УДК 536.2.083

АМПЛИТУДНЫЙ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИЙ МЕТОД ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЛН ДЛЯ КОНТРОЛЯ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ ТВЕРДЫХ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Е.Л. Артюхина

Кафедра «Управление качеством и сертификация», ФГБОУ ВПО «ТГТУ»; artyukhina@yahoo.com

Ключевые слова и фразы: амплитудный полигармонический метод; коэффициент температуропроводности; краевые задачи теплопереноса; математическое моделирование; температурные волны.

Аннотация: Разработан амплитудный полигармонический метод температурных волн. Получено решение инверсной коэффициентной задачи теплопереноса для цилиндрического однородного изотропного образца, на плоской поверхности которого задана периодически изменяющая температура, интеграл от которой по периоду равен нулю, а длина волны меньше высоты цилиндра.

Введение

Широкое применение методов температурных волн в практике измерения тепловых свойств материалов объясняется рядом неоспоримых преимуществ, среди которых высокая помехозащищенность, возможность проводить эксперименты при низком уровне температурных возмущений, независимость результатов измерений от начального распределения температур, высокая информативность [1].

Существующие технические средства контроля температуропроводности, реализующие метод температурных волн, позволяют проводить измерения тепловых свойств материалов в широком диапазоне их изменения (от теплоизоляторов до металлов).

Однако в абсолютном большинстве применяемые для контроля температуропроводности методы температурных волн являются моногармоническими. При этом используется два основных подхода к решению поставленной задачи. Первый заключается в зондировании исследуемого образца тепловым потоком одной частоты. В этом случае о тепловых свойствах материалов судят по реакции на тепловое возмущение. Во втором случае из зондирующего теплового потока и реакции на тепловое возмущение выделяют разложением в ряд Фурье одинаковые гармоники [2, 3], по которым восстанавливают искомый коэффициент температуропроводности. Очевидными недостатками описанных методов являются: использование только части информации о тепловом процессе и значительные погрешности, связанные с гармоническим анализом температур и тепловых потоков. Альтернативой изложенным способам определения температуропроводности являются полигармонические методы температурных волн [4, 5], лишенные описанных недостатков.

Постановка и решение прямой задачи теплопереноса

В значительном числе случаев при реализации метода температурных волн исследуемые образцы представляют собой цилиндрические диски, радиус которых существенно превосходит высоту. Для таких образцов рассмотрим задачу теплопереноса. При описании процесса теплопереноса в исследуемом образце предположим однородность и изотропность материала, отсутствие в нем физико-химических превращений, приводящих к зависимости свойств от времени. Будем считать периодические процессы установившимися. Кроме того, $\int_0^{\tau_0} T d\tau = 0$, где τ_0 – период изменения температуры.

Температура на плоской поверхности образца представляет собой периодическую функцию.

Математическая модель описанного процесса имеет вид:

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0,\ 0 < x < \infty), \tag{1}$$

$$T(x,0) = T_0 = 0\ , \tag{2}$$

$$T(0,\tau) = T_A f(\tau)\ , \tag{3}$$

где

$$f(\tau) = \begin{cases} 1,\ k\tau_0 < \tau < \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\tau_0; \\ -1,\ \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\tau_0 < \tau < (k+1)\tau_0, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots; \tag{4}$$

$T(x,\tau)$ – температура тела в точке с координатой x в момент времени τ, К; a – коэффициент температуропроводности, м²/с; T_0 – начальная температура тела, К; T_A – амплитуда колебания температуры, К; $f(\tau)$ – некоторая периодическая функция времени, определенная ниже.

Для решения сформулированной задачи (1) – (3) воспользуемся результатом работы [6], полученным для случая $f(\tau) = \cos(\omega\tau - \varphi)$ в установившемся состоянии,

$$T(x,\tau) = T_A \exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)\cos\left(\omega\tau - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right). \tag{5}$$

Этот результат позволяет получить решение задачи (1) – (3) для произвольной периодической функции $f(\tau)$ с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, раскладывая эту функцию в ряд Фурье,

$$f(\tau) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega\tau - \varphi_k). \tag{6}$$

Общее решение, полученное на основании принципа суперпозиции, является суммой частных решений (5) для каждого члена ряда (6)

$$T(x,\tau) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp\left(-x\sqrt{\frac{k\omega}{2a}}\right)\cos\left(k\omega\tau - \varphi_k - x\sqrt{\frac{k\omega}{2a}}\right). \tag{7}$$

В случае, когда температура поверхности исследуемого образца изменяется по закону (4), решение краевой задачи теплопереноса (1) – (4) в соответствии с (7) имеет вид

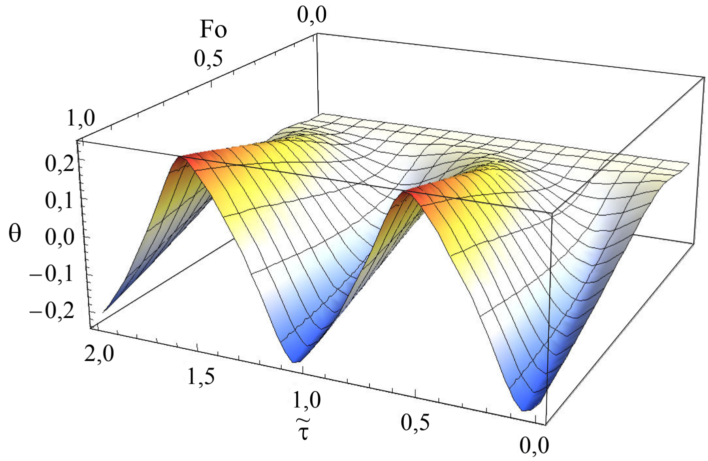

Рис. 1. Плоская температурная волна в образце

$$T(x,\tau) = \frac{4T_A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\exp\left(-x\sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{a\tau_0}}\right)\sin\left(\frac{(4k+2)\pi\tau}{\tau_0} - x\sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{a\tau_0}}\right). \quad (8)$$

Перейдя в уравнении (8) к безразмерным переменным $\mathrm{Fo} = \frac{a\tau_0}{x^2}$, $\tilde{\tau} = \frac{\tau}{\tau_0}$, $\vartheta(x,\tilde{\tau}) = \frac{T(x,\tau)}{T_A}$, получим

$$\vartheta(\mathrm{Fo},\tilde{\tau}) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\exp\left(-\sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{\mathrm{Fo}}}\right)\sin\left((4k+2)\pi\tilde{\tau} - \sqrt{\frac{(2\mathrm{k}+1)\pi}{\mathrm{Fo}}}\right). \quad (9)$$

Распределение относительных температур $\vartheta(x,\tilde{\tau}) = \frac{T(x,\tau)}{T_A}$ по глубине исследуемого образца иллюстрируется графиком (рис. 1).

Постановка и решение коэффициентной задачи теплопроводности

Уравнение температурной волны в безразмерном виде (8) является функцией двух переменных – числа Фурье и относительного времени. Для каждого заданного числа Fo_i, находим $\tilde{\tau}_i^{\max}$ такие что $\vartheta\left(\mathrm{Fo}_i, \tilde{\tau}_i^{\max}\right) = \vartheta_{\max i}$, где $\vartheta_{\max i}$ – амплитуда i-й температурной волны. Таким образом, получаем двухмерный массив данных $\{\mathrm{Fo}_i, \vartheta_{\max i}\}$. Аппроксимируя сформированный массив, получим функцию $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}(\vartheta_{\max})$.

Поскольку период колебания τ_0 и расстояние от источника задания теплового возмущения до места расположения датчика температуры x в эксперименте заданы, искомый коэффициент температуропроводности a определяется по формуле $a = \frac{\mathrm{Fo}(\vartheta_{\max})x^2}{\tau_0}$, где $\mathrm{Fo}(\vartheta_{\max})$ – аппроксимация таблично заданной функции.

Ниже рассмотрен пример реализации описанного метода. Основываясь на решении (8), рассчитываем $\vartheta(\mathrm{Fo}_i, \tilde{\tau}_i)$ для фиксированных значений Fo в диапазоне Fo [1…70] и $\tilde{\tau}$ [0…1]. Строим графики зависимостей $\vartheta(\mathrm{Fo}_i = \mathrm{const}, \tilde{\tau}_i)$ (рис. 2).

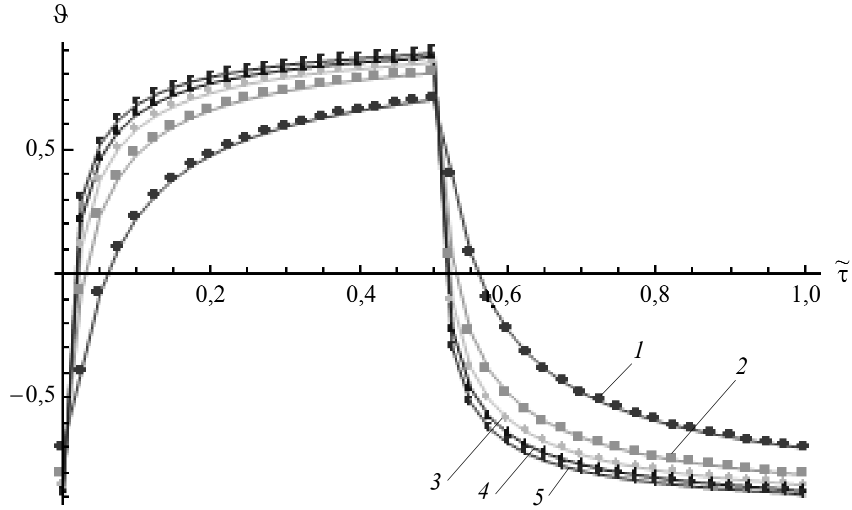

Рис. 2. Температурные кривые $\vartheta(\mathrm{Fo}_i, \tilde{\tau}_i)$:
1 – 10; *2* – 25; *3* – 35; *4* – 55; *5* – 70

С использованием пакета Mathematica определяем координаты максимумов функций температурных кривых $\vartheta_{\max i}$ (таблица).

Аппроксимируем массив данных $\{\mathrm{Fo}_i, \vartheta_{\max i}\}$ выражением

$$\mathrm{Fo} = 0{,}925 + \frac{47{,}409}{\vartheta_{\max}^4} - \frac{43{,}0423}{\vartheta_{\max}^3} + \frac{15{,}3267}{\vartheta_{\max}^2} - \frac{3{,}3964}{\vartheta_{\max}}. \quad (10)$$

На рисунке 3 представлена аппроксимация таблично заданной зависимости амплитуды от числа Фурье $\vartheta_{\max i}(\mathrm{Fo}_i)$.

Координаты максимумов функций $\vartheta_{\max i}$

i	Fo_i	$\vartheta_{\max i}$
1	1	0,2384
2	3	0,4866
3	5	0,5890
4	7	0,6477
5	10	0,7021
6	15	0,755
7	20	0,7874
8	25	0,8068
9	30	0,8271
10	35	0,8407
11	40	0,852
12	45	0,8506
13	50	0,8654
14	55	0,8689
15	60	0,8779
16	70	0,8843

Так для стандартных образцов из полиметилметакрилата при $x = 2{,}8\cdot10^{-3}$ м, $\tau_0 = 80$ с, значение $\vartheta_{\max}$ составило 1,675, соответствующее ему Fo – 1,224, а найденное значение коэффициента температуропроводности $a = 1{,}2\cdot10^{-7}$ м²/с.

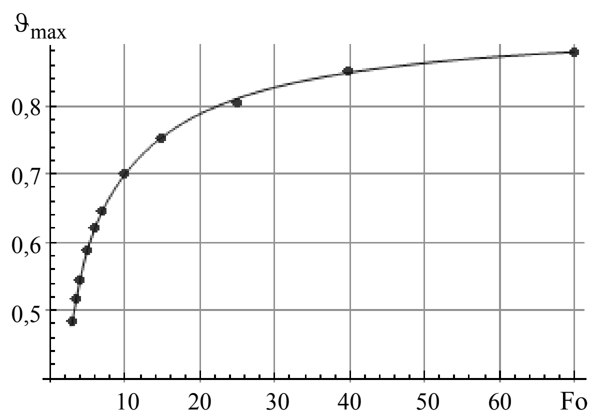

Рис. 3. Аппроксимация таблично заданной зависимости $\vartheta_{\max}(\mathrm{Fo})$

Выводы

Разработанный амплитудный полигармонический метод температурных волн, обладая всеми преимуществами методов температурных волн, отличается от моногармонических методов на порядок более высокими значениями регистрируемых температур и существенно бóльшим объемом информации, что позволяет повысить точность контроля температуропроводности и в то же время существенно сократить время измерений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (государственный контракт № 16.526.11.6010 от 28.10.2011 г.).

Список литературы

1. Кравчун, С.Н. Метод периодического нагрева в экспериментальной теплофизике / С.Н. Кравчун, А.А. Липаев. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2006. – 208 с.
2. Angstrom, A.J. Neue Methode das Warmeleiltungs-vermogen der Korper zu bestimmen / A.J. Angstrom // Ann. d. Physik. – 1881. – Bd. 14. – S. 513–530.
3. Филиппов, Л.П. Измерение теплофизических свойств веществ методом периодического нагрева / Л.П. Филиппов. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 105 с.
4. Артюхина, Е.Л. Фазовый полигармонический метод температурных волн для контроля температуропроводности твердых изотропных материалов / Е.Л. Артюхина, С.В. Мищенко // Вопр. соврем. науки и практики. Ун-т им. В.И. Вернадского. − 2013. − № (45). – С. 48–52.
5. Артюхина, Е.Л. Теоретическое обоснование полигармонических методов температурных волн для контроля температуропроводности твердых изотропных материалов / Е.Л. Артюхина, С.В. Мищенко // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 30–37.
6. Лыков, А. В. Конвекция и тепловые волны / А.В. Лыков, Б.М. Берковский. – М. : Энергия, 1974. – 286 с.

Amplitude Polyharmonic Method of Temperature Control for Thermal Waves of Solid Isotropic Materials

E.L. Artyukhina

Department "Quality Management and Certification", TSTU; artyukhina@yahoo.com

Key words and phrases: coefficient of thermal conductivity; heat transfer boundary value problems; mathematical modeling; polyharmonic amplitude method; temperature waves.

Abstract: A method of temperature polyharmonic amplitude waves has been developed. A solution of the inverse problem of heat transfer coefficient for a homogeneous isotropic cylindrical specimen on a flat surface has been obtained. Periodically changing temperature is given, its integral by period is zero and the wavelength is less than the height of the cylinder.

Polyharmonische Amplitudenmethode der Temperaturwellen für die Kontrolle der Temperaturleitfähigkeit der festen Isotropmaterialien

Zusammenfassung: Es ist die polyharmonische Amplitudenmethode der Temperaturwellen entwickelt. Es ist die Lösung der inversen Koeffizientaufgabe der Wärmeübertragung für das zylindrischen gleichartigen isotropen Muster erhalten, auf dessen flachen Oberfläche die periodisch ändernde Temperatur aufgegeben ist, das Integral von deren nach der Periode der Null gleich ist, und die Länge der Welle ist kleiner als Höhe des Zylinders.

Méthode d'amplitude polyharmonieuse des ondes de température pour le contrôle de la conductibilié de température des matériaux solides isotropes

Résumé: Est élaborée la méthode d'amplitude polyharmonieuse pour les ondes de température. Est obtenue la solution du problème inverse de coefficient du transfert de température pour un échantillon cylindrique isotrope sur la superficie plate duquel est donnée la température qui change périodiquement et dont l'intégrale par période est égal au zéro et la longueur de l'onde est moindre que la hauteur du cylindre.

Автор: ***Артюхина Екатерина Леонидовна*** – аспирант кафедры «Управление качеством и сертификация», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: ***Пономарев Сергей Васильевич*** – доктор технических наук, профессор, исполняющий обязанности заведующего кафедрой «Управление качеством и сертификация», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».
