УДК 519.622.2

О ПОСТРОЕНИИ УПРАВЛЕНИЯ ПОВЕДЕНИЕМ САМОРАЗВИВАЮЩЕЙСЯ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКИ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ

С.В. Безгин, А.А. Иванов

Кафедра «Прикладная математика и информатика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ», bezgin@rcbd.org

Представлена членом редколлегии профессором В.Г. Матвейкиным

Ключевые слова и фразы: вычислительный эксперимент; модель саморазвивающейся рыночной экономики; оптимальное управление; система обыкновенных дифференциальных уравнений; схема последовательных приближений.

Аннотация: Рассмотрено применение схемы последовательных приближений для построения управления поведением саморазвивающейся рыночной экономики по квадратичному критерию качества. Приведены результаты вычислительного эксперимента по управлению данной моделью.

Постановка задачи

В работе [1] рассмотрена математическая модель саморазвивающейся рыночной экономики. Данная модель описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= bx((1-\sigma)z-\delta y), \\ \dot{y}(t) &= x(1-(1-\delta)y+\sigma z), \\ \dot{z}(t) &= a(y-dx), \end{aligned} \tag{1}$$

где x – показатель капитала; y – показатель платежеспособного спроса; z – показатель нормы прибыли; a, b, d, σ, δ – параметры, характеризующие систему; t – время. Для реального применения управление в данной системе легче всего организовать путем управления капиталом. В самом деле, предприниматель всегда может выводить капитал из системы, а также привлекать средства извне. Поэтому введем в первое уравнение системы функцию управления $u(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= bx((1-\sigma)z-\delta y)+u(t), \\ \dot{y}(t) &= x(1-(1-\delta)y+\sigma z), \\ \dot{z}(t) &= a(y-dx). \end{aligned} \tag{2}$$

Перепишем систему (2) в матричном виде. Для этого положим $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\dot{X}(t) = AX + Bu(t) + f(X), \qquad (3)$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -ad & a & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $f(X) = \begin{pmatrix} bx((1-\sigma)z - \delta y \\ x((\delta - 1)y + \sigma z) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Введем функцию $Z(t)$, описывающую желаемую траекторию капитала. Предположим, что начальное состояние задано

$$X(t_0) = c. \qquad (4)$$

Тогда задача управления системой (3) по квадратичному критерию будет заключаться в минимизации функционала [2]

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \Big[\langle e(t), Qe(t)\rangle + \langle u(t), ru(t)\rangle\Big]dt + \frac{1}{2}\langle e(T), Pe(T)\rangle, \qquad (5)$$

в котором T – фиксированное конечное время; Q и P – положительные полуопределенные матрицы; r – положительное число; $e(t)$ – ошибка системы, то есть

$$e(t) = X(t) - Z(t),$$

для всех значений $t_0 \le t \le T$; матрица Q задает вес ошибки в критерии; матрица P – вес ошибки в момент времени T; r – вес управляющего воздействия.

Описание метода

Для построения управления применим схему последовательных приближений, описанную в [3, 4]. Схема построения решения задачи (3)–(5) заключается в следующем: сначала найдем $K(t)$ – решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{K}(t) = -K(t)A - A'K(T) + \frac{1}{r}K(T)BB'K(t) - Q, \qquad (6)$$

с начальным условием $K(T) = P$ назад по времени до t_0 (здесь и далее запись A' означает применение операции транспонирования к матрице A).

Затем найдем первое приближение управления как

$$u_0(t) = \frac{1}{r}B'\big[PZ(T) - K(t)c\big].$$

После того как получим первое приближение управления, будем применять следующую схему последовательных приближений.

1. Вычислим первое приближение $X_0(t)$. Для этого решаем уравнение

$$\dot{X}_0(t) = AX_0 + Bu_0(t) + f(X_0), \quad X_0(t_0) = c. \qquad (7)$$

2. Далее на каждом шаге $N = 0,1,\ldots$ определяем $h_{N+1}(t)$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{h}_{N+1}(t) = -\left[A - \frac{1}{r}BB'K(t)\right]' h_{N+1}(t) - QZ(t) + K(t)f(X_N(t)), \tag{8}$$

с начальным условием $h_{N+1}(T) = PZ(T)$ назад по времени до t_0.

3. Затем вычислим следующее приближение траектории системы – решение дифференциального уравнения

$$\dot{X}_{N+1} = AX_{N+1} + Bu_{N+1} + f(X_{N+1}), \; X_{N+1}(t_0) = c, \tag{9}$$

где управление задается законом

$$u_{N+1}(t) = \frac{1}{r}B'\left[h_{N+1}(t) - K(t)X_{N+1}(t)\right]. \tag{10}$$

Вычисления останавливаются, когда норма разности между двумя приближениями станет меньше заданной точности ε. В качестве таковой нормы может выступать выражение

$$\max_{t\in[t_0;T]} \left|X_{N+1}(t) - X_N(t)\right|.$$

При практической реализации данного метода последовательных приближений для решения дифференциальных уравнений (6) – (9) удобно воспользоваться методом Рунге–Кутты четвертого порядка, как сочетающим небольшую вычислительную сложность и высокую (порядка $O(h^4)$, где h – величина шага сетки) точность интегрирования.

Реализация метода

Для решения задачи (3) – (5) нами была разработана компьютерная программа (исходный код можно найти в разделе «Файлы» сайта http://cluster.tstu.ru, файл mag.tgz). В качестве языка реализации алгоритма был выбран язык OCaml. Это функциональный язык программирования, разработанный в 1985 г. в институте INRIA (*фр.* – Institut national de recherche en informatique et en automatique).

Как несложно заметить, решения уравнений (8) и (9) необходимо искать в различных направлениях по времени. Этот фактор может привнести дополнительные трудности, связанные с разворотом результата вычисления (8). Одной из особенностей функциональных языков программирования являются списки как основная структура данных. Для построения списков используется оператор *cons* (в OCaml обозначается ::), помещающий элемент в начало списка. Таким образом, результатом решения уравнения (8) будет список значений функции в прямом порядке времени, который нам и требуется для решения уравнения (9).

Для реализации матричной арифметики был использован модуль Bigarray библиотеки OCaml Batteries Included. Для хранения данных используется тип (float, 'a, 'b) Batteries.Bigarray.Array2.t – двумерный массив чисел с плавающей точкой двойной точности. Матричная арифметика, а также функция решения дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты 4 порядка описаны в файле matrix.ml.

Численный эксперимент

Нами был проведен численный эксперимент для построения управления системой (2). В качестве параметров системы были взяты следующие значения, приведенные в [1]: $a = 7$; $b = 0{,}4$; $d = 1{,}17$; $\sigma = 0{,}284$; $\delta = 0{,}681$. Параметры функционала (5), использовавшиеся при расчете,

$$r = 0{,}01;\ Q = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ P = \begin{pmatrix} 1{,}156 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве функции, характеризующей заданный режим функционирования системы, приняли S-образную кривую

$$Z(t) = \begin{pmatrix} 3 + \operatorname{arctg}(10t - 5) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Начальное состояние системы

$$c = \begin{pmatrix} 3 + \operatorname{arctg}(-5) \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Для метода Рунге–Кутта применялся шаг интегрирования 10^{-4}. Параметр точности расчета составлял $\varepsilon = 10^{-5}$; временные пределы управления $t_0 = 0; T = 1$.

Расчет, выполненный для данных параметров, дает результат, достаточно близкий к заданной функции. Отклонение реального режима от заданного не превышает 0,1. Графически результаты эксперимента представлены на рис. 1. Как видно из графика, ошибка управления $e(t)$ не превышает 0,06, что составляет примерно 2 % от значения функции в этот момент времени.

Данный результат получен за 11 итераций метода последовательных приближений.

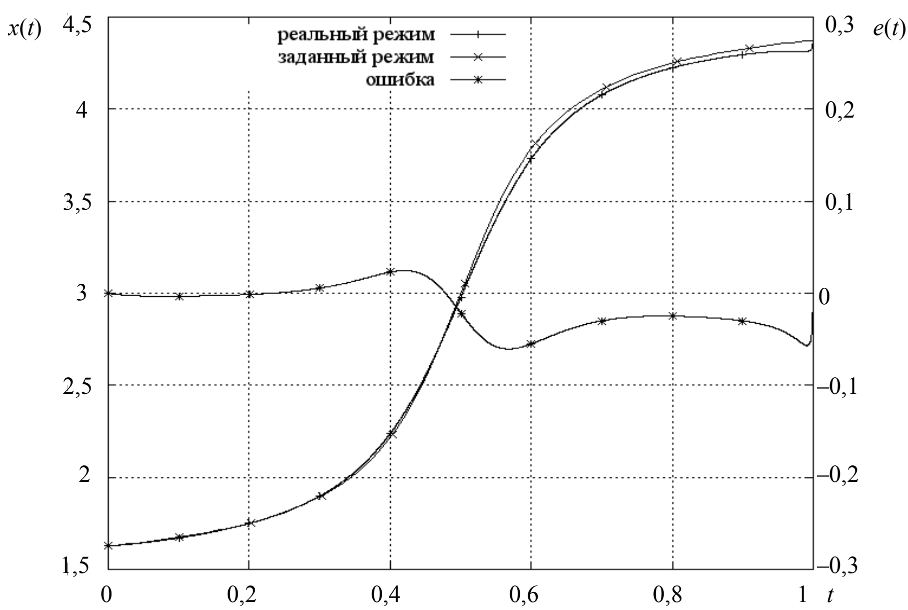

Рис. 1. Результаты численного эксперимента

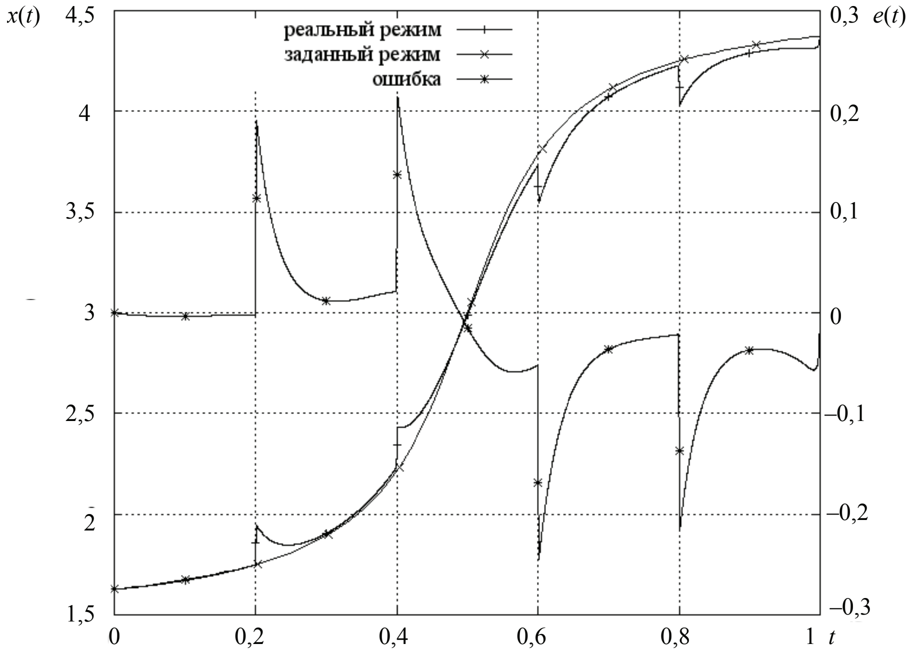

Рис. 2. Результаты численного эксперимента (модель с возмущениями)

Для исследования устойчивости управления в модель (2) были введены возмущающие воздействия в виде кратковременных Δ-образных возмущений $m(t)$

$$\dot{x}(t) = bx((1-\sigma)z - \delta y) + u(t) + m(t),$$
$$\dot{y}(t) = x(1-(1-\delta)y + \sigma z),$$
$$\dot{z}(t) = a(y - dx);$$

где $m(t) = \begin{cases} 100, t \in [0{,}199; 0{,}201] \cup [0{,}399; 0{,}401]; \\ -100, t \in [0{,}599; 0{,}601] \cup [0{,}799; 0{,}801]; \\ 0, \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$

Результаты расчета приведены на рис. 2 – возмущения быстро нивелируются, и решение является устойчивым.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 10-07-00136 и 11-07-00098).

Список литературы

1. Магницкий, Н.А. Новые методы хаотической динамики / Н.А. Магницкий, С.В. Сидоров. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 320 с.

2. Атанс, М. Оптимальное управление / М. Атанс, П. Фалб ; пер. с англ. Г.Н. Алексакова ; под ред. Ю.И. Топчеева. – М. : Машиностроение, 1968. – 764 с.

3. Пчелинцев, А.Н. О построении оптимального управления нелинейными системами по квадратичному критерию / А.Н. Пчелинцев, С.М. Дзюба, С.М. Лобанов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. Междунар. конф. // Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 2010. – С. 135–137.

4. Об оптимальном управлении одним классом нелинейных систем по квадратичному критерию / А.П. Афанасьев [и др.] // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2010. – Т. 16, № 2. – С. 361–374.

On the Control over Self-Developing Market Economy by Quadratic Criterion

S.V. Bezgin, A.A. Ivanov

Department «Applied Mathematics and Computer Science», TSTU, bezgin@rcbd.org

Key words and phrases: computational experiment; model of self-developing market economy; optimal control; the system of ordinary differential equations; successive approximation scheme.

Abstract: The application of a successive approximation scheme for finding optimal control by the quadratic criterion was reviewed in the paper. The results of the computational experiment are presented.

Über Aufbau der Steuerung von dem Verhalten der selbstentwickelnden Marktwirtschaft nach dem quadratischen Kriterium

Zusammenfassung: Es ist die Anwendung des Schemas der konsequenten Approximationen für den Aufbau der Steuerung von dem Verhalten der selbstentwickelnden Marktwirtschaft nach dem quadratischen Kriterium der Qualität betrachtet. Es sind die Ergebnisse des Rechenexperimentes für die Steuerung vom solchen Modell angeführt.

Sur la construction de la gestion du conditionnement de l'économie de marché auto-développant d'après le critère quadratique

Résumé: Est examiné l'emploi du schéma des approximations successives pour la construction de la gestion du conditionnement de l'économie de marché auto-développant d'après le critère quadratique de la qualité. Sont cités les résultats de l'expériment calculatif sur la gestion d'un tel modèle.

Авторы: ***Безгин Святослав Владимирович*** – аспирант кафедры «Прикладная математика и информатика»; ***Иванов Александр Александрович*** – аспирант кафедры «Прикладная математика и информатика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: ***Погонин Василий Александрович*** – доктор технических наук, профессор кафедры «Информационные процессы и управление», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».