_{\text{н}}\lambda_1)}{\lambda_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_{\text{п}})^2} = \frac{qh_1}{\lambda_1} \frac{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_{\text{п}})^2} - \frac{qC_{\text{н}}}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_{\text{п}})^2}. \quad (38)$$

Таким образом, решение краевой задачи теплопроводности (1) – (9) имеет вид

$$T_1(0, \tau) = \frac{2q\sqrt{\tau}}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_{\text{п}})\sqrt{\pi}} + \frac{qh_1}{\lambda_1} \frac{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_{\text{п}})^2} - \frac{qC_{\text{н}}}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_{\text{п}})^2}. \quad (39)$$

Данное решение возможно использовать для нахождения ТФС первого тела, если известна толщина h_1 и ТФС подложки зонда $\varepsilon_{\text{п}}$ или для нахождения толщины первого тела при известных ТФС.

Список литературы

1. Жуков, Н.П. Многомодельные методы и средства неразрушающего контроля теплофизических свойств материалов и изделий : монография / Н.П. Жуков, Н.Ф. Майникова // Монография. – М. : Машиностроение-1, 2004. – 288 с.
2. Жуков, Н.П. Моделирование процесса теплопереноса от плоского источника тепла постоянной мощности при теплофизических измерениях / Н.П. Жуков, Н.Ф. Майникова // Инженер.-физ. журн. – 2005. – Т. 78, № 6. – С. 56–63.
3. Многомодельный метод неразрушающего определения теплофизических свойств / Н.П. Жуков [и др.] // Инженер.-физ. журн. – 2012. – Т. 85, № 1. – С. 188–194.
4. Теоретическое обоснование теплового метода неразрушающего контроля двухслойных изделий / Н.П. Жуков [и др.] // Вопр. соврем. науки и практики. Ун-т им. В.И. Вернадского. Сер. Техн. науки. – 2009. – № 9 (23). – С. 93–99.

5. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 599 с.

6. Каргашов, Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э.М. Каргашов. – М. : Высшая школа, 2001. – 550 с.

Modeling of Heat Transfer in Non-Destructive Testing of Two-Layer Materials

N.P. Zhukov, N.F. Maynikova, I.V. Rogov, A.O. Antonov

*Department "Energy Supply of Companies and Heat Engineering", TSTU;
teplotehnika@nnn.tstu.ru*

Key words and phrases: mathematical modeling; non-destructive testing; thermal effects; thermal properties.

Abstract: The paper describes mathematical model of heat transfer process from a circular flat heater in a two-layer body. The boundary value problem of heat conduction is formulated. A solution in relation to the non-destructive method of thermal control is obtained.

Modellierung der Wärmeübertragung in der Methode der nicht zerstörenden Kontrolle der zweischichtigen Materialien

Zusammenfassung: Es ist das mathematische Modell des Prozesses der Wärmeleitung vom runden flachen Erhitzer im zweischichtigen Körper dargelegt. Es ist die Ortsaufgabe der Wärmeleitung formuliert. Es ist die Entscheidung in Bezug auf der nicht zerstörenden Methode der thermischen Kontrolle erhalten.

Modélage du transfert de chaleur dans la méthode du contrôle non-destructif des matériaux à deux couches

Résumé: Est présenté le modèle mathématique du processus de la conductibilité de chaleur à partir du réchauffeur rond plat dans un corps à deux couches. Est formulé le problème de limite de la conductibilité de chaleur. Est reçue la solution appliquée à la méthode du contrôle thermique non-destructif.

Авторы: *Жуков Николай Павлович* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Энергообеспечение предприятий и теплотехника»; *Майникова Нина Филипповна* – доктор технических наук, профессор кафедры «Энергообеспечение предприятий и теплотехника»; *Рогов Иван Владимирович* – кандидат технических наук, доцент кафедры «Энергообеспечение предприятий и теплотехника»; *Антонов Антон Олегович* – аспирант кафедры «Энергообеспечение предприятий и теплотехника», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: *Глинкин Евгений Иванович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Биомедицинская техника», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».