

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЛН ДЛЯ КОНТРОЛЯ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ ТВЕРДЫХ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Е.Л. Артюхина, С.В. Мищенко

*Кафедра «Управление качеством и сертификация»,  
ФГБОУ ВПО «ТГТУ»; artyukhina@yahoo.com*

**Ключевые слова и фразы:** коэффициент температуропроводности; краевые задачи теплопереноса; математическое моделирование; полигармонический метод; температурные волны.

**Аннотация:** На основании решений краевых задач теплопереноса в полуграниченных образцах при контроле тепловых свойств материалов полигармоническим методом температурных волн в случае задания на поверхности образца температуры, являющейся произвольной периодической функцией времени, построены решения обратных коэффициентных задач. Рассмотрен частный случай этого решения.

---

### Введение

Среди многообразия методов контроля тепловых свойств материалов значительный интерес представляют методы температурных волн. Высокая помехозащищенность, большой объем информации, возможность проводить эксперименты при низком уровне температурных возмущений, независимость результатов измерений от начального распределения температур, многократная повторяемость процесса позволяют применять метод температурных волн для исследования широкого класса явлений, связанных с тепловыми свойствами сплошных сред [1]. Уникальные возможности метода способствуют его развитию в настоящее время при контроле тепловых свойств твердых материалов.

Закономерности периодических процессов впервые были использованы А. Ангстремом для измерения температуропроводности металлических стержней [2]. Концы стержней через равные промежутки времени нагревались потоком пара и охлаждались потоком холодной воды. Период прямоугольной волны выбирался из условия математической полуграниченности образца. Процесс теплопереноса считался одномерным, однако, учитывался теплообмен поверхности стержня с окружающей средой с постоянной температурой по закону Ньютона. При достижении стационарно-периодического режима значения температур в двух точках представлялись гармоническими рядами. Из их почленного сравнения независимо определялись коэффициенты температуропроводности и теплообмена.

В обзоре [3] приводятся результаты работ Хагстрема, который рассмотрел ту же задачу, предположив, что коэффициенты теплопроводности и теплообмена зависят от температуры, и Вебера, распространившего этот метод на случай короткого стержня (температура обоих концов которого периодически меняется). В своей публикации [3] Г. Карслоу ссылается на работу Вебера «О теплопроводности железа и нейзильбера», где рассмотрен ряд экспериментов, проведенных им по

методу, предложенному Нейманом. Идея этого метода та же, что и идея метода Ангстрема, но в данном случае периодически изменяется температура обоих концов стержня. В установившемся режиме температура в средней точке образца имеет постоянное значение и является функцией отношения коэффициентов теплообмена  $\alpha$  и теплопроводности  $a$ . Измеряя разности температур в двух точках в заданные моменты времени, можно найти неизвестные  $\alpha$  и  $a$ .

Как отмечено в работе [4], вышеописанные методы нельзя считать окончательно разработанными и экспериментально и теоретически обоснованными.

Дальнейшее развитие методы температурных волн получили во второй половине XX века, когда потребовалось с высокой точностью определять тепловые свойства твердых тел при высоких температурах. Значительный вклад в развитие данных методов внесли научные коллективы, возглавляемые О.А. Краевым, И.И. Новиковым и Л.П. Филипповым, В.Э. Пелецким, В.Е. Зиновьевым [5–10].

Надо отметить, что все применяемые ранее методы температурных волн являлись моногармоническими. Существенным недостатком моногармонических методов контроля теплопроводности твердых материалов является необходимость, с одной стороны, подавления всех гармоник, кроме первой, что ведет к уменьшению амплитуды измеряемого сигнала, с другой стороны, сохранения достаточной для обработки амплитуды сигнала, что ведет к необходимости увеличения длительности эксперимента [11]. С целью разрешения данного противоречия разработан полигармонический метод температурных волн, лишенный отмеченных недостатков.

Применение полигармонического метода, использующего закономерности распространения пакета волн, позволит:

- увеличить амплитуду измеряемого сигнала на порядок, то есть увеличить точность метода;
- сократить время эксперимента за счет выбора контрольных точек вблизи границы;
- увеличить объем информации.

### Постановка и решение прямых задач теплопереноса

В значительном числе случаев при реализации метода температурных волн исследуемые образцы представляют собой цилиндрические диски, радиус которых существенно превосходит высоту. Для таких образцов рассмотрим задачу теплопереноса в процессе контроля теплопроводности. Предположим, что температура образца в начальный момент времени во всех точках одинакова и равна  $T_0 = 0$ . Температура на плоской поверхности образца представляет собой периодическую функцию.

Математическая модель описанного процесса имеет вид:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0, 0 < x < \infty); \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0 = 0; \quad (2)$$

$$T(0, \tau) = T_A f(\tau), \quad (3)$$

где  $T(x, \tau)$  – температура тела в точке с координатой  $x$  в момент времени  $\tau$ ;  $a$  – коэффициент теплопроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $T_0$  – начальная температура тела, К;  $T_A$  – амплитуда колебания температуры, К;  $f(\tau)$  – некоторая периодическая функция времени, определенная ниже.

Для решения сформулированной задачи (1)–(3) воспользуемся результатом работы [12], полученным для случая  $f(\tau) = \cos(\omega\tau - \varphi)$  в установившемся состоянии

$$T(x, \tau) = T_A \exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) \cos\left(\omega\tau - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right). \quad (4)$$

Этот результат позволяет получить решение задачи (1) – (3) для произвольной периодической функции  $f(\tau)$  с периодом  $\frac{2\pi}{\omega}$ , раскладывая эту функцию в ряд Фурье

$$f(\tau) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega\tau - \varphi_k). \quad (5)$$

Общее решение, полученное на основании принципа суперпозиции, является суммой частных решений (4) для каждого члена ряда (5)

$$T(x, \tau) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp\left(-x\sqrt{\frac{k\omega}{2a}}\right) \cos\left(k\omega\tau - \varphi_k - x\sqrt{\frac{k\omega}{2a}}\right). \quad (6)$$

В случае, когда температура поверхности исследуемого образца изменяется по закону (3),

$$\text{где } f(\tau) = \begin{cases} 1, & k\tau_0 < \tau < \left(k + \frac{1}{2}\right)\tau_0; \\ -1, & \left(k + \frac{1}{2}\right)\tau_0 < \tau < (k+1)\tau_0, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

решение краевой задачи теплопереноса (1) – (3), (7) в соответствии с (6) имеет вид

$$T(x, \tau) = \frac{4T_A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \exp\left(-x\sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{a\tau_0}}\right) \sin\left(\frac{(4k+2)\pi\tau}{\tau_0} - x\sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{a\tau_0}}\right). \quad (8)$$

Перейдя в (8) к безразмерным переменным  $Fo = \frac{a\tau_0}{x^2}$ ,  $\tilde{\tau} = \frac{\tau}{\tau_0}$ ,

$\vartheta(x, \tilde{\tau}) = \frac{T(x, \tau)}{T_A}$ , получим

$$\vartheta(Fo, \tilde{\tau}) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \exp\left(-\sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{Fo}}\right) \sin\left((4k+2)\pi\tilde{\tau} - \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{Fo}}\right). \quad (9)$$

Распределение относительных температур  $\vartheta(x, \tilde{\tau}) = \frac{T(x, \tau)}{T_A}$  по глубине исследуемого образца иллюстрируется графиком (рис. 1).

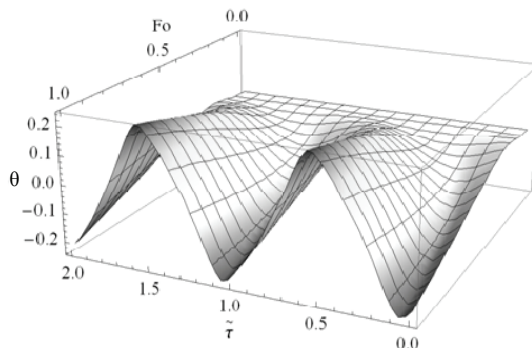


Рис. 1. Плоская температурная волна в образце

Анализ распространения пакета волн позволяет обнаружить следующие закономерности:

1) амплитуда колебаний температуры каждой гармоники уменьшается по закону  $e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}}$ ;

2) фаза температурной волны запаздывает на величину  $\varphi = x\sqrt{2a\omega}$ ;

3) скорость температурной волны определяется формулой  $v = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$ .

Обнаруженные закономерности позволяют строить решения различных коэффициентов задач теплопроводности.

### Постановка и решение обратной задачи теплопроводности

Рассмотрим краевую задачу (1)–(3), (7), дополнив ее условием

$$T(x_i, \tau) = T_{\text{экс}}(\tau), \quad (10)$$

где  $x_i$  – координата расположения термопары.

Воспользуемся методом наименьших квадратов для аппроксимации экспериментальной кривой (10) решением (9). Обозначим  $\delta$  сумму квадратов отклонений экспериментальной кривой от теоретической:

$$\delta^2 = \sum_{\tau=\tau_i}^{\tau_0} (T_{\text{экс}}(x, \tau_i) - T_{\text{теор}}(x, \tau_i, a))^2. \quad (11)$$

Тогда искомым коэффициентом теплопроводности  $a$  определяется выражением:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[ \sum_{\tau=\tau_i}^T (T_{\text{экс}}(x, \tau_i) - T_{\text{теор}}(x, \tau_i, a))^2 \right] = 0 \quad \text{или} \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[ \sum_{\tau=\tau_i}^T \left( T_{\text{экс}}(x, \tau_i) - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \exp\left(-x\sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{a\tau_0}}\right) \sin\left(\frac{(4k+2)\pi\tau_i}{\tau_0} - x\sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{a\tau_0}}\right) \right)^2 \right] = 0. \quad (13)$$

Учитывая, что  $T_{\text{экс}}(x, \tau_i)$  представляет собой значения температур, полученные в ходе эксперимента  $\frac{\partial T_{\text{экс}}(x, \tau_i)}{\partial a} = 0$ .

Обозначим  $g_1$  комплекс

$$g_1 = \sum_{\tau=\tau_i}^T 2 \left( T_{\text{экс}}(x, \tau_i) - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \exp\left(-x\sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{a\tau_0}}\right) \times \sin\left(\frac{(2k+1)2\pi\tau_i}{\tau_0} - x\sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{a\tau_0}}\right) \right). \quad (14)$$

Обозначим  $g_2 = \frac{\partial T_{\text{теор}}(x, \tau_i, a)}{\partial a}$ ,

$$g_2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x \exp\left(-x \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{a\tau_0}}\right) \left( \cos\left(x \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{a\tau_0}} - \frac{(2+4k)\pi\tau}{\tau_0}\right) - \sin\left(x \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{a\tau_0}} - \frac{(2+4k)\pi\tau}{\tau_0}\right) \right)}{2a^2\tau_0 \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{a\tau_0}}}. \quad (15)$$

Окончательно получим уравнение для нахождения искомого коэффициента температуропроводности

$$g_1 g_2 = 0. \quad (16)$$

Решение уравнения (16) разделяется на два:  $g_1 = 0$ ;  $g_2 = 0$ .

Задача отыскания корня уравнения (16) решалась с использованием программного продукта Mathematica.

Предложенный алгоритм отыскания коэффициента температуропроводности  $a$  был применен для обработки экспериментальных данных стандартного образца из полиметилметакрилата полигармоническим методом температурных волн. Характеристики образца и режимные параметры эксперимента представлены в таблице.

На рисунке 2 представлена экспериментальная температурная кривая, анализ которой позволяет выделить два участка: участок  $\tau \in [0, 2300]$  с, соответствующий нестационарному режиму, и участок  $\tau \in [2300, 2600]$  с, соответствующий стационарно-периодическому процессу. Данные фрагмента температурной кривой, соответствующего стационарно-периодическому процессу, служат исходной информацией для расчета искомого коэффициента температуропроводности.

Температурная кривая, представленная на рис. 3, была пронормирована следующим образом:

$$\vartheta(F_0, \tilde{\tau}) = \frac{T}{T_A}; \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau}{\tau_0}.$$

На рисунке 3 представлены нормированные температурные кривые, полученные по теоретическим и экспериментальным данным.

### Характеристики образца и режимные параметры проведения эксперимента

Характеристики образца	Режимные параметры
Материал: полиметилметакрилат. Геометрия образца: цилиндр. Диаметр: 40 мм. Высота двухслойного образца: $h = h_1 + h_2 = 18 \cdot 10^{-3}$ м; $h_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ м; $h_2 = 15 \cdot 10^{-3}$ м	Температура жидкости в первом термостате $T_1 = 30$ °С. Температура жидкости во втором термостате $T_2 = 39$ °С. $T_{\text{экс}} = T(x_{\text{и}})$ . $x_{\text{и}} = 2,8 \cdot 10^{-3}$ м. $\tau_0 = 200$ с. $T_0 = 20$ °С

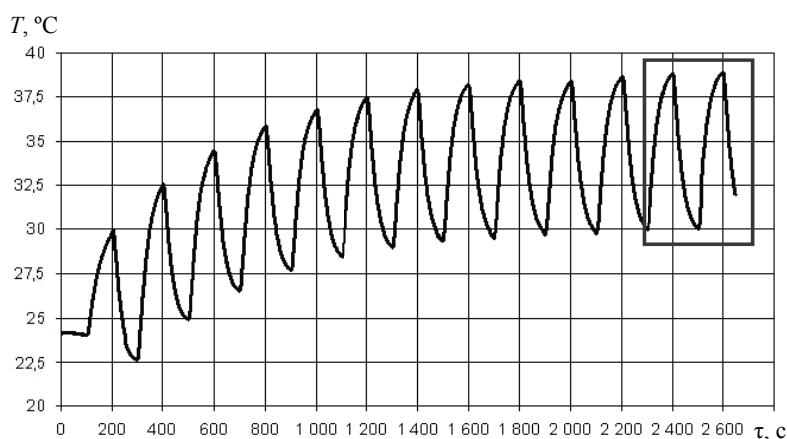


Рис. 2. Экспериментальная температурная кривая

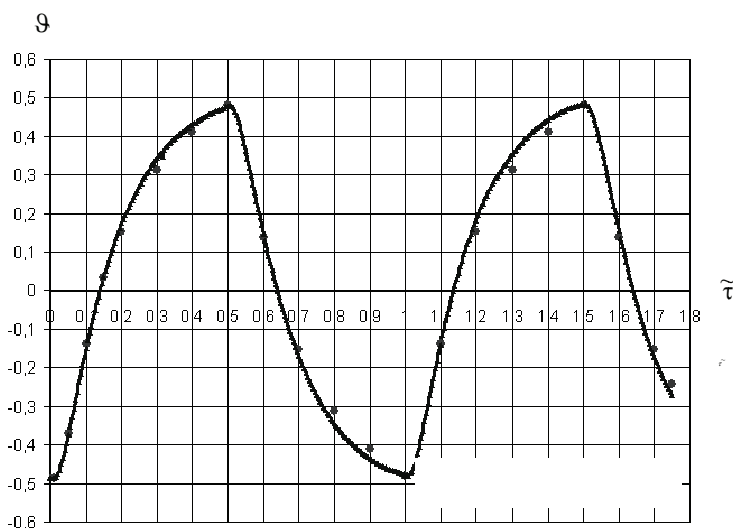


Рис. 3. Нормированные температурные кривые данных:  
 — экспериментальные; —●— теоретические

Вычисленное по комплексу (14) значение числа Фурье  $Fo = 3,01 \pm 0,14$ , тогда искомое значение коэффициента температуропроводности  $a = \frac{Fo \cdot x^2}{\tau_0}$ ,  $a = (1,17 \pm 0,07)10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ .

### Выводы

Разработанный полигармонический метод температурных волн, обладая всеми преимуществами подобных методов, отличается от моногармонических методов на порядок более высокими значениями регистрируемых температур и существенно большим объемом информации, что позволяет повысить точность контроля температуропроводности и в то же время существенно сократить время измерений.

### *Список литературы*

1. Кравчун, С.Н. Метод периодического нагрева в экспериментальной теплофизике / С.Н. Кравчун, А.А. Липаев. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2006. – 208 с.
2. Angström, A.J. Neue Methode das Wärmeleitungs-vermögen der Körper zu bestimmen / A.J. Angström // *Ann. d. Physik.* – 1881. – Bd. 14. – S. 513–530.
3. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел : пер. с англ. / Г. Карслоу, Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 488 с.
4. Кондратьев, Г.М. Регулярный тепловой режим / Г.М. Кондратьев. – М. : Гостехиздат, 1954. – 408 с.
5. Краев, О.А. Температуропроводность и теплопроводность металлов при высоких температурах / О.А. Краев // Исследования при высоких температурах / О.А. Краев, А.А. Стельмах. – Новосибирск : Наука, 1966. – С. 55–74.
6. Новиков, И.И. Прикладная термодинамика и теплопередача : монография / И.И. Новиков, К.Д. Воскресенский. – 2-е изд. – М. : Атомиздат, 1977. – 352 с.
7. Филиппов, Л.П. Измерение тепловых свойств твердых и жидких металлов при высоких температурах / Л.П. Филиппов. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1967. – 325 с.
8. Филиппов, Л.П. Измерение теплофизических свойств веществ методом периодического нагрева / Л.П. Филиппов. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 105 с.
9. Пелецкий, В.Э. Высокотемпературные исследования тепло- и электропроводности твердых тел / В.Э. Пелецкий, Д.Л. Тимрот, В.Е. Воскресенский. – М. : Энергия, 1971. – 192 с.
10. Ивлиев, А.Д. Измерение температуропроводности и теплоемкости методом температурных волн с использованием излучения ОКГ и следящего амплитудно-фазового приемника / А.Д. Ивлиев, В.Е. Зиновьев // *Теплофизика высоких температур.* – 1980. – Т. 18, № 3. – С. 532–539.
11. Артюхина, Е.Л. Полигармонический метод температурных волн для контроля температуропроводности / Е.Л. Артюхина, С.В. Мищенко // *Современные методы и средства исследований теплофизических свойств веществ : сб. трудов. II Междунар. науч.-техн. конф., г. Санкт-Петербург, 28–30 нояб. 2012 г. / НИУ ИТМО ; ИХиБТ, 2012. – С. 114.*
12. Лыков, А.В. Конвекция и тепловые волны / А.В. Лыков, Б.М. Берковский. – М. : Энергия, 1974. – 286 с.

---

## **Theoretical Substantiation of Polyharmonic Methods to Control Temperature Waves of Thermal Diffusivity of Solid Isotropic Materials**

**E.L. Artyukhina, S.V. Mishchenko**

*Department “Quality Control and Certification”,  
TSTU; artyukhina@yahoo.com*

**Key words and phrases:** boundary value problems of heat transfer; mathematical modeling; polyharmonic method; temperature waves; thermal diffusivity.

**Abstract:** On the basis of boundary value problems of heat transfer in semi-infinite samples when monitoring thermal properties of materials by polyharmonic method of temperature waves in case of setting sample surface temperature, which is an arbitrary periodic function of time, the solutions to inverse problems have been found. A particular case of this solution has been examined.

## **Theoretische Begründung der polyharmonischen Methoden der Temperaturwellen für die Kontrolle der Wärmeleitfähigkeit der festen isotropen Materialien**

**Zusammenfassung:** Aufgrund der Lösungen der Ortsaufgaben der Wärmeübertragung in den halbbegrenzten Mustern bei der Kontrolle der thermischen Eigenschaften der Materialien von der polyharmonischen Methode der Temperaturwellen im Falle der Aufgabe auf der Oberfläche des Musters der Temperatur, die eine willkürliche periodische Funktion der Zeit ist, sind die Lösungen rückgängig der Aufgaben aufgebaut. Es ist der Sonderfall dieser Lösung betrachtet.

---

## **Argumentation théorique des méthodes polyharmoniques des ondes de température pour le contrôle de la conductibilité thermique des matériaux isotropes solides**

**Résumé:** A la base de la solution des problèmes aux limites du transfert de chaleur dans les échantillons marqués lors du contrôle des propriétés thermiques des matériaux par la méthode polyharmonique des ondes de température en cas de l'établissement sur la surface de l'échantillon d'une température étant une fonction périodique facultative du temps, sont construites les solutions des problèmes inverses de coefficient. Est examiné le cas particulier de cette solution.

---

**Авторы:** *Артюхина Екатерина Леонидовна* – аспирант кафедры «Управление качеством и сертификация»; *Мищенко Сергей Владимирович* – доктор технических наук, профессор, научный руководитель кафедры «Управление качеством и сертификация», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».

**Рецензент:** *Пономарев Сергей Васильевич* – доктор технических наук, профессор, и. о. заведующего кафедрой «Управление качеством и сертификация», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».

---