

**СИНТЕЗ СОПРЯЖЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ
ПО КРИТЕРИЯМ ДОЛГОВЕЧНОСТИ**

Ю.В. Воробьев¹, Н.В. Воробьева²

*Кафедры: «Теория машин, механизмов и детали машин»,
ФГБОУ ВПО «ТГТУ» (1); «Высшая математика», ФГБОУ ВПО «Московский
государственный машиностроительный университет (МАМИ)», г. Москва (2);
tmm-dm@mail.nnn.tstu.ru*

Ключевые слова и фразы: долговечность; качение с проскальзыванием; критерий; синтез; сопряженные профили.

Аннотация: Описана методика проектирования сопряженных профилей по критериям долговечности посредством определения локальных свойств кривых, образующих сопряженные профили и удовлетворяющих принятым критериям долговечности. Приведено соответствующее математическое обоснование критерия износа и усталостного выкрашивания.

Сопряженные профили, реализующие функцию положения в механизмах с высшими кинематическими парами, как правило, лимитируют долговечность механизма в целом. Основными видами разрушения контактирующих поверхностей, которым принадлежат эти профили, являются нормальный эксплуатационный износ, усталостное выкрашивание и задир.

Наиболее распространенным относительным движением сопряженных профилей является качение с проскальзыванием. В этих условиях могут реализовываться все перечисленные виды разрушения. Их критерии должны удовлетворять зависимости

$$K_r = I(P_n, \rho_{\text{пр}}, v_{\text{ск}}), \quad (1)$$

включающей нормальную силу P_n , действующую в контакте, приведенный радиус кривизны $\rho_{\text{пр}}$, скорость скольжения $v_{\text{ск}}$ поверхностей. Заметим, что уравнение Г. Герца включает только первые два параметра.

В целом эффективность проектирования сопряженных профилей по заданной долговечности будет определяться двумя факторами: точностью принятых критериев, удовлетворяющих уравнению (1), и возможностью осуществлять управление в широком диапазоне переменными, входящими в это уравнение.

Точность критериев характеризуется расхождением между расчетной долговечностью и фактической. Аппарат синтеза должен обеспечивать целенаправленное управление локальными элементами сопряженных профилей в процессе проектирования.

Координаты точки контакта K сопряженных профилей могут быть выражены через отрезок PK , соответствующий расстоянию от полюса зацепления P до точки K и угол β , отсчитываемый от линии межосевого расстояния звеньев до нормали

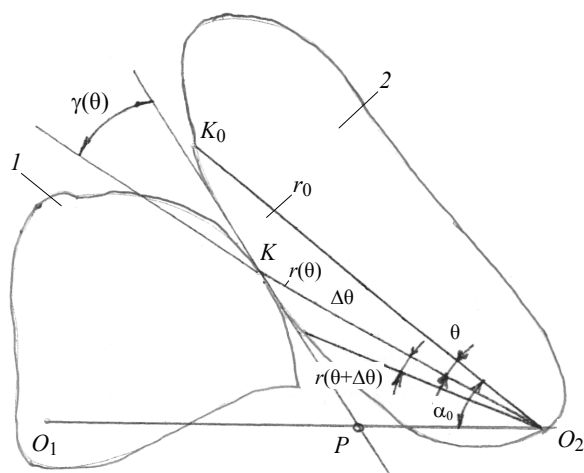


Рис. 1. Схема отсчета положений точки касания звеньев

в точке K (рис. 1). Так как P_n зависит от угла β , а $v_{ск}$ от величины отрезка PK , то выражение (1) приводится к виду

$$K_r = I_1(PK, \beta, \rho_1, \rho_2),$$

где ρ_1, ρ_2 — радиусы кривизны сопряженных профилей в точке контакта.

Переменные β, ρ_1, ρ_2 определяют локальные свойства кривых, образующих сопряженные профили. Управляя этими переменными и величиной отрезка PK , можно удовлетворить любому критериальному выражению, заданному в виде равенства или неравенства.

С этих позиций известные методы проектирования сопряженных профилей в ряде случаев оказываются малоэффективными. Они реализуются при условии, что один из профилей должен быть задан, и позволяют определить профиль, сопряженный заданному. В такой постановке задача синтеза наиболее просто разрешима, но фактически сводится к поиску оптимальных параметров механизма, а не оптимальных профилей. В результате при указанном подходе искусственно сужается область поиска нужного решения, что не всегда может оказаться приемлемым.

Общая постановка задачи синтеза предполагает использование такого математического аппарата, который позволяет получать все возможные решения в пределах принятых ограничений. Такой синтез можно назвать обобщенным. В этом случае профиль одного из звеньев должен быть представлен уравнением произвольной кривой. Это уравнение можно записать в полярной форме (см. рис. 1)

$$r = r_0 \exp \left(\int_{\theta_0}^{\theta} \operatorname{ctg} \gamma(\theta) d\theta \right). \quad (2)$$

Такая форма записи является наиболее удобной вследствие того, что входящие в уравнение переменные углы γ и θ достаточно просто выражаются через варьируемые величины PK и β . Чтобы задача синтеза была в нужной степени определена, следует помимо критерия задать еще два уравнения или неравенства, включающие в себя величины PK, β, ρ_1 и ρ_2 . Это могут быть уравнения, характеризующие геометрическое и кинематическое взаимодействия сопряженных профилей (например, уравнение Эйлера–Савари, уравнение ускорения относительно

го скольжения профилей), а также позволяющие определять радиусы кривизны ρ_1 или ρ_2 . Решение системы уравнений позволяет найти область определения функции $\gamma(\theta)$, а при наличии дополнительных условий — ее вид. Однако получаемые при этом математический аппарат и решение задачи синтеза сопряженных профилей могут оказаться слишком сложными.

Более рациональным будет путь решения поставленной задачи, при котором произвольная кривая формируется наращиванием по кускам, удовлетворяя условию неразрывности кривизны. Для этого достаточно на каждом участке кривой подбирать функцию $\gamma(\theta)$ и положение полюса O' таким образом (рис. 2), чтобы выполнялось равенство

$$\rho = r \frac{(1 + \operatorname{ctg}^2 \gamma(\theta))^{\frac{3}{2}}}{1 + \operatorname{ctg}^2 \gamma(\theta) + \frac{\gamma'(\theta)}{\sin^2 \gamma(\theta)}} = r \sin \gamma - (r_A^2 - r^2 \cos^2 \gamma)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

при начальных значениях $\theta = \theta_0$ и $\gamma = \gamma(\theta_0)$. Первое равенство (3) следует из уравнения (2).

В этом случае общий вид $\gamma(\theta)$ будет соответствовать кусочно-постоянной функции. Если полюс кривой, заданной уравнением (2), располагать на окружности, построенной на радиусе кривизны в точке стыковки кривых как на диаметре, то правая часть второго равенства (3) заменяется на выражение $r(1 + \operatorname{ctg}^2 \gamma)^{\frac{1}{2}}$ и равенство (3) удовлетворяется при $\gamma(\theta) = \operatorname{const}$.

Тогда уравнение (2) приводится к виду $r = r e^{\theta \operatorname{ctg} \gamma}$ и является уравнением логарифмической спирали. Отсюда следует, что оперируя уравнением логарифмической спирали и перемещая ее центр по окружности с диаметром ρ , можно наиболее просто наращивать кривую, у которой кривизна меняется монотонно. Протяженность стыкуемых участков определяется выбранным критерием, но ее можно уменьшать и тем точнее воспроизводить оптимальные профили. Алгоритм наращивания кривой по кускам, соответствующим логарифмической спирали, составляется на основе условия перехода от участка I к участку II (см. рис. 2)

$$\frac{r_{i-1}^{(I)}}{\sin \gamma_c^{(I)}} = \frac{r_{i-1}^{(II)}}{\sin \gamma_c^{(II)}}$$

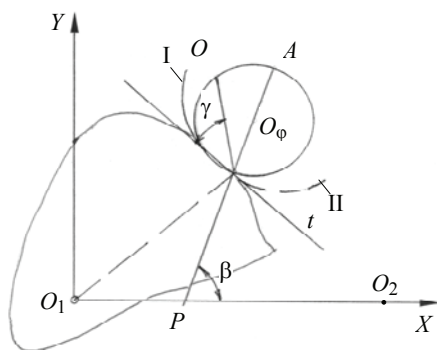


Рис. 2. Схема положений центра логарифмической спирали при условии неразрывности кривизны в точке контакта

где $(i - 1)$ — шаг, предшествующий тому, в котором заданный критерий не выполняется.

Рассмотренный способ в своей основе содержит принцип одновременного синтеза сопряженных профилей по заданному критерию, осуществляющего целенаправленное управление их локальными элементами. Профиль, сопряженный наращиваемому, определяется одним из существующих методов. Рассмотрим подробнее этот вопрос, имея уравнение (4) и применяя метод обращения движения.

Решение для случая преобразования вращательного движения ведущего звена во вращательное движение ведомого может быть получено следующим образом. Имеем две прямоугольные системы координат: подвижную $\Sigma = \{O, x, y\}$, ось Oy которой проходит через начальную точку касания K_0 сопряженных профилей, и неподвижную $\Sigma_1 = \{O_1, x_1, y_1\}$ с осью O_1x_1 , проходящей через точку O_2 , являющуюся центром поворота ведомого звена. Кроме того точки O_1 и O_2 – центры соответственно логарифмической спирали и поворота ведущего звена. В начальном положении ведомого звена обозначим углы α_0 и γ_0 (см. рис. 1).

Уравнение логарифмической спирали относительно центра O имеет вид

$$r_c = OK_0 \exp(\operatorname{ctg} \gamma_c \theta), \quad (4)$$

где θ – текущий угол между вектором $\overline{OK_0}$ и переменным радиус-вектором кривой.

При обращенном движении точка O_2 совершает движение по окружности, а точка O перемещается относительно точки O_2 в соответствии с заданным законом движения ведомого звена $\psi = \psi(\varphi)$.

Профиль ведущего звена ищем как огибающую семейства профилей ведомого звена на основании системы уравнений

$$\begin{cases} F(x(x_1, y_1, \varphi), y(x_1, y_1, \varphi)) = 0, \\ \frac{dF}{d\varphi} = 0. \end{cases}$$

Для логарифмической спирали первое уравнение системы записывается в виде

$$\sqrt{x^2 + y^2} - OK_0 \exp\left(\operatorname{ctg} \gamma_c \arctg \frac{y}{x}\right) = 0, \quad (5)$$

второе уравнение

$$x \frac{dx}{d\varphi} + y \frac{dy}{d\varphi} + \operatorname{ctg} \gamma_c \left(x \frac{dy}{d\varphi} - y \frac{dx}{d\varphi} \right) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) приводится к уравнению второго порядка относительно x_1 и y_1 . Записанное по степеням y_1 , оно имеет вид

$$a(x_1)y_1^2 + b(x_1)y_1 + c(x_1) = 0. \quad (7)$$

Таким образом, имеем систему уравнений (5) и (7), решение которой выполняем численными методами с подстановкой следующих значений

$$\begin{aligned} a(x_1) &= 1 + \frac{d\psi}{d\varphi}; \\ b(x_1) &= O_1O_2 \left(1 + 2 \frac{d\psi}{d\varphi} \sin \varphi - \cos \varphi \operatorname{tg} \gamma_c \right) - OK_0 \left(1 + \frac{d\psi}{d\varphi} \right) (\sin(\alpha_0 + \\ &\quad + \gamma_0 + \gamma_c + \varphi + \psi) + \cos(\alpha_0 + \gamma_0 + \gamma_c + \varphi + \psi) \operatorname{tg} \gamma_c); \\ c(x_1) &= \left(1 + \frac{d\psi}{d\varphi} \right) x_1^2 + x_1 \left(O_1O_2 \left(1 + 2 \frac{d\psi}{d\varphi} \right) \cos \varphi + OK_0 \left(1 + \frac{d\psi}{d\varphi} \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \cos(\alpha_0 + \gamma_0 + \gamma_c + \varphi + \psi) + O_2 K_0 \left(1 + \frac{d\psi}{d\varphi} \right) \cos(\alpha_0 + \varphi + \psi) \Big) - \\
& - x_1 \left(O_1 O_2 \sin \varphi \operatorname{tg} \gamma_c - O K_0 \left(1 + \frac{d\psi}{d\varphi} \right) \sin(\alpha_0 + \gamma_0 + \gamma_c + \varphi + \psi) \operatorname{tg} \gamma_c - \right. \\
& - O_2 K_0 \left(1 + \frac{d\psi}{d\varphi} \right) \sin(\alpha_0 + \varphi + \psi) \Big) \operatorname{tg} \gamma_c - O K_0 \frac{d\psi}{d\varphi} O_1 O_2 (\cos(\alpha_0 + \gamma_0 + \\
& + \gamma_c + \psi) + \sin(\alpha_0 + \gamma_0 + \gamma_c + \psi) \operatorname{tg} \gamma_c) - O_2 K_0 \frac{d\psi}{d\varphi} O_1 O_2 (\cos(\alpha_0 + \psi) + \\
& + \sin(\alpha_0 + \psi) \operatorname{tg} \gamma_c) + \frac{d\psi}{d\varphi} O_1 O_2^2.
\end{aligned}$$

Проверку существования огибающей удобно выполнять по следующему условию: если $\varphi_i \neq \varphi_{i+1}$, то $(x_i, y_i) \neq (x_{i+1}, y_{i+1})$.

Рассмотрим решение для случая преобразования вращательного движения ведущего звена в поступательное движение ведомого.

По-прежнему $\Sigma_1 = \{O_1, x_1, y_1\}$ и $\Sigma = \{O, x, y\}$ – соответственно неподвижная и подвижная системы координат. Одноименные оси координат параллельны и одинаково направлены. Примем начальную точку касания ведущего и ведомого звеньев лежащей на оси $O_1 x_1$, а направление поступательного перемещения ведомого звена – под углом δ к оси Ox .

При повороте осей координат Σ на угол φ в направлении $(-\omega_1)$ новой точке касания K профилей будет соответствовать перемещение ведомого звена на величину S , отвечающую заданному закону движения $S(\varphi)$. При этом центр логарифмической спирали O_c , совпадающий с точкой O , последовательно перейдет в точки O' и O'' , отстоящие друг от друга на величину S .

Первое уравнение исходной системы имеет вид

$$F(x, y, \varphi) = \sqrt{x^2 + y^2} - O K_0 \exp\left(\operatorname{ctg} \gamma_c \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - u_0\right)\right) = 0,$$

где u_0 – угол между осью Ox и радиусом-вектором логарифмической спирали в начальном положении ведомого звена.

Второе уравнение этой системы

$$\frac{dF}{d\varphi} = x \frac{dx}{d\varphi} + y \frac{dy}{d\varphi} - \operatorname{ctg} \gamma_c \left(x \frac{dy}{d\varphi} - y \frac{dx}{d\varphi} \right) = 0.$$

Окончательно получим систему, решение которой дает координаты x_1, y_1 профиля ведущего звена

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - O K_0 \exp\left(\operatorname{ctg} \gamma_c \left(\operatorname{arcsin} \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \gamma_c - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 0, \\ a(x_1)y_1^2 + b(x_1)y_1 + c(x_1) = 0, \end{cases}$$

где

$$a(x_1) = -\operatorname{ctg} \gamma_c;$$

$$\begin{aligned}
b(x_1) &= O_1 K_0 (\cos \varphi - \sin \varphi \operatorname{ctg} \gamma_c) + S (\cos(\varphi - \delta) - \sin(\varphi - \delta) \operatorname{ctg} \gamma_c) + \frac{dS}{d\varphi} \times \\
&\times (\sin(\varphi - \delta) - \cos(\varphi - \delta) \operatorname{ctg} \gamma_c) + O K_0 (\sin(\varphi + \gamma_c) + \cos(\varphi + \gamma_c) \operatorname{ctg} \gamma_c); \\
c(x_1) &= -x_1^2 \operatorname{ctg} \gamma_c + x_1 (O_1 K_0 (\sin \varphi + \cos \varphi \operatorname{ctg} \gamma_c) + S (\sin(\varphi - \delta) + \\
&+ \cos(\varphi - \delta) \operatorname{ctg} \gamma_c) - \frac{dS}{d\varphi} (\cos(\varphi - \delta) + \sin(\varphi - \delta) \operatorname{ctg} \gamma_c) - \\
&- O K_0 (\cos(\varphi + \gamma_c) - \sin(\varphi + \gamma_c) \operatorname{ctg} \gamma_c) + \frac{dS}{d\varphi} (O_1 K_0 (\cos \delta + \sin \delta \operatorname{ctg} \gamma_c) + \\
&+ S + O K_0 (\sin(\varphi + \gamma_c) + \cos(\varphi + \gamma_c) \operatorname{ctg} \gamma_c)).
\end{aligned}$$

Восстановление профиля наращиваемого звена в неподвижной системе координат осуществляется по формулам перехода:

1) для случая преобразования вращательного движения ведущего звена во вращательное движение ведомого

$$x_1 + iy_1 = ((x + iy)e^{i\varphi} - O_1 O_2)e^{i\psi} + O_1 O_2,$$

отсюда

$$\begin{aligned}
x_1 &= x \cos(\varphi + \psi) - y \sin(\varphi + \psi) - O_1 O_2 \cos \psi + O_1 O_2, \\
y_1 &= x \sin(\varphi + \psi) + y \cos(\varphi + \psi) - O_1 O_2 \sin \psi + O_1 O_2;
\end{aligned}$$

2) для случая преобразования вращательного движения ведущего звена в поступательное движение ведомого

$$x_1 + iy_1 = (x + iy)e^{i\varphi} - iS,$$

отсюда

$$\begin{aligned}
x_1 &= x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\
y_1 &= x \sin \varphi + y \cos \varphi - S.
\end{aligned}$$

При численном выражении сопряженных профилей радиусы кривизны профилей ρ_1 , ρ_2 и скорость скольжения $v_{ск}$ в контакте можно определить по координатам точек профилей.

Как было указано, эффективность синтеза по критериям долговечности непосредственно зависит от имманентности принятых критериев преобладающему виду разрушения поверхностей контакта.

В качестве критериев заедания можно рекомендовать критерии, предложенные в работе [1].

Для других видов разрушения поверхностей контакта, работающих в условиях качения с проскальзыванием, критерии требуют уточнения [2–4]. Эти критерии должны отражать закономерности контактного взаимодействия поверхностей [5], следовательно, базироваться в первую очередь на решениях контактной задачи, учитывающей одновременное нагружение нормальной и касательной силами. Существующие решения этой задачи приводят к разным результатам расчетов и не подтверждены в должной мере экспериментальной проверке.

В связи с этим выполнено решение контактной задачи, постановка которой отличается тем, что граничные условия содержат экспериментальные данные об изменении вдоль линии контакта локального коэффициента сцепления, полученные с использованием метода фотоупругости.

Под линией контакта в данном случае следует понимать линию, по которой происходит контакт нагруженных поверхностей, ограниченных сопряженными профилями, в торцевой плоскости. Локальный коэффициент сцепления представ-

ляет собой отношение касательных напряжений $p_t = \tau_{xy}$, действующих на поверхности вдоль линии контакта, к нормальным напряжениям p_n в соответствующих точках.

Исходя из аналитического решения этой задачи, получены следующие критерии для двух основных видов разрушения поверхностей контакта: износа и усталостного выкрашивания.

Критерий износа

$$\Delta H = k \frac{p_{t \max}}{p_{t \text{пред}} - p_{t \max}} n_{\text{ц}},$$

где $p_{t \max} = p_{n \max} f \sqrt{\frac{f}{2f - f_{\text{сц}}}}$ – наибольшее касательное напряжение, действующее на поверхности вдоль линии контакта, $p_{n \max}$ – наибольшее нормальное напряжение, f – коэффициент трения, $f_{\text{сц}}$ – коэффициент сцепления, равный отношению касательного усилия к нормальному (зависит от P_n и $v_{\text{ск}}$) [1]; $n_{\text{ц}}$ – число циклов нагружения; $p_{t \text{пред}}$ – значение касательного напряжения p_t , при котором начинается задир

$$p_{t \text{пред}} \approx 0,866 f (p_{n \max}).$$

Характер зависимости $\Delta H(p_{t \max})$ позволяет выделить две стадии изнашивания: первая стадия – нормальное эксплуатационное изнашивание, вторая – катастрофическое изнашивание.

Критерий усталостного выкрашивания следует из общепринятого механизма зарождения усталостных трещин, определяемого действием касательного напряжения τ_{\max} . Известно также, что в условиях качения с проскальзыванием в подавляющем большинстве случаев усталостная трещина развивается с поверхности контакта. В связи с этим критерий усталостного выкрашивания выражает степенную зависимость числа циклов нагружения $n_{\text{ц}}$ от наибольшего касательного напряжения, действующего на поверхности контакта $\tau_{\max \text{ пов}}$ (кривая усталости), для которого на основании решения указанной контактной задачи получено выражение

$$\tau_{\max \text{ пов}} = 0,89 p_{n \max} \sqrt{(1,5 f_{\text{сц}} - f)^2 + 2,4 f f_{\text{сц}}}.$$

Все приведенные критерии удовлетворяют виду (1) и прошли экспериментальную проверку.

Требование множественности решений в пределах принятых ограничений может быть наиболее полно удовлетворено в случае, если профиль одного из звеньев представить общим уравнением кривой, которое можно интерпретировать как уравнение произвольной кривой.

Список литературы

1. Вирабов, Р.В. О реализации касательной силы в зоне контакта упругих тел при качении / Р.В. Вирабов // *Машиноведение*. – 1967. – № 2. – С. 93–96.
2. Воробьев, Ю.В. Проектирование кулачковых механизмов заданной долговечности / Ю.В. Воробьев, А.Д. Ковергин // *Республиканский межведомственный научно-технический сборник* / под ред. Ю.Н. Онищенко. – Киев, 1976. – Вып. 23. – С. 80–83.

3. Пинегин, С.В. Контактная прочность и сопротивление качению / С.В. Пинегин. – М. : Машиностроение, 1969. – 243 с.

4. Галин, Л.А. Контактные задачи теории упругости при наличии износа / Л.А. Галин // Прикладная математика и механика. – 1976. – Т. 40, № 6. – С. 981–986.

5. Воробьёв, Ю.В. Аналитические критерии долговечности при качении со скольжением / Ю.В. Воробьёв // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2010. – Т. 16, № 2. – С. 397–403.

Synthesis of Conjugated Profiles by Durability Criteria

Yu.V. Vorobyov¹, N.V. Vorobyova²

Departments: “Theory of Machines, Mechanisms and Machine Parts”, TSTU (1); “Higher Mathematics”, “Moscow State Engineering University (MAMI)”, Moscow (2); tmm-dm@mail.nnn.tstu.ru

Key words and phrases: conjugated profiles; criterion; durability; rolling with a slippage; synthesis.

Abstract: The paper describes a method of designing conjugated profiles by the durability criteria, determining the local properties of curves forming conjugated profiles and meeting the accepted criteria of durability. We present an appropriate mathematical justification and criteria for wear and fatigue spalling.

Synthese der verknüpften Profile nach den Kriterien der Haltbarkeit

Zusammenfassung: Es wird die Methodik der Projektierung der verknüpften Profile nach den Kriterien der Haltbarkeit mittels der Bestimmung der lokalen Eigenschaften der Kurven, die die verknüpften Profile bilden und den Kriterien der Haltbarkeit befriedigen, vorgeschlagen. Es wird die entsprechende mathematische Begründung und die Kriterien des Verschleißes und der Zeitstandabbröckelung angeführt.

Synthèse des profils conjugués d’après les critères de la longévité

Résumé: Est proposée la méthode de la conception des profils conjugués d’après les critères de la longévité par la définition des propriétés locales des courbes formant des profils conjugués et conformes aux critères admis de la longévité. Est effectuée une argumentation correspondante et les critères de l’usure et du délitage de fatigue.

Авторы: *Воробьёв Юрий Валентинович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Теория машин, механизмов и детали машин», ФГБОУ ВПО «ТГТУ»; *Воробьёва Нина Валентиновна* – кандидат технических наук, доцент кафедры «Высшая математика», ФГБОУ ВПО «Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)», г. Москва.

Рецензент: *Пучков Николай Петрович* – доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».