УДК 517.98

ОБ ОДНОМ ВЛОЖЕНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В.И. Фомин

Кафедра «Прикладная математика и механика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ»; kulikov@apmath.tstu.ru

Ключевые слова и фразы: весовая норма; весовое пространство; вложение; интегральная сумма; константа вложения.

Аннотация: Построено весовое пространство непрерывных на промежутке функций; указана его связь в смысле вложения с гёльдеровым пространством.

Пусть $C[a,b]$ – линейное пространство непрерывных на промежутке $[a,b]$ функций; u, $\kappa \in C[a,b]$, причем κ положительна и строго убывает на $[a,b]$. Разобьем промежуток $[a,b]$ произвольной системой точек $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < < t_n = b$ на n частей. Положим $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta t_k$. Выберем на каждом $[t_{k-1}, t_k]$ произвольную точку ξ_k $(1 \le k \le n)$. Построим интегральную сумму вида

$$S_n(u,\kappa) = \sum_{k=1}^{n} \kappa(\xi_k) \left| u\left(\xi_{i_k}\right) \right| \Delta t_{i_k}, \tag{1}$$

где $\{i_k\}_{k=1}^{n}$ – такая перестановка индексов $1, 2, \ldots, n$, что $\left|u\left(\xi_{i_1}\right)\right| \ge \left|u\left(\xi_{i_2}\right)\right| \ge \ldots$ $\ldots \ge \left|u\left(\xi_{i_n}\right)\right|$.

Определение 1. Функция u называется κ-интегрируемой на промежутке $[a,b]$, если существует конечный предел интегральных сумм $S_n(u,\kappa)$ при $\lambda \to 0$, не зависящий от способа разбиения промежутка $[a,b]$ на части и выбора точек ξ_k; при этом такой предел называется κ-интегралом функции $u(t)$ по промежутку $[a,b]$ и обозначается

$$\int_a^b \kappa(t) \downarrow |u(t)|\, dt.$$

Замечание 1. Каждая функция $u \in C[a,b]$ κ-интегрируема на $[a,b]$.

Действительно, запишем соответствующие суммы Дарбу:

$$s = \sum_{k=1}^{n} \kappa(t_k)\, m_{i_k} \Delta t_{i_k};$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} \kappa(t_{k-1})\, M_{i_k} \Delta t_{i_k},$$

где m_{i_k}, M_{i_k} – соответственно точные нижняя и верхняя границы функции $|u(t)|$ на промежутке $[t_{i_k-1}, t_{i_k}]$. В силу ограниченности функций $\kappa(t)$ и $|u(t)|$ получаем

$$S-s=\sum_{k=1}^{n}\left[\kappa\left(t_{k-1}\right)M_{i_k}-\kappa\left(t_k\right)m_{i_k}\right]\Delta t_{i_k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\kappa\left(t_{k-1}\right)\left(M_{i_k}-m_{i_k}\right)\Delta t_{i_k}+\sum_{k=1}^{n}\left[\kappa\left(t_{k-1}\right)-\kappa\left(t_k\right)\right]m_{i_k}\,\Delta t_{i_k}\le$$

$$\le T_1\sum_{k=1}^{n}\left(M_{i_k}-m_{i_k}\right)\Delta t_{i_k}+T_2\sum_{k=1}^{n}\left[\kappa\left(t_{k-1}\right)-\kappa\left(t_k\right)\right]\Delta t_{i_k}, \qquad (2)$$

где T_1, T_2 – некоторые постоянные. Первая сумма в правой части неравенства (2) есть разность сумм Дарбу функции $|u(t)|$ и при $\lambda\to 0$ сходится к нулю в силу интегрируемости $|u(t)|$. Вторая сумма в правой части (2) тоже сходится к нулю при $\lambda\to 0$. Действительно, возьмем произвольное сколь угодно малое фиксированное число $\varepsilon>0$. Рассмотрим разбиение промежутка $[a,b]$ с диаметром $\lambda<\dfrac{\varepsilon}{\kappa(a)-\kappa(b)}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\kappa\left(t_{k-1}\right)-\kappa\left(t_k\right)\right]\Delta t_{i_k}<\frac{\varepsilon}{\kappa(a)-\kappa(b)}\sum_{k=1}^{n}\left[\kappa\left(t_{k-1}\right)-\kappa\left(t_k\right)\right]=\varepsilon.$$

Итак, $S-s\underset{\lambda\to 0}{\to}0$. Следовательно, функция u κ-интегрируема на промежутке $[a,b]$.

Замечание 2. Если $|u(t)|$ монотонна на $[a,b]$, то в случае невозрастания $|u(t)|$

$$\int_a^b\kappa(t)\downarrow|u(t)|\,dt=\int_a^b\kappa(t)\,|u(t)|\,dt,$$

а в случае неубывания $|u(t)|$

$$\int_a^b\kappa(t)\downarrow|u(t)|\,dt=\int_a^b\kappa(t)\,|u(b+a-t)|\,dt.$$

Определение 2. Весовым пространством $C_{\kappa(t)}[a,b]$ с весом $\kappa(t)$ называется линейное пространство непрерывных на $[a,b]$ функций с нормой

$$\|u\|_{\kappa(t)}=\int_a^b\kappa(t)\downarrow|u(t)|\,dt. \qquad (3)$$

Неравенство треугольника для нормы (3) показывается с помощью неравенства треугольника для весовой нормы в конечномерном пространстве [1].

Пусть $p\in R$, $p>1$; $L_p[a,b]$ – линейное пространство непрерывных на $[a,b]$ функций с нормой

$$\| u \|_p = \left(\int_a^b | u(t) |^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема. Справедливо вложение

$$L_p \, [a,b] \subset C_{\kappa(t)} \, [a,b]$$

с константой вложения

$$C_{\kappa(t),\, p} = \left(\int_a^b [\kappa(t)]^q dt \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{4}$$

где $q = \dfrac{p}{p-1}$.

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $u \in L_p \, [a,b]$. Разобьем промежуток $[a,b]$ на n равных частей длины $\Delta t = \dfrac{b-a}{n}$. Тогда интегральная сумма (1) для к-интеграла функции u имеет вид

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \kappa(\xi_k) \left| u\left(\xi_{i_k}\right) \right| \Delta t.$$

В силу неравенства Гёльдера [2, с. 52] получаем

$$S_n \le \left[\sum_{k=1}^{n} [\, \kappa(\xi_k) \,]^q \right]^{\frac{1}{q}} \left[\sum_{k=1}^{n} \left| u\left(\xi_{i_k}\right) \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \Delta t =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} [\, \kappa(\xi_k) \,]^q \Delta t \right]^{\frac{1}{q}} \left[\sum_{j=1}^{n} \left| u\left(\xi_j\right) \right|^p \Delta t \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

Переходя в неравенстве (5) к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\int_a^b \kappa(t) \downarrow | u(t) | \, dt \le \left[\int_{\mathrm{a}}^{b} [\kappa(t)]^q \, dt \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_{\mathrm{a}}^{b} | u(t) |^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}},$$

то есть

$$\| u \|_{\kappa(t)} \le C_{\kappa(t),\, p} \| u \|_p,$$

где $C_{\kappa(t),\, p}$ имеет вид (4). Константа (4) является наименьшей из возможных констант в неравенстве $\| u \|_{\kappa(t)} \le C \| u \|_p$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Фомин, В.И. Об оптимальных вложениях гёльдерова и весовых пространств числовых последовательностей / В.И. Фомин // Докл. Акад. наук. – 1998. – Т. 362, № 2. – С. 168–169.

2. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1976. – 544 с.

On an Embedding of Function Spaces

V.I. Fomin

Department «Applied Mathematics and Mechanics», TSTU;
kulikov@apmath.tstu.ru

Key words and phrases: constant embedding; embedding; integral sum; weight norm; weight space.

Abstract: Weight space of continued functions on the interval was constructed; its relationship in terms of the embedding with Hölder space was indicated.

Über eine Einlage der funktionalen Räume

Zusammenfassung: Es ist der Waageraum der auf dem Abstand ununterbrochenen Funktionen aufgebaut; es ist seine Verbindung im Sinne der Einlage mit dem Gelderraum angegeben.

Sur un placement des espaces fonctionnelles

Résumé: Est construit une espace pondérable des continus dans une intervalle des fonctions; est indiqué son lien dans le sens du placement avec une espace de Hölder.

Автор: ***Фомин Василий Ильич*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и механика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: ***Жуковский Евгений Семенович*** – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института физики, математики и информатики, ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина», г. Тамбов.
