

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЫХАНИЯ ЧЕЛОВЕКА

В.А. Погонин¹, П.М. Оневский¹, А.М. Иванов¹, Е.В. Шишов²

*Кафедра «Информационные процессы и управление»,
ФГБОУ ВПО «ТГТУ» (1); onev1@mail.ru;*

*ОАО «Государственный научно-исследовательский
химико-аналитический институт», г. Санкт-Петербург (2)*

Представлена членом редколлегии профессором Н.Ц. Гагановой

Ключевые слова и фразы: искусственные легкие; модулирующие функции; пневмотахограмма дыхания; потребление кислорода.

Аннотация: Разработана математическая модель внешнего дыхания человека, описывающая динамические процессы в искусственных легких, имитирующая различные пневмотахограммы дыхания и уровни потребления кислорода. Предложено при реализации пневмотахограмм дыхания использовать модулирующие функции.

Для имитации дыхания человека в комплексе «Искусственные легкие» режим испытания задается следующими параметрами: глубиной дыхания V_d , дм^3 ; частотой дыхания n , мин^{-1} ; легочной вентиляцией $W_l = V_d n$, $\text{дм}^3/\text{мин}$ [1].

Объемная подача диоксида углерода в ходе всего испытания $W_{\text{CO}_2}^{(0)}$, $\text{дм}^3/\text{мин}$, имитирует выделение человеком диоксида углерода. Эта величина определяет начальную объемную долю диоксида углерода в выдыхаемой газовой дыхательной смеси (ГДС), обозначаемую как $C_{\text{CO}_2}^{(0)}$, которая зависит от величины подачи диоксида углерода в начальный момент испытания и легочной вентиляции [2]:

$$C_{\text{CO}_2}^{(0)} = \frac{W_{\text{CO}_2}^{(0)}}{W_l}. \quad (1)$$

Начальная объемная доля диоксида углерода регистрируется на линии выдоха комплекса искусственные легкие (ИЛ), пока к нему не подключен индивидуальный дыхательный аппарат (ИДА), который необходимо испытать или протестировать.

Для составления баланса по диоксиду углерода учтем, что в блок имитации дыхания поступают два потока CO_2 – с постоянной объемной скоростью $W_{\text{CO}_2}^{(0)}$ из баллона и с переменной объемной скоростью в составе ГДС с линии вдоха, а удаляется из имитатора один поток по линии выдоха.

Разделив эти потоки на величину легочной вентиляции, получаем

$$C_{\text{CO}_2}^{(0)} + C_{\text{CO}_2}^{\text{вд}} = C_{\text{CO}_2}^{\text{выд}}. \quad (2)$$

Важным значением для имитации дыхания является правильное воспроизводство дыхательного коэффициента K_d , который определяет уровень потре-

ния кислорода человеком, а при испытаниях на установке ИЛ задается режимом испытаний. В последнем случае

$$K_d = W_{CO_2}^{(0)} / W_{O_2}, \quad (3)$$

где W_{O_2} – объем кислорода, который следует удалить из установки ИЛ в единицу времени, dm^3/min . Отсюда величина сброса кислорода W_{O_2} из ИЛ определяется из соотношения подачи диоксида углерода в начальный момент и коэффициента дыхания:

$$W_{O_2} = W_{CO_2}^{(0)} / K_d. \quad (4)$$

Обеспечение результатов адекватного испытаниям ИДА на людях потребления кислорода в ИЛ является очень важной задачей. Решение этой задачи позволяет имитировать различные уровни потребления кислорода человеком при различных психофизиологических состояниях, что не достигнуто в существующих аналогичных комплексах ИЛ [2].

В процессе испытаний ИДА на установке ИЛ измеряются объемные доли двух компонентов – кислорода и диоксида углерода, причем объемная доля кислорода $C_{O_2}^{вд}$ измеряется во вдыхаемой ГДС после холодильника, а объемная доля диоксида углерода $C_{CO_2}^{выд}$ – в выдыхаемой ГДС после увлажнителя. Объемная доля азота в ГДС рассчитывается исходя из допущения, что в контуре циркулирует трехкомпонентная смесь газов CO_2 , O_2 , N_2 . Следовательно, объемная доля азота во вдыхаемой ГДС

$$C_{N_2}^{вд} = 1 - C_{CO_2}^{вд} - C_{O_2}^{вд}. \quad (5)$$

Аналогично,

$$C_{N_2}^{выд} = 1 - C_{CO_2}^{выд} - C_{O_2}^{выд}. \quad (6)$$

На основании принятых допущений рассчитывается количество ГДС, которое необходимо удалить на фазе вдоха, dm^3/min , для обеспечения удаления из системы требуемого объема и массы кислорода

$$W_{ГДС} = W_{O_2} / C_{O_2}^{вд}. \quad (7)$$

Однако вместе с кислородом из системы удаляется также азот и диоксид углерода. Объемный расход азота и диоксида углерода, которые удаляются из установки вместе с расчетным количеством кислорода для обеспечения имитации потребления кислорода, определяется исходя из их объемных долей в сбрасываемой ГДС

$$W_{ГДС}(N_2) = C_{N_2}^{вд} W_{ГДС}, \quad (8)$$

где $W_{ГДС}(N_2)$ – сброс азота из ИЛ, dm^3/min ;

$$W_{ГДС}(CO_2) = C_{CO_2}^{вд} W_{ГДС}, \quad (9)$$

где $W_{ГДС}(CO_2)$ – сброс диоксида углерода из ИЛ, dm^3/min .

Указанные объемы CO_2 и N_2 необходимо вернуть в систему для сохранения материального баланса по этим газам, как это происходит при реальном использовании ИДА человеком. Расчет количества диоксида углерода и азота, которые необходимо подать в систему ведется на основании уравнений материального

баланса – это позволяет рассчитать количества отбора ГДС из системы, количества CO_2 и N_2 , которые необходимо вернуть в систему для различных режимов испытаний ИДА.

Таким образом, для полной имитации потребления кислорода из системы необходимо удалять ГДС с объемным расходом [2]

$$W_{\text{ГДС}} = W_{\text{O}_2} / C_{\text{O}_2}^{\text{вд}} = W_{\text{CO}_2}^{(0)} / (K_{\text{д}} C_{\text{O}_2}^{\text{вд}}). \quad (10)$$

Зависимости (2) – (10) позволяют разработать математическую модель дыхания, описывающую динамические процессы в ИЛ, имитирующие различные пневмотахограммы дыхания, уровни потребления кислорода, что обусловлено возможными психофизиологическими состояниями человека.

На рисунке 1 представлена структурная схема модели комплекса ИЛ, рассматриваемого как объект управления. Полагаем, что в контуре ИЛ циркулирует трехкомпонентная смесь газов, состоящая из CO_2 , O_2 , N_2 .

Входными параметрами модели являются: $X_{\text{п}}$ – координата положения штока поршневого дозатора сброса ГДС, дм; μ_1 , μ_2 – степени открытия клапанов подачи из баллонов CO_2 и N_2 соответственно; n – частота дыхания, мин^{-1} ; $V_{\text{д}}$ – глубина дыхания, дм^3 ; вид ПТГ – вид пневмотахограммы (синусоида, треугольник, трапеция); $K_{\text{д}}$ – коэффициент дыхания; $W_{\text{CO}_2}^{(0)}$ – поток подачи CO_2 , имитирующего выделение человеком диоксида углерода, $\text{дм}^3/\text{мин}$; $C_{\text{CO}_2}^{\text{вд}}$, $C_{\text{O}_2}^{\text{вд}}$, $C_{\text{N}_2}^{\text{вд}}$ – концентрации вдыхаемых CO_2 , O_2 и N_2 соответственно.

Выходные параметры (сигналы): $V_{\text{ГДС}}$ – объем ГДС, удаляемый из системы на фазе вдоха, дм^3 ; V_{CO_2} , V_{N_2} – объемы CO_2 и N_2 , возвращаемых в систему на фазе вдоха, соответственно, дм^3 ; $C_{\text{CO}_2}^{\text{ИЛ}}$, $C_{\text{O}_2}^{\text{ИЛ}}$, $C_{\text{N}_2}^{\text{ИЛ}}$ – текущие концентрации CO_2 , O_2 и N_2 в ИЛ соответственно, б/р.

Сигналы $V_{\text{ГДС}}$, V_{CO_2} , V_{N_2} в дальнейшем будут являться задающими сигналами, которые необходимо отслеживать системой управления комплексом ИЛ.

Газовые потоки в комплексе модулируются пневмотахограммами дыхания, являющимися в данном случае модулирующими функциями. В качестве модулятора выступает привод имитатора дыхания, задающий всему комплексу частоту, глубину и вид пневмотахограммы дыхания.

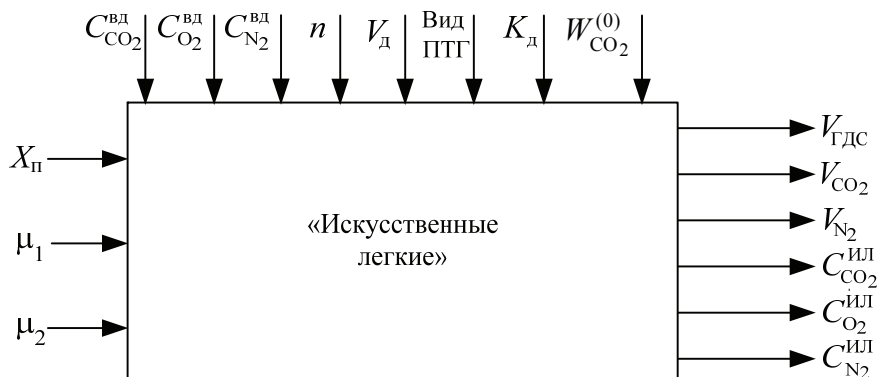


Рис. 1. Структурная схема модели комплекса ИЛ

Объем сброса ГДС $V_{ГДС}$, объемы подачи газов V_{CO_2} и V_{N_2} на каждом вдохе должны обрабатываться синхронно с приводом имитатора дыхания с помощью соответственно управляемого поршневого дозатора и регулируемых клапанов подачи газа.

На рисунке 2 изображены виды пневмотахограмм, используемых в модели. Фигуры, ограничиваемые данными кривыми, являются равновеликими, поскольку соответствуют одной и той же легочной вентиляции W_L . Треугольная и трапециевидальная пневмотахограммы в модели реализуются кусочно-линейными функциями.

На рисунке 2 обозначено: $\frac{dV}{dt}$ – объемная скорость вдыхаемых (выдыхаемых) газов, $\text{дм}^3/\text{с}$; $t_{\text{нц}}$ – текущее время начала очередного цикла вдоха-выдоха, с; $t_{\text{вд}}$ – продолжительность вдоха, с; $t_{\text{выд}}$ – продолжительность выдоха, с; $t_{\text{вд}} + t_{\text{выд}} = t_{\text{ц}}$ – длительность цикла вдоха-выдоха; $t_1 = \frac{60}{2n} - \frac{60}{hn}$, $t_2 = \frac{60}{hn}$, с, где для t_1 и t_2 : n – частота дыхания, мин^{-1} ; $h \in (2, 4)$ – коэффициент, характеризующий форму трапеции, при $h = 4$ трапеция превращается в треугольник.

Модулирующие функции для синусоидальной пневмотахограммы F^{sin} , трапециевидальной (треугольной) для вдоха $F_{\text{вд}}^{\text{TP}}$ и выдоха $F_{\text{выд}}^{\text{TP}}$ задаются соответственно выражениями:

$$F^{\text{sin}} = \pi \sin(2\pi n t); \quad (11)$$

$$F_{\text{вд}}^{\text{TP}} = \begin{cases} h(t - t_{\text{нц}})/t_1 & \text{при } t \leq t_{\text{нц}} + t_1; \\ h & \text{при } t_{\text{нц}} + t_1 < t < t_{\text{нц}} + t_2; \\ h(t_1 - t_{\text{нц}})(t - (t_{\text{нц}} + t_2))/t_1 & \text{при } t \geq t_{\text{нц}} + t_2; \end{cases} \quad (12)$$

$$F_{\text{выд}}^{\text{TP}} = \begin{cases} -h(t - (t_{\text{нц}} + t_{\text{вд}}))/t_1 & \text{при } t \leq t_{\text{нц}} + t_{\text{ц}} - t_2; \\ -h & \text{при } t_{\text{нц}} + t_{\text{ц}} - t_2 < t < t_{\text{нц}} + t_{\text{ц}} - t_1; \\ h(t_1 - t_{\text{нц}})(t - (t_{\text{нц}} + t_{\text{ц}} - t_1))/t_1 & \text{при } t \geq t_{\text{нц}} + t_{\text{ц}} - t_1. \end{cases} \quad (13)$$

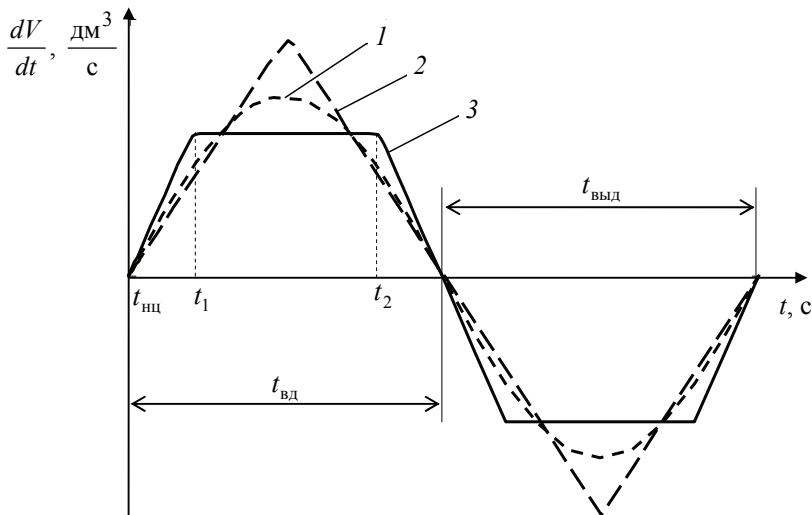


Рис. 2. Пневмотахограммы дыхания:
1 – синусоидальная; 2 – треугольная; 3 – трапециевидальная

Основные соотношения математической модели приведены ниже.

1. Изменение объемов газов на фазе вдоха, например, при реализации синусоидальной пневмотахограммы дыхания:

а) объемы выдыхаемых газов:

$$\begin{aligned}\frac{dV_{\text{CO}_2}^{\text{ИЛ}}}{dt} &= W_{\text{CO}_2}^{\text{ИЛ}} F^{\text{sin}}, \\ \frac{dV_{\text{O}_2}^{\text{ИЛ}}}{dt} &= W_{\text{O}_2}^{\text{ИЛ}} F^{\text{sin}}, \\ \frac{dV_{\text{N}_2}^{\text{ИЛ}}}{dt} &= W_{\text{N}_2}^{\text{ИЛ}} F^{\text{sin}},\end{aligned}\tag{14}$$

б) объем сброса ГДС

$$V_{\text{ГДС}} = S_{\text{п}} X_{\text{п}},\tag{15}$$

где $X_{\text{п}}$ определяется из уравнений:

$$\frac{X_{\text{п}}}{dt} = \frac{1}{S_{\text{п}}} W_{\text{ГДС}} F^{\text{sin}},\tag{16}$$

$$X_{\text{п}}^{\text{min}} \leq X_{\text{п}} \leq X_{\text{п}}^{\text{max}}, \quad |\dot{X}_{\text{п}}| \leq \dot{X}_{\text{п}}^{\text{max}},\tag{17}$$

в) возврат сброшенных газов N_2 и CO_2 из баллона:

$$\begin{aligned}\frac{dV_{\text{N}_2}}{dt} &= W_{\text{N}_2} F^{\text{sin}}, \\ \frac{dV_{\text{CO}_2}}{dt} &= W_{\text{CO}_2} F^{\text{sin}},\end{aligned}\tag{18}$$

где $W_{\text{CO}_2} = \mu_1 k_v \sqrt{\frac{p_{\text{CO}_2}^{\text{бал}} - p_{\text{ИЛ}}}{\rho}}$; $W_{\text{N}_2} = \mu_2 k_v \sqrt{\frac{p_{\text{N}_2}^{\text{бал}} - p_{\text{ИЛ}}}{\rho}}$; $\mu_{\text{min}} \leq \mu_{1,2} \leq \mu_{\text{max}}$;

г) потребление O_2

$$\frac{dV_{\text{O}_2}}{dt} = \frac{W_{\text{CO}_2}^{(0)}}{K_{\text{д}}} F^{\text{sin}}.\tag{19}$$

2. Изменение концентрации газов в ИЛ на вдохе при реализации синусоидальной пневмотахограммы:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} C_{\text{CO}_2}^{\text{ИЛ}} &= \left((W_{\text{CO}_2}^{(0)} + W_{\text{CO}_2}^{\text{ИЛ}}) (V_{\text{O}_2} K_{\text{д}} + V_{\text{ИЛ}} + V_{\text{ГДС}}^{\text{ВД}}) - \right. \\ &\quad \left. - (V_{\text{O}_2} K_{\text{д}} + C_{\text{CO}_2}^{(0)} V_{\text{ИЛ}} + V_{\text{CO}_2}^{\text{ИЛ}}) (W_{\text{CO}_2}^{(0)} + W_{\text{CO}_2}^{\text{ИЛ}} + W_{\text{O}_2}^{\text{ИЛ}} + W_{\text{N}_2}^{\text{ИЛ}}) \right) \times \\ &\quad \times F^{\text{sin}} / (V_{\text{O}_2} K_{\text{д}} + V_{\text{ИЛ}} + V_{\text{ГДС}}^{\text{ВД}})^2; \\ \frac{d}{dt} C_{\text{O}_2}^{\text{ИЛ}} &= (W_{\text{O}_2}^{\text{ИЛ}} (V_{\text{O}_2} K_{\text{д}} + V_{\text{ИЛ}} + V_{\text{ГДС}}^{\text{ВД}}) - \\ &\quad - (C_{\text{O}_2}^{(0)} V_{\text{ИЛ}} + V_{\text{O}_2}^{\text{ИЛ}}) (W_{\text{CO}_2}^{(0)} + W_{\text{CO}_2}^{\text{ИЛ}} + W_{\text{O}_2}^{\text{ИЛ}} + W_{\text{N}_2}^{\text{ИЛ}})) \times \\ &\quad \times F^{\text{sin}} / (V_{\text{O}_2} K_{\text{д}} + V_{\text{ИЛ}} + V_{\text{ГДС}}^{\text{ВД}})^2; \\ \frac{d}{dt} C_{\text{N}_2}^{\text{ИЛ}} &= -\frac{d}{dt} C_{\text{CO}_2}^{\text{ИЛ}} - \frac{d}{dt} C_{\text{O}_2}^{\text{ИЛ}}.\end{aligned}\tag{20}$$

3. Изменение объема ГДС на выдохе при реализации синусоидальной пневмотахограммы:

$$\frac{dV_{\text{ГДС}}^{\text{вд}}}{dt} = W_{\text{д}} n F^{\sin}. \quad (21)$$

4. Потоки газов, поступающих в блок имитации дыхания ИЛ для схемы с имитацией потребления кислорода по массе и объему, $\text{дм}^3/\text{мин}$:

$$W_{\text{CO}_2}^{\text{ИЛ}} = C_{\text{CO}_2}^{\text{вд}} V_{\text{д}} n; \quad W_{\text{O}_2}^{\text{ИЛ}} = C_{\text{O}_2}^{\text{вд}} V_{\text{д}} n - W_{\text{O}_2}; \quad W_{\text{N}_2}^{\text{ИЛ}} = C_{\text{N}_2}^{\text{вд}} V_{\text{д}} n. \quad (22)$$

Обозначения в формулах (14)–(22): $S_{\text{п}}$ – площадь поршня поршневого дозатора отбора ГДС, дм^2 ; $W_{\text{ГДС}} = W_{\text{CO}_2}^{(0)} / (K_{\text{д}} C_{\text{O}_2}^{\text{вд}})$ – поток сброса ГДС, $\text{дм}^3/\text{мин}$; $W_{\text{N}_2} = C_{\text{N}_2}^{\text{вд}} W_{\text{ГДС}}$ – поток возврата N_2 на входе из баллона, $\text{дм}^3/\text{мин}$; $W_{\text{CO}_2} = C_{\text{CO}_2}^{\text{вд}} W_{\text{ГДС}}$ – поток возврата CO_2 на входе из баллона, $\text{дм}^3/\text{мин}$; $W_{\text{O}_2} = W_{\text{CO}_2}^{(0)} / K_{\text{д}}$ – поток потребления O_2 легкими, $\text{дм}^3/\text{мин}$; $k_{\text{в}}$ – пропускная способность клапана; $P_{\text{CO}_2}^{\text{бал}}$, $P_{\text{N}_2}^{\text{бал}}$ – давление CO_2 и N_2 в баллонах, Па; $p_{\text{ИЛ}}$ – давление ГДС в ИЛ, Па; ρ – плотность ГДС в ИЛ, $\text{кг}/\text{м}^3$; $V_{\text{ИЛ}}$ – объем системы ИЛ, дм^3 ; $V_{\text{ГДС}}^{\text{вд}} = V_{\text{CO}_2}^{\text{ИЛ}} + V_{\text{O}_2}^{\text{ИЛ}} + V_{\text{N}_2}^{\text{ИЛ}}$ – объем вдоха с учетом потребленного кислорода, дм^3 ; V_{O_2} – объем потребленного кислорода, дм^3 ; $C_{\text{CO}_2}^{(0)}$, $C_{\text{O}_2}^{(0)}$ – концентрации соответственно диоксида углерода и кислорода в начале вдоха.

Работа выполнена в рамках соглашения № 14.В37.21.2083 Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

Список литературы

- ГОСТ Р 12.4.220–2001 ССБТ. Средства индивидуальной защиты органов дыхания. Аппараты изолирующие автономные с химически связанным кислородом (самоспасатели). Общие технические требования. Методы испытаний. – Введ. 2002–07–01. – М.: Изд-во стандартов, 2001. – 23 с.
- Гудков, С.В. Совершенствование методики испытания изолирующих дыхательных аппаратов с химически связанным кислородом / С.В. Гудков, Д.С. Дворецкий, А.Ю. Хромов // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2009. – Т. 15, № 3. – С. 589–597.

Mathematical Modeling of Human Respiratory

V.A. Pogonin¹, P.M. Onevsky¹, A.M. Ivanov¹, E.V. Shishov²

Department “Information Processes and Control”, TSTU (1); onev1@mail.ru;
State Research Institute of Chemical Analysis, St. Petersburg (2)

Key words and phrases: artificial lungs; modulating functions; oxygen consumption; pneumotachogram.

Abstract: The paper presents the mathematical model of human external respiration, describing the dynamic processes in artificial lungs imitating various pneumotachograms and levels of oxygen consumption. It is proposed to use modulating functions in pneumotachograms.

Mathematische Modellierung der Atmung des Menschen

Zusammenfassung: Es ist das mathematische Modell der äußerlichen Atmung des Menschen, das die dynamischen Prozesse in den künstlichen Lungen beschreibt und verschiedene Pneumotachogramme der Atmung und die Niveaus des Konsums des Sauerstoffs imitiert, erarbeitet. Es wird bei der Realisierung der Pneumotachogramme der Atmung vorgeschlagen, die modulierenden Funktion zu verwenden.

Modélage mathématique de la respiration de l'homme

Résumé: Est élaboré le modèle mathématique de la respiration extérieure de l'homme qui décrit les processus dynamiques dans les poumons artificiels et qui imite de différents pneumotachygrammes de la respiration et des niveaux de la consommation de l'oxygène. Est proposé d'utiliser les fonctions du modélage lors de la réalisation des pneumotachygrammes.

Авторы: *Погонин Василий Александрович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Информационные процессы и управление»; *Оневский Павел Михайлович* – кандидат технических наук, доцент кафедры «Информационные процессы и управление»; *Иванов Андрей Михайлович* – аспирант кафедры «Информационные процессы и управление», ФГБОУ ВПО «ТГТУ»; *Шишов Евгений Витальевич* – инженер, ОАО «Государственный научно-исследовательский химико-аналитический институт», г. Санкт-Петербург.

Рецензент: *Матвейкин Валерий Григорьевич* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Информационные процессы и управление» ФГБОУ ВПО «ТГТУ», заместитель генерального директора ОАО «Корпорация «Росхимзащита», г. Тамбов.
