

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ДВУХКООРДИНАТНЫХ МАГНИТОСТРИКЦИОННЫХ НАКЛОНОМЕРОВ, СОДЕРЖАЩИХ ПОСТОЯННЫЙ МАГНИТ В ФОРМЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИДЕДА

А.А. Воронцов, Ю.Н. Слесарев, Э.В. Карпухин

Кафедра «Физика»,

*ФГБОУ ВПО «Пензенская государственная технологическая академия», г. Пенза;
Aleksander.Vorontsov@gmail.com*

Ключевые слова и фразы: магнит в форме прямоугольного параллелепипеда; магнитное поле постоянного магнита; магнитоотрицательный двухкоординатный наклонномер; напряженность магнитного поля; расчет напряженности.

Аннотация: Рассмотрен анализ основных факторов, влияющих на формирование магнитных полей двухкоординатных магнитоотрицательных наклонномеров при использовании в них постоянного магнита в форме прямоугольного параллелепипеда. Выполнен анализ влияния каждого фактора. Выведены формулы по расчету напряженностей магнитных полей, созданных постоянными магнитами в форме прямоугольного параллелепипеда.

Одним из важных этапов при проектировании магнитоотрицательных приборов и устройств, таких как двухкоординатные магнитоотрицательные наклонмеры (ДМН), является расчет магнитных полей, создаваемых содержащимися в ДМН одним или несколькими постоянными магнитами (ПМ). Это позволяет подобрать оптимальные параметры элементов конструкции ДМН, уменьшить массу и габариты, сократить стоимость изделия.

При расчете электрических и магнитных полей, когда проницаемости μ_a и ε_a постоянны и не зависят от координат, можно применить аналитические решения уравнений поля для численного определения его характеристик. Но даже в этом наиболее простом случае возможности аналитических методов ограничены и приходится переходить к численному расчету интегралов от плотностей источников по объемам, поверхностям, линиям.

Одним из способов аналитического преобразования уравнений магнитного поля является их предварительное сведение к уравнению относительно скалярного либо векторного магнитного потенциала [1]. Первый метод расчета является наиболее эффективным, так как скалярными здесь являются не только рассчитываемая величина, но и решаемое уравнение в целом.

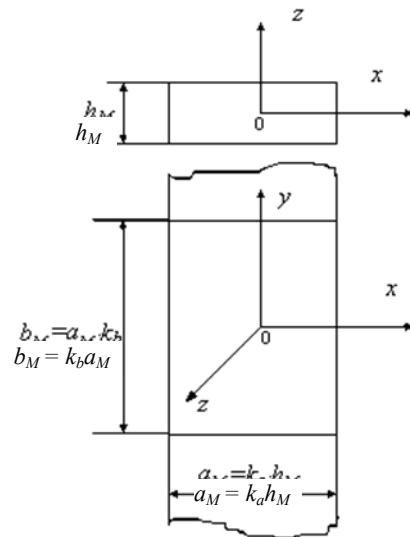


Рис. 1. ПМП, намагниченный перпендикулярно вдоль оси z

Целью данной статьи является вывод и анализ формулы расчета магнитного поля ПМ в форме прямоугольного параллелепипеда (ПМПП) указанным методом применительно к ДМН.

Считая, что ПМПП однородно намагничен перпендикулярно его плоскости, выберем систему координат, показанную на рис. 1.

В том случае, когда вектор намагниченности перпендикулярен плоскости, то выполняя интегрирование по объему, занятому ПМ, получим [2]

$$H_z = MI_{z\xi}, \quad (1)$$

где M – намагниченность, А·м;

$$I_{z\xi} = \arcsin \frac{x}{z-h_M} \frac{y-b_M}{\sqrt{(y-b_M)^2 + (z-h_M)^2}} - \arcsin \frac{x}{z-h_M} \frac{y}{\sqrt{(y)^2 + (z-h_M)^2}} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{z-h_M}\right)^2}} + \arcsin \frac{x-a_M}{z-h_M} \frac{y-b_M}{\sqrt{(y-b_M)^2 + (z-h_M)^2}} - \arcsin \frac{x-a_M}{z-h_M} \frac{y}{\sqrt{(y)^2 + (z-h_M)^2}} + \arcsin \frac{x-a_M}{\sqrt{1 + \left(\frac{x-a_M}{z-h_M}\right)^2}} + \arcsin \frac{x-a_M}{z} \frac{y-b_M}{\sqrt{(y-b_M)^2 + (z)^2}} - \arcsin \frac{x-a_M}{z} \frac{y}{\sqrt{(y)^2 + (z)^2}} - \arcsin \frac{x-a_M}{\sqrt{1 + \left(\frac{x-a_M}{z}\right)^2}} - \arcsin \frac{x}{z} \frac{y-b_M}{\sqrt{(y-b_M)^2 + (z)^2}} + \arcsin \frac{x}{z} \frac{y}{\sqrt{(y)^2 + (z)^2}} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{z}\right)^2}}.$$

Последнее выражение связывает проекцию напряженности на ось Oz ПМПП H_z в любой точке пространства с координатами x, y, z с намагниченностью M и геометрией ПМ, то есть его размерами a_M, b_M и высотой h_M .

Выражение для магнитного поля значительно упрощается, если использовать допущения для ПМПП, сделанные в [3], при которых можно считать, что одна из координат, например y , стремится к бесконечности.

В результате получаем:

$$H_z(x, z, a_M) = -\frac{M}{2\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{x-a_M/2}{z-h_M/2} - \operatorname{arctg} \frac{x+a_M/2}{z-h_M/2} + \operatorname{arctg} \frac{x+a_M/2}{z+h_M/2} - \operatorname{arctg} \frac{x-a_M/2}{z+h_M/2} \right) \quad (2)$$

и

$$H_z(x, 0, a_M) = -\frac{M}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{2x+a_M}{h_M} - \operatorname{arctg} \frac{2x-a_M}{h_M} \right) \text{ при } z=0. \quad (3)$$

Аналогичное выражение перпендикулярной составляющей напряженности магнитного поля для ПМПП с «конечным» размером b_M по оси y в плоскости xu , проходящей через начало координат, согласно (1), запишется (при $z=0$) в виде

$$\begin{aligned}
H_z(x, y, a_M, b_M) = & -\frac{M}{2\pi} \left[\arcsin \frac{\text{sign}(x + a_M/2)\text{sign}(y + b_M/2)}{\sqrt{1 + \left(\frac{h_M}{2(x + a_M/2)}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{h_M}{2(y + b_M/2)}\right)^2}} - \right. \\
& - \arcsin \frac{\text{sign}(x + a_M/2)\text{sign}(y + b_M/2)}{\sqrt{1 + \left(\frac{h_M}{2(x + a_M/2)}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{h_M}{2(y - b_M/2)}\right)^2}} + \arcsin \frac{\text{sign}(x - a_M/2)\text{sign}(y - b_M/2)}{\sqrt{1 + \left(\frac{h_M}{2(x - a_M/2)}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{h_M}{2(y - b_M/2)}\right)^2}} - \\
& \left. - \arcsin \frac{\text{sign}(x - a_M/2)\text{sign}(y + b_M/2)}{\sqrt{1 + \left(\frac{h_M}{2(x - a_M/2)}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{h_M}{2(y + b_M/2)}\right)^2}} \right] \quad (4)
\end{aligned}$$

Графики зависимости напряженности магнитного поля H_z , рассчитываемой в относительных единицах от отношения координаты x к высоте ПМ h_M для «бесконечного» и «конечного» ПМПП, приведены на рис. 2, где кривые 1, 3, 4 задаются выражением (4), а кривые 2, 5 – выражением (3), коэффициенты k_a и k_b , согласно рис. 1, соответственно равны $k_a = \frac{a_M}{h_M}$ и $k_b = \frac{b_M}{a_M}$.

Для ПМ в форме куба разница между приближенным и точным решениями составляет более 50 % (кривые 1 и 2). Она уменьшается при увеличении отношения длины ПМ к толщине или при его фиксированном значении с увеличением ширины ПМ b_M (кривые 2, 3 и 4, 5). При $k_b \geq 10$ значения точного и приближенного выражений практически совпадают. Из выражения (2) можно легко получить зависимость перпендикулярной составляющей магнитного поля от координаты z , которая для ПМПП с «бесконечными» и «конечными» размерами:

$$H_z(0, z) = -\frac{M}{\pi} \left(\text{arctg} \frac{a_M}{2(z - h_M/2)} - \text{arctg} \frac{a_M}{2(z + h_M/2)} \right) \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned}
H_z(0, 0, z) = & -\frac{M}{\pi} \left[\arcsin \frac{\text{sign}(z + h_M/2)a_M b_M}{\sqrt{\frac{a_M^2}{4} + \left(z + \frac{h_M}{2}\right)^2} \sqrt{\frac{b_M^2}{4} + \left(z + \frac{h_M}{2}\right)^2}} - \right. \\
& \left. - \arcsin \frac{\text{sign}(z - h_M/2)a_M b_M}{\sqrt{\frac{a_M^2}{4} + \left(z - \frac{h_M}{2}\right)^2} \sqrt{\frac{b_M^2}{4} + \left(z - \frac{h_M}{2}\right)^2}} \right] \quad (6)
\end{aligned}$$

Графики зависимостей, задаваемых выражениями (5) и (6), приведены на рис. 3 при различных соотношениях геометрических размеров ПМПП, где кривые 1, 3 задаются выражением (6), а кривая 2 – выражением (5).

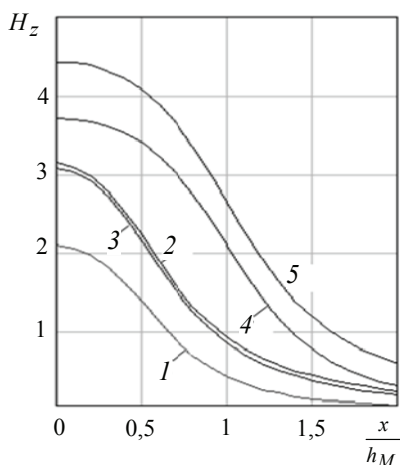


Рис. 2. Зависимость значений напряженности магнитного поля от отношения x/h_M для значений: $1 - y = 0$, $k_a = k_b = 1$; $2 - y = 0$, $k_a = 1$, $k_b = \infty$; $3 - y = 0$, $k_a = 1$, $k_b = 5$; $4 - y = 0$, $k_a = 2$, $k_b = 1$; $5 - y = 0$, $k_a = 2$, $k_b = \infty$

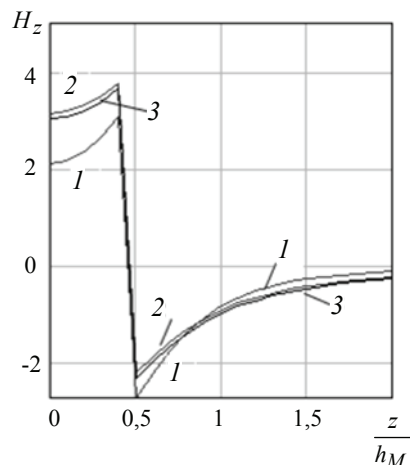


Рис. 3. Зависимость напряженности магнитного поля от отношения z/h_M для значений: $1 - y = 0$, $k_a = k_b = 1$; $2 - y = 0$, $k_a = 1$, $k_b = \infty$; $3 - y = 0$, $k_a = 1$, $k_b = 10$ (напряженность магнитного поля H_z – в относительных единицах)

Разница между приближенным и точным решениями (кривые 1 и 2) достигает максимального значения для ПМ в виде куба (более 50 %) и делается малозаметной, если один или оба размера (ширина и длина) ПМПП превосходят толщину в 10 раз (кривые 2 и 3). Разница между приближенным и точным решениями уменьшается также при увеличении отношения размеров ПМПП к толщине. В случае, если один (длина) или оба размера (ширина и длина) превосходят толщину ПМПП в 10 раз, то значения перпендикулярной составляющей напряженности магнитного поля, задаваемые выражениями (5) и (6), практически совпадают.

Таким образом, можно сделать общий вывод, что расчетная формула магнитного поля, которую можно использовать для расчетов ПМПП, используемых в ДМН, зависит от размеров ПМПП. Причем, если ширина и длина ПМПП, намагниченного перпендикулярно плоскости, превосходят его толщину более чем в десять раз, применение приближенных выражений (2), (3), (5) при расчете перпендикулярной составляющей магнитного поля может привести к существенно завышенным значениям. В этом случае рекомендуется использовать более точные выражения (4) и (6).

Список литературы

1. Демирчян, К.С. Машинные расчеты электромагнитных полей : учеб. пособие для электротехн. и энергет. специальностей вузов / К.С. Демирчян, В.Л. Чечурин. – М. : Высшая школа, 1986. – 240 с.
2. Чубаров, В.Г. Исследование собственного магнитного поля прямоугольного тонкопленочного элемента, намагниченного перпендикулярно плоскости / В.Г. Чубаров // Вопросы проектирования специальных радиоэлектронных устройств: ученые записки / Пенз. политехн. ин-т. – Пенза, 1974. – Вып. 3. – С. 115–119.
3. Чубаров, В.Г. Анализ двух моделей расчета размагничивающих полей / В.Г. Чубаров, Ю.Н. Слесарев // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. – 1986. – Вып. 14. – С. 28–34.

Mathematical Modeling of Magnetic Fields of Two-Axis Magnetostrictive Inclinometers Containing Constant Magnet Shaped as Rectangular Parallelepiped

A.A. Vorontsov, Yu.N. Slesarev, E.V. Karpukhin

Department "Physics", Penza State Technological Academy, Penza;
Aleksander.Vorontsov@gmail.com

Key words and phrases: calculation of tension; magnet in the shape of a rectangular parallelepiped; magnetic field of permanent magnet; magnetic field strength; two-axis magnetostrictive inclinometer.

Abstract: We analyze the key factors influencing the formation of magnetic fields of two-axis magnetostrictive inclinometers used in a permanent magnet in the shape of a rectangular parallelepiped. The analysis of the influence of each factor has been made. The formulas for the calculation of the magnetic fields generated by the permanent magnets in the shape of a rectangular parallelepiped have been produced.

Mathematische Modellierung der zweikoordinatischen magnitostriktionischen Nanomesser der Magnetfelder der zweikoordinatischen magnitostriktionischen Nanomesser, die den ständigen Magnet in der Form des rechtwinkligen Parallepipeds erhalten

Zusammenfassung: Es ist die Analyse der Hauptfaktoren, die auf die Formierung der Magnetfelder der zweikoordinatischen magnitostriktionischen Nanomesser bei der Benutzung des ständigen Magnetes in der Form des rechtwinkligen Parallepipeds betrachtet. Es ist die Analyse der Einwirkung des jeden Faktorees gezeigt. Es sind die Formeln für die Berechnung der Spannung der Magnetfelder, die von den ständigen Magnetten in der Form des rechtwinkligen Parallepipeds geschaffen wurden, geschlossen.

Modelage mathématique des champs magnétiques des pentemetres magnetostrictifs  deux coordonnées contenant un aimant constant en forme d'un parallelepipede rectangle

Résumé: Est examinée l'analyse des facteurs qui influencent sur la formation des champs magnétiques des pentemetres magnétostrictifs  deux coordonnées avec l'emploi d'un aimant constant en forme d'un parallélépipède rectangle. Est effectuée l'analyse de l'influence du chaque facteur. Sont déduites les formules de calcul des tensions des champs magnétiques créées par un aimant constant en forme d'un parallélépipède rectangle.

Авторы: *Воронцов Александр Анатольевич* – аспирант кафедры «Физика»; *Слесарев Юрий Николаевич* – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Физика»; *Карпукхин Эдуард Владимирович* – кандидат технических наук, доцент кафедры «Физика», ФГБОУ ВПО «Пензенская государственная технологическая академия», г. Пенза.

Рецензент: *Дрождин Владимир Викторович* – кандидат технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика», ФГБОУ ВПО «Пензенская государственная технологическая академия», г. Пенза.