УДК 517.925.52

К КЛАССИЧЕСКОЙ ГИПОТЕЗЕ О СТРУКТУРЕ АТТРАКТОРА В СИСТЕМЕ ЛОРЕНЦА

С.М. Дзюба[1], Н.А. Рубанов[1], С.Г. Семержинский[2]

*Кафедры «Коммерция и бизнес-информатика» (1),
«Информационные системы и защита информации» (2), ФГБОУ ВПО «ТГТУ»;
nikitarubanov@gmail.com*

Ключевые слова и фразы: положения равновесия; сепаратрисы; система и аттрактор Лоренца; структура аттрактора; счетное всюду плотное множество седловых предельных циклов.

Аннотация: Доказано, что при классических значениях параметров аттрактор в системе Лоренца не содержит положения равновесия с координатами $(0,0,0)$ и выходящих из него сепаратрис.

Введение. Рассмотрим систему Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \tag{1}$$

в которой σ, r и b – некоторые положительные числа, играющие роль параметров [1]. Вычислительные эксперименты, изложенные в [1], привели к заключению, что при следующих значениях параметров

$$\sigma = 10, \quad r = 28, \quad b = 8/3 \tag{2}$$

у системы (1) отсутствуют какие-либо устойчивые положения равновесия и устойчивые предельные циклы. Это компенсировалось наличием в (1) аттрактора.

Аттрактор Лоренца является множеством чрезвычайно сложной структуры, к которому при $t \to +\infty$ стремятся почти все траектории системы (1). Классическая гипотеза, восходящая к Лоренцу, считает, что аттрактор содержит положение равновесия O с координатами $(0,0,0)$ и выходящие из него сепаратрисы Γ_1 и Γ_2. Кроме того, система (1) имеет также положения равновесия O_1 и O_2 с координатами $\left(-\sqrt{(r-1)b}, -\sqrt{(r-1)b}, r-1\right)$ и $\left(+\sqrt{(r-1)b}, +\sqrt{(r-1)b}, r-1\right)$ соответственно. При этом строго установлено, что положения равновесия O_1 и O_2 представляют собой седлофокусы с двумерным отталкивающим и одномерным притягивающим многообразиями решений, а положение равновесия O – седлоузел с двумерным притягивающим и одномерным отталкивающим многообразиями решений.

В дополнение к сказанному гипотеза о топологической структуре аттрактора в системе (1) предполагает существование в нем счетного всюду плотного множества седловых предельных циклов с неограниченно увеличивающимся периодом и всюду плотного множества устойчивых по Пуассону незамкнутых траекторий [1, 2].

Весьма важным в классической гипотезе обстоятельством является то, что в ней существенное значение имеет поведение сепаратрис Γ_1 и Γ_2. Именно, по гипотезе считается, что обе эти сепаратрисы при $t \to +\infty$ стремятся к положению равновесия O. Отсюда, в силу теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных значений, следует предположение о существовании в системе (1) циклов со сколь угодно большим периодом. Отсюда же непосредственно следует предположение о седловом характере циклов, экспоненциальном разбегании траекторий и существовании устойчивых по Пуассону незамкнутых траекторий.

Заметим теперь, что гипотеза о структуре аттрактора Лоренца во многом держится на результатах вычислительных экспериментов, проводимых стандартными методами численного анализа [1–3]. Более того, в настоящее время отсутствуют примеры диссипативных систем, в которых доказано существование аттракторов, имеющих описанную выше структуру. При этом данные, приведенные в работе [4] и полученные с помощью специально разработанного метода символьных вычислений в распределенной компьютерной среде, приводят к новой гипотезе о структуре аттрактора, отличной от классической.

Целью настоящей работы является попытка строгого и возможно полного рассмотрения классической гипотезы об аттракторе Лоренца при значениях параметров (2). Это рассмотрение базируется на данных работы [4], но прямо не использует какие-либо вычисления и вытекающие из вычислений дополнительные предположения.

Положение равновесия O. В современной литературе по теории хаотической динамики установились следующие определения.

Компактное инвариантное множество $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ называется *притягивающим множеством*, если почти для всех точек p из некоторой его окрестности выполнено равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(g^t p, \mathcal{B}) = 0,$$

где ρ – расстояние от точки пространства $\mathbb{R}^n$ до $\mathcal{B}$; g^t – соответствующий фазовый поток. Связное же притягивающее множество называется *аттрактором*.

Существенную ошибку в классической гипотезе о структуре аттрактора Лоренца устанавливает следующая теорема.

Теорема. *Аттрактор B в системе (1) не содержит ни положение равновесия* O, *ни сепаратрисы* Γ_1 *и* Γ_2. *Более полно, положение равновесия* O *является изолированной особой точкой, причем существует такая ее окрестность* Δ, *что в* Δ *отсутствуют циклы и устойчивые по Пуассону незамкнутые траектории.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что для каждого действительного числа z_0 система (1) имеет решение

$$\begin{cases} x(t) = 0, \\ y(t) = 0, \\ z(t) = z_0 \exp(-bt). \end{cases} \tag{3}$$

Поэтому траектория L_+, описываемая произвольным решением системы (1) с начальными значениями

$$(0, 0, 0, z_0), \tag{4}$$

где $z_0 < 0$, при $t \to +\infty$ стремится к положению равновесия O вдоль оси O_z пространства $\mathbb{R}^3$.

Обозначим через A часть притягивающего множества B системы (1) без положения равновесия O и выходящих из него сепаратрис Γ_1 и Γ_2. Согласно теореме о непрерывной зависимости решений от начальных значений, некоторый пучок траекторий P_+, не принадлежащих множеству B и проходящих в непосредственной близости от L_+, образует в множестве A «дыру» положительного диаметра.

В самом деле, обозначим через $f(t, p)$ движение, порожденное решением системы (1) с начальным значением [5]

$$(0, p),\ p = (x_0, y_0, z_0),$$

то есть

$$f(t, p) = (x(t, p), y(t, p), z(t, p)).$$

Тогда для каждой пары (T, ε) положительных чисел можно указать такое положительное число δ, что

$$|f(t, p) - f(t, p_0)| < \varepsilon$$

всякий раз, когда $|p - p_0| < \delta$ и $|t| \le T$ [5]; здесь $p_0 = (0,0,z_0)$ и $z_0 > 0$. Следовательно, для каждого достаточно малого положительного числа λ можно указать такое положительное число μ_λ, зависящее только от λ и удовлетворяющее условию

$$\lim_{\lambda \to 0} \mu_\lambda = 0, \tag{5}$$

что множество

$$Z_+(\lambda) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \le \lambda, z \ge \mu_\lambda\} \tag{6}$$

будет полностью заполнено траекториями, не принадлежащими множеству B.

Заметим теперь, что в силу существования решения (3) траектория L_-, описываемая любым решением системы (1) с начальными значениями (4), где $z_0 < 0$, при $t \to +\infty$ также стремится к положению равновесия O. При этом для каждого достаточно малого $\lambda > 0$ найдется такое $\mu_\lambda > 0$, зависящее только от λ и удовлетворяющее условию (5), что множество

$$Z_-(\lambda) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \le \lambda, z \le \mu_\lambda\} \tag{7}$$

также будет полностью заполнено траекториями, не принадлежащими множеству B.

Для определенности обозначим P_- через пучок траекторий, не принадлежащих множеству B и проходящих в непосредственной близости от траектории L_-. При этом по построению без какой-либо потери общности можно считать, что объединение $P_+ \cup P_- \cup \mathrm{O} \cup L_+ \cup L_-$ пучков P_+ и P_-, положения равновесия O и траекторий L_+ и L_- содержит двумерное многообразие M, локально гомеоморфное фазовой плоскости с фазовым портретом типа «устойчивый узел».

Далее, пусть ν – некоторое достаточно малое положительное число и $q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка любой из сепаратрис седлоузла O (например, Γ_1), удовлетворяющая условию

$$|q_0| < \nu. \tag{8}$$

Легко видеть, что для каждой пары (T, ε) положительных чисел можно указать такое положительное число δ, что

$$|f(t,q) - f(t,q_0)| < \varepsilon,$$

всякий раз, когда $|q - q_0| < \delta$ и $|t| \le T$; здесь q – любая подходящая точка пространства $\mathbb{R}^3$. Поэтому для всех $T > 0$ можно указать такое $\nu > 0$, что ν – окрестность дуги $\Gamma_1(T)$ траектории Γ_1, определенной при $|t| \le T$ движением $f(t, q_0)$, не содержит дуг траекторий, принадлежащих множеству B (за исключением Γ_1, Γ_2 и O, если последние траектории принадлежат B).

Действительно, для некоторого $\nu > 0$ обозначим через S_ν часть пространства $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющую условию (8). Для любого значения ν число λ в формулах (6) и (7), очевидно, может быть выбрано так, что множество

$$S_\nu \bigcup Z_+(\lambda) \bigcup Z_-(\lambda)$$

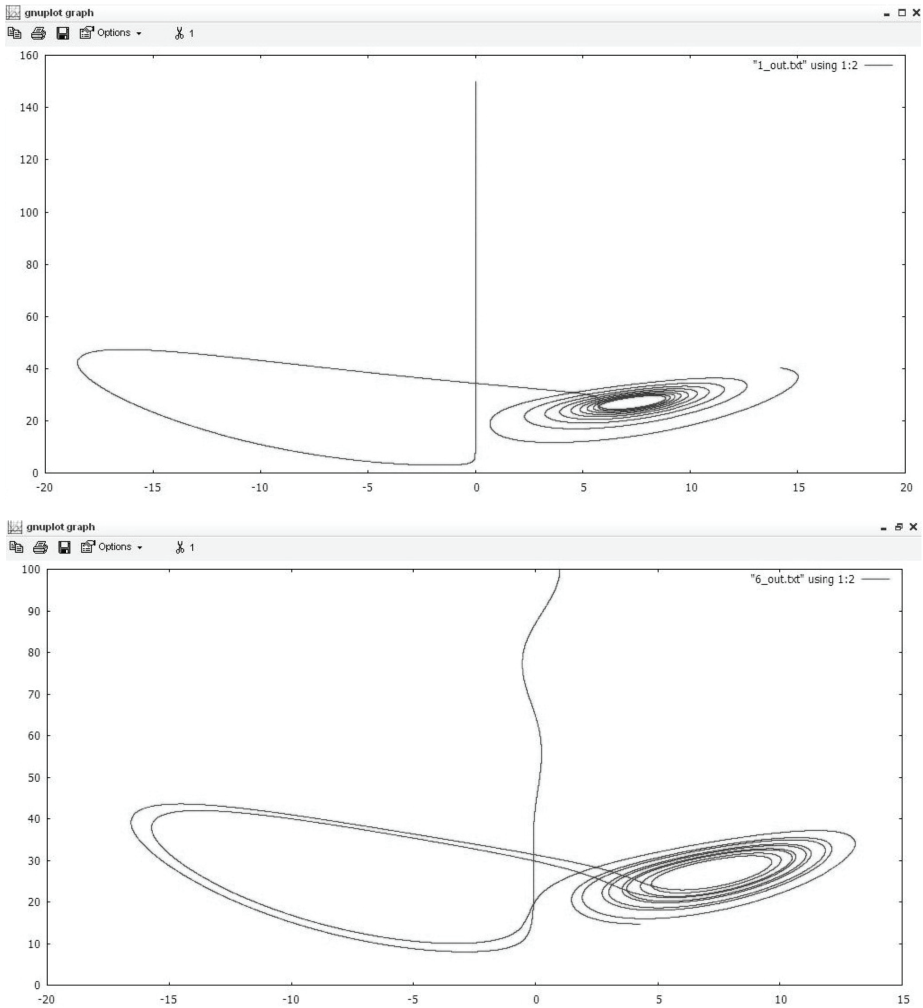
связно и содержит точку O. Но положение равновесия O есть седлоузел с отталкивающим многообразием $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, состоящим из сепаратрис Γ_1 и Γ_2. Поэтому для каждого положительного числа T число $\nu > 0$ может быть подобрано так, что ν – окрестность дуги $\Gamma_1(T)$ траектории Γ_1, определенной при $|t| \le T$ движением $f(t, q_0)$, будет полностью заполнено точкой O, некоторой дугой траектории Γ_2, дугами траекторий L_+, L_- и пучков P_+ и P_- [6].

Заметим теперь, что выбор сепаратрисы Γ_1 (а не Γ_2) выше, по существу, не играл никакой роли. Более того, стенки каждого из цилиндров $Z_+(\lambda)$ и $Z_-(\lambda)$ замкнуты и целиком состоят из дуг (или точек) траекторий пучков P_+ и P_-. Поэтому в силу единственности решений системы (1) траектории пучков P_+ и P_- не имеют ω-предельных точек на множестве $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$. Другими словами, сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 не являются частью никакого ω-предельного и, следовательно, притягивающего множества [7].

Таким образом, теорема доказана.

Обсуждение. В силу рассмотренной выше теоремы положение классической гипотезы о принадлежности положения равновесия O и сепаратрис Γ_1 и Γ_2 аттрактору B неверно. Но предположение гипотезы о существовании в системе (1) всюду плотного множества циклов, имеющих сколь угодно большой период, держится именно на том, что $O \in B, \Gamma_1 \in B$ и $\Gamma_2 \in B$ [2]. Следовательно, согласно теореме принадлежность аттрактору всюду плотного множества циклов с неограниченно возрастающим периодом требует доказательства.

Вид некоторых типичных траекторий, проходящих через «дыру» в аттракторе представлен на рисунке. Эти траектории были построены с помощью специально разработанного метода символьного интегрирования дифференциальных уравнений в распределенной компьютерной среде [4].



Типические траектории, проходящие через «дыру» в аттракторе Лоренца

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00961, 10-07-00136).

Список литературы

1. Lorenz, E.N. Deterministic Nonperiodic Flow / E.N. Lorenz // J. Athmos. Sci. – 1963. – Vol. 20. – P. 130–141.

2. Афраймович, B.C. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца / B.C. Афраймович, В.В. Быков, Л.П. Шильников // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 234, № 2. – С. 336–339.

3. Берже, П. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности / П. Берже, И. Помо, К. Видаль. – М. : Мир, 1991. – 368 с.

4. Приближенное аналитическое решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью / А.П. Афанасьев [и др.] // Журн. вычислител. математики и мат. физики. – 2013. – Т. 53, № 2. – С. 321–328.

5. Немыцкий, В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений / В.В. Немыцкий, В.В. Степанов. – М. : URSS, 2004. – 448 с.

6. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М. : Мир, 1970. – 720 с.
7. Хейл, Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. – М. : Мир, 1970. – 421 с.

To the Classical Hypotheses on the Attractor Structure in the Lorenz System

S.M. Dzyuba[1], N.A. Rubanov[1], S.G. Semerzhinsky[2]

Departments "Commerce and Business Informatics" (1), "Information Systems and Information Safety", TSTU; nikitarubanov@gmail.com

Key words and phrases: attractor structure; countable dense set of saddle limit cycles; equilibrium; system and the Lorenz attractor.

Abstract: The paper proves that under classical values of parameters the Lorenz attractor contains no equilibrium with coordinates (0,0,0) and its separatrices.

Zu der klassischen Hypothese über die Struktur des Attraktors in dem Lorenz-System

Zusammenfassung: Es ist bewiesen, dass die Werte der Parameter des klassischen Attraktors in dem Lorenz-System das Gleichgewicht mit den Koordinaten (0,0,0) und in ihn eingehende Separatrixe nicht enthält.

Pour une hypothèse classique sur la structure de l'attracteur dans le système de Lorentz

Résumé: Est prouvé qu'avec les grandeurs classiques des paramètres l'attracteur dans le système de Lorentz ne contient pas de la situation de l'équilibre avec les coordonnées (0,0,0) et des séparatrices.

Авторы: ***Дзюба Сергей Михайлович*** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Коммерция и бизнес-информатика»; ***Рубанов Никита Александрович*** – аспирант кафедры «Коммерция и бизнес-информатика»; ***Семержинский Сергей Геннадьевич*** – магистрант кафедры «Информационные системы и защита информации», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: ***Куликов Геннадий Михайлович*** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и механика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».