

О ПРЕИМУЩЕСТВАХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОТСЧЕТА ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

О.И. Гайнутдинов

Кафедра «Физика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ»;
gainutdin49@mail.ru

Представлена членом редколлегии профессором В.Ф. Калинин

Ключевые слова и фразы: гироскопическая система демпфирования; неинерциальные системы отсчета; маятники.

Аннотация: На примерах анализа поступательного и вращательного движений маятника, а также действия гироскопической системы демпфирования, показаны преимущества использования неинерциальных систем отсчета.

При решении многих физических задач предпочтение обычно отдается инерциальным системам отсчета (ИСО), что допустимо для наиболее простых случаев движения исследуемого объекта [1]. К сожалению, использование неинерциальных систем отсчета (НИСО) здесь весьма ограниченное, что объясняется отчасти рассмотрением сравнительно простых задач, не требующих специальных приемов решения. С этим нельзя согласиться хотя бы по той причине, что в действительности приходится иметь дело с объектами, совершающими сложные движения [2]. Достаточно вспомнить о гироскопических системах, широко используемых в авиации и ракетной технике.

Покажем преимущества использования неинерциальных систем отсчета на примере решения ряда физических задач.

1. Анализ динамики маятника на поступательно движущейся платформе

Маятник, закрепленный на платформе (рис. 1, а, б), движется поступательно с ускорением \vec{a}_0 . Необходимо определить угол отклонения α маятника от вертикали.

1.1. Решение в инерциальной системе отсчета

Относительно ИСО (К-системы) маятник (см. рис. 1, а) движется с ускорением \vec{a}_0 , которое сообщается равнодействующей сил тяжести \vec{F}_T и натяжения нити \vec{F}_H , поэтому согласно второму закону Ньютона можно записать уравнение

$$m\vec{a}_0 = \vec{F}_T + \vec{F}_H. \quad (1)$$

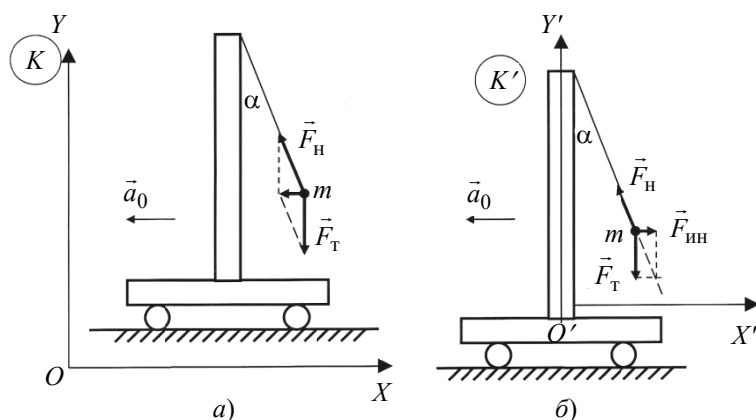


Рис. 1. Решение задач на поступательно движущейся платформе в системах отсчета: а – инерциальных; б – неинерциальных

В проекциях на оси OX и OY получим

$$-ma_0 = -F_H \sin \alpha, \quad 0 = F_T + F_H \cos \alpha,$$

откуда

$$\alpha = \arctg(a_0/g). \quad (2)$$

1.2. Решение в неинерциальной системе отсчета

Относительно НИСО (K' -системы) маятник (см. рис. 1, б) неподвижен, то есть выполняется условие равновесия ($\vec{a}'_0 = 0$)

$$-m\vec{a}'_0 = \vec{F}_T + \vec{F}_H + \vec{F}_{ин} = 0.$$

С учетом того, что $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}'_0$, получим из треугольника сил

$$\alpha = \arctg(a_0/g). \quad (4)$$

Как видим, результаты (2) и (4) одинаковы.

2. Анализ динамики маятника на вращающейся платформе

Маятник, закрепленный на платформе (рис. 2, а, б), вращается вместе с ней относительно вертикальной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Необходимо определить угол отклонения α маятника от вертикали.

2.1. Решение в инерциальной системе отсчета

Относительно ИСО (K -системы) груз движется по окружности радиусом R (см. рис. 2, а), то есть движется с нормальным ускорением \vec{a}_n , сообщаемым равнодействующей сил \vec{F}_T и \vec{F}_H

$$m\vec{a}_n = \vec{F}_T + \vec{F}_H, \quad (5)$$

что в проекциях на оси OX и OY дает:

$$-ma_n = -F_H \sin \alpha, \quad 0 = -F_T + F_H \cos \alpha,$$

откуда, с учетом того, что $a_n = \omega^2 R$, получим

$$\alpha = \arctg(\omega^2 R/g). \quad (6)$$

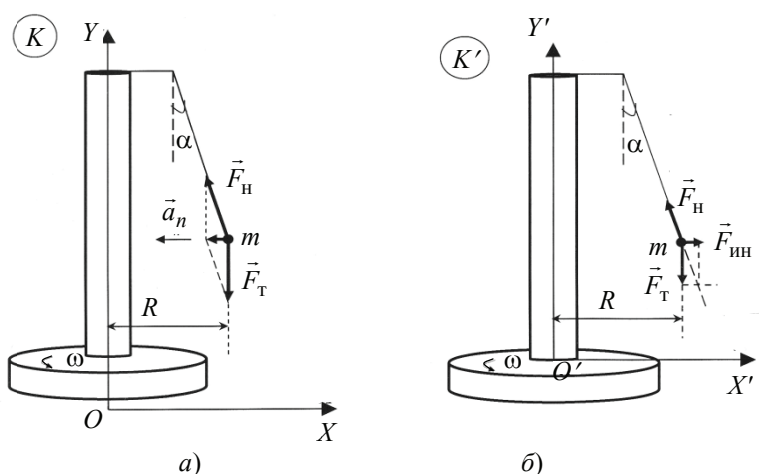


Рис. 2. Решение задач на вращающейся платформе в системах отсчета: а – инерциальных; б – неинерциальных

2.2. Решение в неинерциальной системе отсчета

Относительно НИСО (K' -системы), которая связана с платформой и вращается вместе с ней, маятник (см. рис. 2, б) неподвижен, поэтому ($\vec{a}'_n = 0$)

$$m\vec{a}'_n = \vec{F}_T + \vec{F}_H + \vec{F}_{ин} = 0. \quad (7)$$

С учетом того, что $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_n$ и $a_n = \omega^2 R$, из треугольника сил получим

$$\alpha = \text{arctg}(\omega^2 R/g). \quad (8)$$

И в этом случае результаты (6) и (8) одинаковы.

Сравнение решений рассмотренных задач показывает, что использование неинерциальных систем отсчета делает решение задач более коротким. Однако этот вывод сделан по результатам решения сравнительно простых задач, и преимущества использования НИСО не вполне очевидны.

Рассмотрим математическое описание взаимодействия распределенной упругой конструкции и силового гироскопа, выполняющего роль гасителя колебаний.

3. Анализ динамики авиационной конструкции при использовании гироскопической системы демпфирования

Авиационная конструкция является типичной распределенной упругой конструкцией. При своем движении конструкция подвержена аэроупругим колебаниям, а силовой гироскоп, установленный на ней, противодействует этим колебаниям. В гироскопии математическое описание поведения систем основано на использовании неинерциальных систем отсчета.

3.1. Анализ динамических свойств колебательной системы по структуре действующих в ней сил

Подход к решению поставленной задачи строится на основе оригинальных теорем Томсона и Тета, позволяющих анализировать динамику систем по структуре действующих в них сил [3].

В основе такого подхода лежит трактовка составляющих известного матричного уравнения вида

$$A\ddot{q} + D_1\dot{q} + B_1q = Q, \quad (9)$$

как некоторых сил определенной структуры и, соответственно, свойств. При этом в некоторых случаях силы представляют собой физически реальные силы, а в других – только математические составляющие определенной структуры в уравнениях движения.

Матрицы D_1 и B_1 в уравнении (9) разбиваются на симметричные и кососимметричные части:

$$D_1 = D + G, \quad B_1 = B + P,$$

где симметричные матрицы D и B и кососимметричные матрицы G и P определены как

$$D = \frac{1}{2}(D_1 + D_1^T); \quad B = \frac{1}{2}(B_1 + B_1^T);$$

$$G = \frac{1}{2}(D_1 - D_1^T); \quad P = \frac{1}{2}(B_1 - B_1^T).$$

Уравнение (9) принимает вид

$$A\ddot{q} + D\dot{q} + G\dot{q} + Bq + Pq = Q. \quad (10)$$

Каждый из входящих в это уравнение членов можно формально интерпретировать как силу. Например, составляющая $A\ddot{q}$ соответствует кинетической энергии системы: определенно-положительной квадратичной форме $T = A\dot{q}\dot{q}/2$. Сила $-D\dot{q}$ называется диссипативной силой, если квадратичная форма $F = D\dot{q}\dot{q}/2$ не отрицательна (в этом случае эта функция называется диссипативной функцией Релея). Если функция F может принимать отрицательные значения, то среди составляющих силы $-D\dot{q}$ есть ускоряющие силы (они создаются, как правило, искусственно). Сила $-G\dot{q}$ называется гироскопической силой. Для нее характерна кососимметричная матрица коэффициентов G . Обычно эти силы имеются в системах, содержащих гироскопы, но они также могут быть представлены формально в уравнениях движения. Отличительной особенностью гироскопических сил является то, что мощность их на любых перемещениях системы равна нулю (они только изменяют направление движения системы или ее частей, не изменяя модуля скорости). Сила $-Bq$ называется консервативной или потенциальной силой. Ей соответствует квадратичная форма $\Pi = Bq\bar{q}/2$ – потенциальная энергия системы. Обычно эта сила представляется реальными силами упругости, тяжести и т.п. Сила $-Pq$ называется неконсервативной позиционной силой. Для этой силы характерна кососимметричная матрица коэффициентов P . Неконсервативные позиционные силы возникают как естественным образом, так и с помощью специальных устройств.

Исследование устойчивости системы проводится на основе характеристического уравнения, коэффициенты и корни которого определяются соотношением в системе сил различной структуры. В частности, показано [3–6], что:

1) влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость системы в целом положительно;

2) неконсервативные позиционные силы в системе в основном являются дестабилизирующим фактором с точки зрения устойчивости;

3) консервативные силы обеспечивают асимптотическую устойчивость системы относительно координат.

3.2. Гироскопическая система демпфирования

Гироскопическая система демпфирования (ГСД) в одном из вариантов реализации [7, 8] состоит из двухстепенного гироскопа 1, ось подвеса которого шарнирно закреплена в силовом наборе защищаемой конструкции (рис. 3), демпфера 2 и упругого узла 3. Ось подвеса гироскопа перпендикулярна оси, относительно которой совершаются крутильные колебания конструкции.

Принцип действия ГСД заключается в следующем. При колебаниях конструкции, например, крыла самолета, с угловой скоростью $\dot{\phi}$ под действием внешнего переменного момента $\vec{M}_{вн}$ возникает прецессия гироскопа вокруг оси его подвеса под действием первичного гироскопического момента $M_{Г1} \approx H\dot{\phi}$ с угловой скоростью $\dot{\beta}$.

Тем самым гироскоп частично преобразует энергию колебаний крыла в энергию своих прецессионных колебаний. Энергия этих колебаний рассеивается в демпфере 2. Кроме того, в результате прецессии гироскопа возникает вторичный (стабилизирующий) гироскопический момент $M_{Г2} \approx H\dot{\beta}$, направленный против внешнего момента $\vec{M}_{вн}$ и частично его компенсирующий. Упругий элемент используется для частотной настройки ГСД.

3.3. Уравнения взаимодействия авиационной конструкции с гироскопической системой демпфирования

Решается задача управления крутильными аэроупругими колебаниями длинномерной авиационной конструкции (рис. 4) путем размещения в консолях крыла двух силовых гироскопов.

Движение рассматривается относительно осей системы координат $Ox_k Y_k Z_k$, связанной с самолетом. С гироскопом связана подвижная относительно самолета система координат $Ox_G Y_G Z_G$, начало которой совпадает с центром масс гироскопа. Положение центра масс гироскопа задается координатами x_G и z_G в системе координат $Ox_k Y_k Z_k$. Системы координат $Ox_k Y_k Z_k$ и $Ox_G Y_G Z_G$ являются элементами неинерциальных систем отсчета.

При выводе использовались стандартные уравнения Лагранжа 2-го рода и в результате получено матричное уравнение в форме (10). При этом матрицы

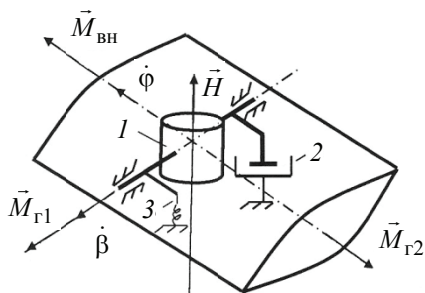


Рис. 3. Схема ГСД

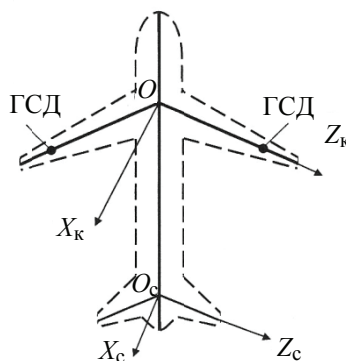


Рис. 4. Схема размещения ГСД

инерционных A , диссипативных D , гироскопических G и консервативных B сил, а также вектор возмущающих сил Q выглядят так:

$$A = \begin{vmatrix} M_j^* & 2J'_\Gamma f'_{kj} \\ J_\Gamma \sum_{i=1}^n f'_{ki} & J_\Gamma \end{vmatrix}; \quad D = \begin{vmatrix} 2c_\Gamma f'_{kj} \sum_{i=1}^n f'_{kj} & -2c_\Gamma f'_{kj} \\ -c_\Gamma \sum_{i=1}^n f'_{ki} & c_\Gamma \end{vmatrix};$$

$$G = \begin{vmatrix} 0 & -2H\Phi_{kj} \\ H \sum_{i=1}^n \Phi_{ki} & 0 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} M'_j \omega_j^2 + 2k_\Gamma f'_{kj} \sum_{i=1}^n f'_{ki} & -2k_\Gamma f'_{ki} \\ -k_\Gamma \sum_{i=1}^n f'_{ki} & k_\Gamma \end{vmatrix};$$

$$Q = \begin{Bmatrix} P_j \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad q = \begin{Bmatrix} q_j \\ \beta \end{Bmatrix}; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Анализ этих матриц показывает, что силовое воздействие ГСД на крыло выражается сосредоточенными гироскопическим $H\dot{\beta}$, диссипативным $c_\Gamma \dot{\beta}$ и упругим $k_\Gamma \beta$ моментами. Уравнение собственно ГСД записывается в этом случае как

$$J_\Gamma \ddot{\beta} + c_\Gamma [\dot{\beta} - \sum f'_{ki}(z_\Gamma) \dot{q}_i] + k_\Gamma [\beta - \sum f'_{ki}(z_\Gamma) q_i] = H \sum \Phi_{ki}(z_\Gamma) \dot{q}_i.$$

Из этого уравнения следует, что его правая часть представляет собой входной сигнал для гироскопа, который, реагируя на него, оказывает стабилизирующее действие на колеблющуюся авиационную конструкцию.

3.4. Применение гироскопической системы демпфирования для управления колебаниями авиационной конструкции

В качестве примера применения ГСД для уменьшения уровня вынужденных колебаний авиационных конструкций приведем результаты математического моделирования для самолета, схематически представленного на рис. 5. Такая конструкция из-за особенностей компоновки подвержена значительным виброперегрузкам при полете в турбулентной атмосфере. Предлагается использовать гироскопические свойства двигателя, расположенного в фюзеляже, путем доработки подвески двигателя для некоторого его освобождения относительно конструкции фюзеляжа [9].

На рисунке 6 показана амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) для вертикальной виброперегрузки n_y конструкции в кабине экипажа и месте нахождения бортового приборного оборудования на циклическую болтанку с частотой ω .

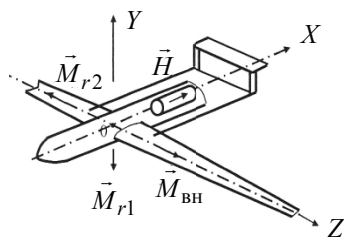


Рис. 5. Схема самолета с ГСД

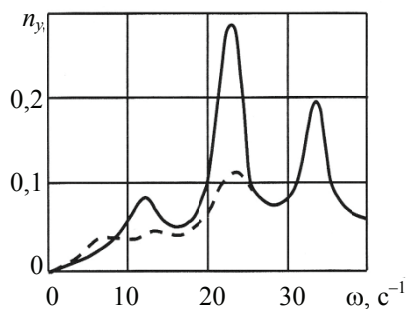


Рис. 6. АЧХ виброперегрузки

Пиковые значения перегрузок (сплошная линия) соответствуют изгибному тону колебаний крыла, балок хвостового оперения и фюзеляжа. При работающей ГСД (штриховая линия) амплитуды перегрузок на резонансах уменьшаются до 50 %. Расчеты показывают, что среднеквадратические значения перегрузок при полете в турбулентной атмосфере уменьшаются на 25–30 %. Эти результаты считаются достаточными для обеспечения безопасного полета самолета.

Таким образом, приведенные примеры решения некоторых физических задач вполне определенно показывают преимущества применения неинерциальных систем отсчета.

Список литературы

1. Иродов, И.Е. Основные законы механики : учебник / И.Е. Иродов. – М. : Высшая школа, 1985. – 248 с.
2. Ишлинский, А.Ю. Классическая механика и силы инерции / А.Ю. Ишлинский. – М. : Наука, 1987. – 320 с.
3. Thomson, W. Treatise of Natural Philosophy. Pt. I. / W. Thomson, P. Tait. – Oxford : Univ. Press, 1967. – 727 p.
4. Метелицын, И.И. К вопросу о гироскопической стабилизации / И.И. Метелицын // Докл. АН СССР. – 1952. – Т. 86, № 1. – С. 31–34.
5. Четаев, Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике / Н.Г. Четаев. – М. : Изд-во АН СССР, 1962. – 535 с.
6. Меркин, Д.Р. Гироскопические системы / Д.Р. Меркин. – М. : Наука, 1974. – 344 с.
7. Управление упругими колебаниями авиационных конструкций при помощи силовых гироскопов / Р.И. Виноградов [и др.] // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 4. – С. 41–43.
8. А. с. 898708 СССР, МКИ В 64 С 13/18. Противофлаттерное устройство / Р.И. Виноградов, О.И. Гайнутдинов, В.А. Левашов (СССР). – № 2587655/40–23 ; заявл. 07.03.78 ; опубл. 23.10.82. Бюл. № 39. – 4 с.
9. А. с. 1578981 СССР, МКИ В 64 D 27/00, 29/06. Устройство для крепления двигателя внутри фюзеляжа / Р.И. Виноградов, О.И. Гайнутдинов, А.Х. Каримов, Ю.В. Петров, А.Н. Прокопьев (СССР). – № 4386847/40–23 ; заявл. 29.02.88 ; опубл. 15.03.90. – 3 с.

On the Benefits of Using Non-Inertial Reference Systems in Solving Certain Physical Tasks

O.I. Gaynutdinov

*Department «Physics», TSTU;
gainutdin49@mail.ru*

Key words and phrases: gyroscopic damping system; non-inertial reference systems; pendulums.

Abstract: On the example of translational and rotational motions of the pendulum and the gyroscopic damping system the advantages of using non-inertial reference systems have been shown.

Über Vorteile der Benutzung der nichtinertialen Abzählensysteme bei der Lösung der einigen physikalischen Aufgaben

Zusammenfassung: Am Beispiel der Analyse der Fort- und Drehbewegungen des Pendels und der Funktion des gyroskopischen Systems der Dämpfung sind die Vorteile der Benutzung der nichtinertialen Abzählensysteme gezeigt.

Sur les avantages de l'emploi des systèmes de non inertie du calcul lors de la solution de quelques problèmes physiques

Résumé: A l'exemple de l'analyse du mouvement progressif et rotatif du pendule ainsi que du fonctionnement du système gyroskopique du damping sont montrés les avantages de l'emploi des systèmes de non inertie du calcul.

Автор: *Гайнутдинов Олег Инсафович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Физика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: *Молотков Николай Яковлевич* – доктор педагогических наук, профессор кафедры «Физика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».
