

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В РАСПРЕДЕЛЕННОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЕ

А.Н. Пчелинцев<sup>1</sup>, В.А. Погонин<sup>2</sup>, А.Ю. Годымчук<sup>3</sup>, Ю.М. Смолин<sup>4</sup>

*Кафедры: «Прикладная математика и информатика» (1); grid@mail.tambov.ru;  
«Информационные процессы и управление» (2), ФГБОУ ВПО «ТГТУ»;  
ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский  
политехнический университет», г. Томск (3);  
ОАО «Государственный научно-исследовательский  
химико-аналитический институт», г. Санкт-Петербург (4)*

*Представлена членом редколлегии профессором Н.Ц. Гапановой*

**Ключевые слова и фразы:** динамические системы; дифференциальное уравнение; математическое моделирование; рекуррентные траектории.

**Аннотация:** Предложен алгоритм поиска устойчивых по Пуассону точек динамических систем.

---

В современных областях естествознания часто требуется исследовать поведение решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих тот или иной процесс. Поведение ограниченных решений при  $t \geq 0$  определяют рекуррентные траектории динамических систем.

Для построения рекуррентных траекторий автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений разработан комплекс программ [1] формирования множества начальных значений (точек) в  $n$ -мерном пространстве и поиска среди них устойчивых по Пуассону в распределенной компьютерной среде с произвольной точностью представления вещественного числа. Чтобы создать множество исследуемых начальных точек, координаты которых будут храниться в сетевой базе данных, используется алгоритм формирования координат узлов  $n$ -мерной сетки с использованием рекурсии.

Расчеты для каждой точки  $P_i^{(0)}$ , являющейся начальной для некоторого решения  $x(t, P_i^{(0)})$  ( $i = \overline{1, m}$ ,  $m$  – количество точек), не зависят от вычислений для соседних точек, что позволяет реализовать вычислительную процедуру в распределенной компьютерной среде. На отрезке  $[0; T]$  (значение  $T$  задается) раскладываем в степенной ряд решение  $x(t, P_i^{(0)})$ : процесс, анализирующий  $i$ -ю точку, подставляет в ряд значение времени  $T$ . При этом вычисляем координаты точки  $P_i^{(1)}$  с точностью  $\Delta$ . Эта точка получена сдвигом точки  $P_i^{(0)}$  по траектории  $L_i$ , описывающей решение  $x(t, P_i^{(0)})$ , на время  $T$ , которое будем называть сдвигом. При этом мы можем остаться в  $\varepsilon$ -окрестности ( $\varepsilon$  – точность отыскания рекуррент-

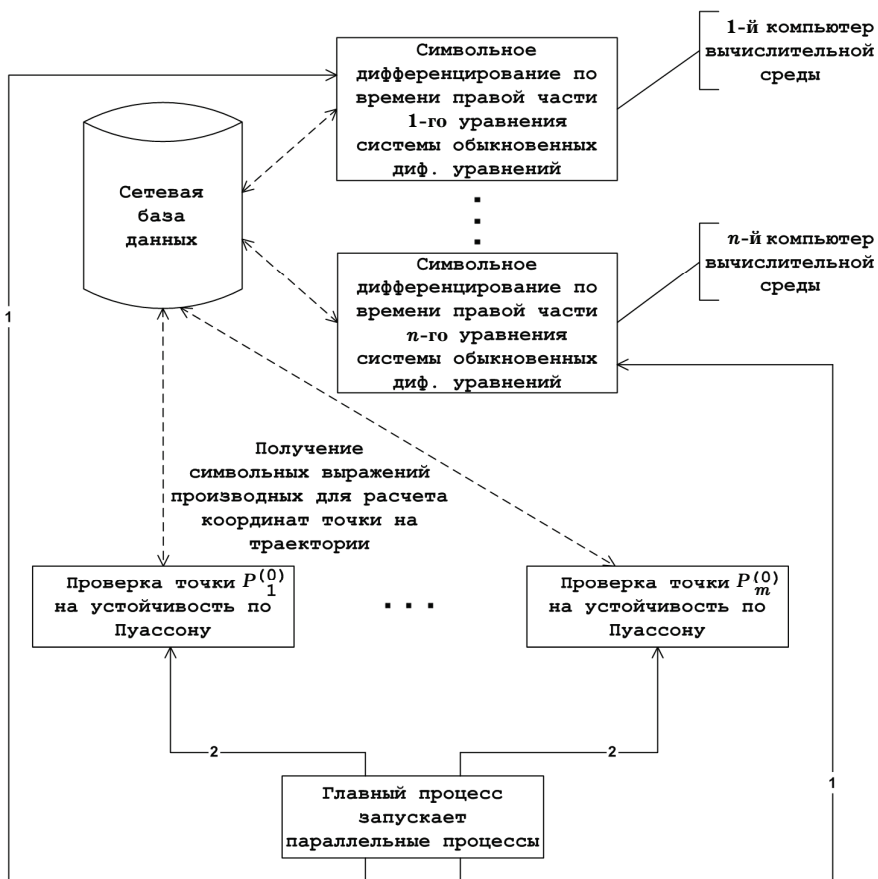
ных траекторий) точки  $P_i^{(0)}$  в силу непрерывной зависимости решения от начальных условий. Тогда зададимся некоторым минимальным числом  $N_{\min}$  сдвигов, начиная с которого будем отслеживать возврат в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $P_i^{(0)}$ . Чтобы получить точку  $P_i^{(2)}$  через второй сдвиг, перенесем начальную точку по траектории  $L_i$  в точку  $P_i^{(1)}$ . При номере текущего сдвига  $j \geq N_{\min}$  проверяем условие

$$|P_i^{(j)} - P_i^{(0)}| < \varepsilon.$$

Если данное условие выполняется, то через точку  $P_i^{(0)}$  проходит рекуррентная траектория. В противном случае продолжаем делать сдвиги по траектории  $L_i$  до некоторого заданного числа  $N_{\max}$  сдвигов.

Схема проведения вычислений в распределенной компьютерной среде показана на рисунке.

Чтобы вычислить значения производных, составляющих степенной ряд, необходимо знать их символьные выражения, представленные в виде строк.



**Отыскание рекуррентных траекторий в распределенной компьютерной среде:**

$\leftarrow - \rightarrow$  – обмен информацией;  $\leftarrow$  – запуск процесса; 1, 2 – очередность запуска соответствующего множества параллельных процессов

Для реализации расчетов в распределенной компьютерной среде, функционирующей под управлением Scientific Linux [1], такие строки удобно хранить в базе данных, обслуживаемой сетевой СУБД MySQL [2]. Таким образом, мы имеем хранилище, которое доступно всем компьютерам среды, проводящим расчет. Конечное множество, которое образует некоторая их часть, обозначим через  $R_c$ . Заметим, что  $|R_c| = n + 2$  ( $n$  – порядок системы). Запрос на языке SQL для создания таблицы, хранящей символьные выражения, выглядит следующим образом:

```
CREATE TABLE Syms (
  num      INT, /* Номер уравнения */
  ndiff    INT, /* Номер производной */
  symdiff  MEDIUMTEXT
  /* Символьное выражение для производной */
);
```

Пусть компьютер с номером  $n+2$  множества  $R_c$  занят сервером MySQL. На компьютере с номером  $s = n + 1$  запускается главный процесс, который, в свою очередь, для заполнения таблицы Syms запускает  $n$  процессов на остальных компьютерах множества  $R_c$  командой `mpirun` (предполагается, что процессы работают под управлением MPICH [3]). Для получения символьного выражения  $j$ -й производной  $i$ -й процесс должен последовательно  $u = j - d$  раз продифференцировать уже имеющуюся в базе  $d$ -ю производную функции  $x_i(t)$  с помощью пакета символьных вычислений Maxima. Здесь через  $d$  обозначено количество находящихся в базе символьных выражений для производных  $i$ -й функции. В самом начале вычислений, когда таблица Syms пуста, в нее записывается правая часть динамической системы процессом с номером  $s$  перед вызовом `mpirun`. При этом  $d = 1$ . Заметим, что в базе данных также хранится и порядок системы в отдельной таблице.

Непосредственно перед дифференцированием в пакете Maxima необходимо выполнить команду

```
display2d:false$
```

(выводить результаты в виде строки) и определить с помощью команды

```
depends(<имя функции>, t)$
```

неизвестные функции  $x_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$  (здесь вместо <имя функции> подставляется имя `x_j`, записанное символьно). Чтобы начать последовательное дифференцирование правой части  $i$ -го уравнения системы, надо выполнить:

```
diff(<символьное выражение>, t);
```

На место символьного выражения подставляется строка, полученная с помощью последовательности SQL-запросов,

```
/* Получить значение d */
SELECT MAX(ndiff) FROM Syms WHERE num=<значение i>;
/* Извлечь символьное выражение */
SELECT symdiff FROM Syms WHERE num=<значение i> AND
ndiff=<значение d>;
```

далее необходимо повторить команду

```
diff(%, t);
```

$u - 1$  раз (в Maxima переменная % хранит результат предыдущей операции).

Для отыскания координат точки через сдвиг необходимо средство для распознавания математических формул, записанных в виде символьных выражений после дифференцирования правой части системы. Если для этих целей использовать стандартные средства (например, математический пакет *Mathima*), то вычисления будут занимать много времени. Для того чтобы уменьшить время расчета, был разработан модуль для транслирования формул. При этом время расчета сократилось примерно в 80 раз (в сравнении с пакетом *Mathima*). Проверка формул на ошибки не производится, так как обрабатываются формулы, созданные пакетом *Mathima* после дифференцирования. При этом вычисление значений выражений производится не с помощью стандартных типов для хранения чисел с плавающей точкой, а с помощью типа *mpreal* объектно-ориентированной библиотеки *MPFR C++* высокоточных вычислений. Данная библиотека позволяет представлять вещественные числа в формате с плавающей точкой с заранее заданной точностью. Информация о библиотеке *MPFR C++* находится по адресу [4].

Таким образом, предложенный подход позволяет найти решение динамических систем, определяющих поведение всех остальных ограниченных решений.

*Работа выполнена в рамках соглашения № 14.В37.21.2083 Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.*

#### *Список литературы*

1. Веб-сайт вычислительного кластера Тамбовского государственного технического университета [Электронный ресурс]. – <http://cluster.tstu.ru/>. – Загл. с экрана.
2. MySQL : русскоязычный сайт поддержки базы данных MySQL [Электронный ресурс]. – <http://www.mysql.ru/>. – Загл. с экрана.
3. MPICH2 : High-Performance and Widely Portable MPI [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.mcs.anl.gov/research/projects/mpich2/>. – Загл. с экрана.
4. Pavel Holoborodko : Applied Mathematics and Beyond [Электронный ресурс]. – [http://www.holoborodko.com/pavel/?page\\_id=12](http://www.holoborodko.com/pavel/?page_id=12). – Загл. с экрана.

---

## **Study of Mathematical Models Dynamics in Distributed Computing Environment**

**A.N. Pchelintsev<sup>1</sup>, V.A. Pogonin<sup>2</sup>, A.Yu. Godymchuk<sup>3</sup>, Yu.M. Smolin<sup>4</sup>**

*Departments: “Applied Mathematics and Computer Science” (1);*

*grid@mail.tambov.ru;*

*“Information Processes and Control” (2), TSTU;*

*Tomsk National Research Polytechnic University, Tomsk (3);*

*State Research Institute of Chemical Analysis, St. Petersburg (4)*

**Key words and phrases:** dynamic systems; differential equations; mathematical modeling; recurrent trajectories.

**Abstract:** The search algorithm of Poisson stable points of dynamical systems has been proposed.

## Forschung der Dynamik der mathematischen Modelle in der verteilten Computerumgebung

**Zusammenfassung:** Es ist den Suchalgorithmus der nach Poisson standfesten Punkte der dynamischen Systeme angeboten.

---

## Etude de la dynamique des modèles mathématiques dans le milieu informatique réparti

**Résumé:** Est proposé l'algorithme de la recherche des points fixes d'après Poisson des systèmes dynamiques.

---

**Авторы:** *Пчелинцев Александр Николаевич* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и информатика»; *Погонин Василий Александрович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Информационные процессы и управление», ФГБОУ ВПО «ТГТУ»; *Годымчук Анна Юрьевна* – кандидат технических наук, доцент кафедры «Нanomатериалы и нанотехнологии», ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский политехнический университет», г. Томск; *Смолин Юрий Михайлович* – главный метролог, начальник лаборатории, ОАО «Государственный научно-исследовательский химико-аналитический институт», г. Санкт-Петербург.

**Рецензент:** *Матвейкин Валерий Григорьевич* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Информационные процессы и управление» ФГБОУ ВПО «ТГТУ», заместитель генерального директора ОАО «Корпорация «Росхимзащита», г. Тамбов.

---