

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА ОТ ДВУХ НАГРЕВАТЕЛЕЙ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ ТЕЛЕ

Н.П. Жуков, Н.Ф. Майникова, И.В. Рогов, О.Н. Попов

Кафедра «Гидравлика и теплотехника», ФГБОУ ВПО «ТГТУ»;
teplotehnika@nnn.tstu.ru

Представлена членом редколлегии профессором С.В. Мищенко

Ключевые слова и фразы: математическое моделирование; неразрушающий контроль; тепловое воздействие; теплофизические свойства.

Аннотация: Представлена математическая модель процесса теплопроводности от двух линейных нагревателей в полуограниченном теле. Сформулирована краевая задача теплопроводности в размерном и безразмерном представлениях. Получены распределения значений температуры по длине полуограниченного тела.

Обозначения и аббревиатуры:

a – температуропроводность, м ² /с;	λ – теплопроводность, Вт/(м·К);
Fo – время в безразмерном представлении;	τ – время, с;
h – половина ширины полосы, м;	$\Theta(\bar{x}, 0, Fo)$ – температура в безразмерном представлении;
q – плотность теплового потока, Вт/м ² ;	γ – число Эйлера;
$T(x, z, \tau)$ – температура точки поверхности полуограниченного тела, °С;	НК – неразрушающий контроль;
x, z – координаты, м;	ПМ – полимерный материал;
\bar{x}, \bar{z} – безразмерные координаты;	ТФС – теплофизические свойства.

Сложность и большой объем экспериментальных исследований по определению качества, долговечности и надежности изделий как из традиционных, так и вновь синтезируемых материалов, требуют создания новых эффективных методов и средств НК. Среди них особое место занимают тепловые методы неразрушающего контроля и диагностики, позволяющие определять ТФС таких материалов, а также температурные характеристики структурных переходов в полимерах по аномалиям ТФС [1].

Реализация контактного метода НК ТФС усложнена тем, что тепловое воздействие и получение измерительной информации в ходе эксперимента возможно осуществлять только на ограниченном участке поверхности исследуемого объекта. Поэтому наиболее важной и сложной задачей при создании теплового метода НК является разработка математической модели, адекватно описывающей реальный процесс теплопереноса в объекте исследования.

Информация о структурных переходах (фазовых, релаксационных) в ПМ необходима для назначения технологических режимов их переработки и определения условий эксплуатации изделий. Традиционно применяемые средства термического анализа температурных характеристик структурных переходов в полимерах, как правило, требуют изготовления специальных образцов, длительного времени испытания, дорогостоящего стационарного оборудования.

Известен контактный зондовый метод [1] НК структурных переходов в ПМ по изменениям их ТФС с ростом температуры. Теплофизические свойства определяют по рабочим участкам термограмм, полученным при тепловом воздействии на объект исследования от круглого источника тепла постоянной мощности в виде диска, встроенного в подложку измерительного зонда. По моделям плоского и сферического полупространств рассчитывают ТФС, а значение температуры перехода определяют по аномалиям ТФС на температурных зависимостях с помощью статистических критериев. Однако измерительную информацию по модели плоского полупространства получают с помощью лишь одного термодатчика, что отрицательно сказывается на точности. По модели сферического полупространства измерительную информацию получают с помощью нескольких термодатчиков. Регистрируют температурный градиент на поверхности исследуемого изделия. Есть существенные ограничения по времени и температуре, так как в методе, описанном в монографии [1], реализуется квазистационарная стадия.

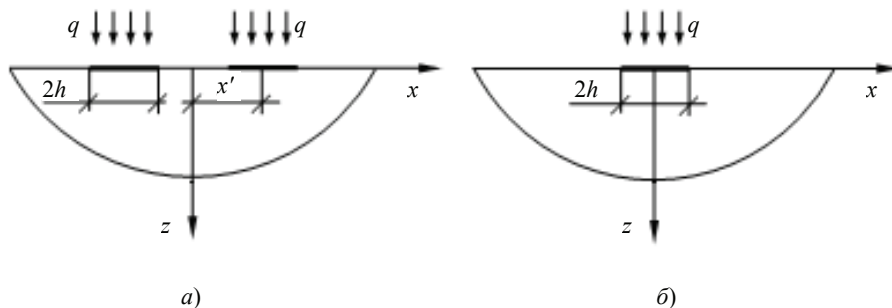
Известно, что при распространении тепла от линейного источника постоянной мощности в цилиндрическом полупространстве нет ограничений по времени нагрева, квазистационарная стадия не реализуется, скорость нагрева, при прочих равных условиях, выше. Так как эффективность метода НК структурных переходов в ПМ зависит от скорости движения границы структурного перехода, а температурный градиент при реализации метода с распространением тепла в цилиндрическом полупространстве меньше, то применение линейного нагревателя постоянной мощности – перспективно.

Данная работа посвящена теоретическому обоснованию процесса теплопроводности от двух линейных нагревателей в полуограниченном теле.

Тепловая схема, в которой применены два нагревателя (рисунок, а), имеет ряд преимуществ по сравнению с тепловой схемой с одним нагревателем (рисунок, б). В методе, использующем схему с двумя нагревателями, во-первых, существенно снимаются ограничения на толщину исследуемого образца; во-вторых, возможно увеличение сигнала на термодатчике, располагающемся между нагревателями без значительного увеличения напряжения на нагревателях.

Известное решение задачи теплопроводности при распространении тепла от одного линейного источника постоянной мощности имеет вид [2]:

$$T(x, 0, \tau) = \frac{qa^{0,5}\tau^{0,5}}{\pi^{0,5}\lambda} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{h+x}{2a^{0,5}\pi^{0,5}} \right] + \operatorname{erf} \left[\frac{h-x}{2a^{0,5}\pi^{0,5}} \right] - \frac{h+x}{2\pi^{0,5}a^{0,5}\tau^{0,5}} \operatorname{Ei} \left[-\frac{(h+x)^2}{4a\tau} \right] - \frac{h-x}{2\pi^{0,5}a^{0,5}\tau^{0,5}} \operatorname{Ei} \left[-\frac{(h-x)^2}{4a\tau} \right] \right\}. \quad (1)$$



Тепловые схемы метода при воздействии двух линейных нагревателей (а) и одного линейного нагревателя (б) в полуограниченном теле

Введем следующие обозначения:

$$\text{Fo} = \frac{a\tau}{h^2}; \quad \bar{x} = \frac{x}{h}; \quad \Theta(\bar{x}, \bar{z}, \text{Fo}) = \frac{T(x, z, \tau) \lambda}{qh}; \quad \bar{z} = \frac{z}{h}; \quad \bar{x}' = \frac{x'}{h}. \quad (2) - (6)$$

Здесь \bar{x}' – смещение нагревателя относительно центра системы в безразмерном представлении.

Решение в безразмерном виде [3]

$$\Theta(\bar{x}, 0, \text{Fo}) = \frac{\text{Fo}^{0,5}}{\pi^{0,5}} \left\{ \text{erf} \left[\frac{1 + \bar{x}}{2\text{Fo}^{0,5}} \right] + \text{erf} \left[\frac{1 - \bar{x}}{2\text{Fo}^{0,5}} \right] - \frac{1 + \bar{x}}{2(\pi \text{Fo})^{0,5}} \text{Ei} \left[-\frac{(1 + \bar{x})^2}{4\text{Fo}} \right] - \frac{1 - \bar{x}}{2(\pi \text{Fo})^{0,5}} \text{Ei} \left[-\frac{(1 - \bar{x})^2}{4\text{Fo}} \right] \right\}. \quad (7)$$

Распределение тепла в полуограниченном теле от действия двух линейных нагревателей может быть записано в виде прямой задачи теплопроводности:

$$\frac{\partial T(x, z, \tau)}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T(x, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, z, \tau)}{\partial z^2} \right), \quad \tau > 0, \quad 0 < x < \infty, \quad z > 0; \quad (8)$$

$$T(x, z, 0) = 0; \quad (9)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(x, z, \tau)}{\partial x} = \begin{cases} 0, & 0 < x < h \\ q, & x = h \\ 0, & h < x < \infty \end{cases}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial T(0, z, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (11)$$

$$T(x, z, \tau) = 0, \quad x^2 + z^2 \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Краевая задача (8) – (12) в безразмерном виде с учетом выражений (2) – (6):

$$\frac{\partial \Theta(\bar{x}, \bar{z}, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(\bar{x}, \bar{z}, \text{Fo})}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \Theta(\bar{x}, \bar{z}, \text{Fo})}{\partial \bar{z}^2}, \quad \text{Fo} > 0, \quad 0 < \bar{x} < \infty, \quad \bar{z} > 0; \quad (13)$$

$$\Theta(\bar{x}, \bar{z}, 0) = 0; \quad (14)$$

$$-\frac{\partial \Theta(\bar{x}, \bar{z}, \text{Fo})}{\partial \bar{z}} = \begin{cases} 0, & 0 < \bar{x} < 1 \\ 1, & \bar{x} = 1 \\ 0, & 1 < \bar{x} < \infty \end{cases}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, \bar{z}, \text{Fo})}{\partial \bar{x}} = 0; \quad (16)$$

$$\Theta(\bar{x}, \bar{z}, \text{Fo}) = 0, \quad \bar{x}^2 + \bar{z}^2 \rightarrow \infty. \quad (17)$$

По принципу суперпозиции решение краевой задачи (13) – (17)

$$\Theta(\bar{x}, \bar{z}, \text{Fo}) = \Theta^-(\bar{x} - \bar{x}', \bar{z}, \text{Fo}) + \Theta^+(\bar{x} + \bar{x}', \bar{z}, \text{Fo}), \quad (18)$$

где $\Theta^-(\bar{x} - \bar{x}', \bar{z}, Fo)$ и $\Theta^+(\bar{x} + \bar{x}', \bar{z}, Fo)$ – значения безразмерной температуры в точках поверхности, расположенных относительно начала координат слева (–) и справа (+) соответственно.

Выражения для определения $\Theta^-(\bar{x} - \bar{x}', \bar{z}, Fo)$ и $\Theta^+(\bar{x} + \bar{x}', \bar{z}, Fo)$ получены из решения (7):

$$\Theta^-(\bar{x} - \bar{x}', 0, Fo) = \frac{Fo^{0,5}}{\pi^{0,5}} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{1 + (\bar{x} - \bar{x}')}{2Fo^{0,5}} \right] + \operatorname{erf} \left[\frac{1 - (\bar{x} - \bar{x}')}{2Fo^{0,5}} \right] - \frac{1 + (\bar{x} - \bar{x}')}{2(\pi Fo)^{0,5}} \operatorname{Ei} \left[-\frac{(1 + (\bar{x} - \bar{x}')^2)}{4Fo} \right] - \frac{1 - (\bar{x} - \bar{x}')}{2(\pi Fo)^{0,5}} \operatorname{Ei} \left[-\frac{(1 - (\bar{x} - \bar{x}')^2)}{4Fo} \right] \right\}, \quad (19)$$

$$\Theta^+(\bar{x} + \bar{x}', 0, Fo) = \frac{Fo^{0,5}}{\pi^{0,5}} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{1 + (\bar{x} + \bar{x}')}{2Fo^{0,5}} \right] + \operatorname{erf} \left[\frac{1 - (\bar{x} + \bar{x}')}{2Fo^{0,5}} \right] - \frac{1 + (\bar{x} + \bar{x}')}{2(\pi Fo)^{0,5}} \operatorname{Ei} \left[-\frac{(1 + (\bar{x} + \bar{x}')^2)}{4Fo} \right] - \frac{1 - (\bar{x} + \bar{x}')}{2(\pi Fo)^{0,5}} \operatorname{Ei} \left[-\frac{(1 - (\bar{x} + \bar{x}')^2)}{4Fo} \right] \right\}. \quad (20)$$

Подставив выражения (19), (20) в (18), получим решение краевой задачи (13) – (17):

$$\Theta(\bar{x}, 0, Fo) = \frac{Fo^{0,5}}{\pi^{0,5}} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{1 + (\bar{x} - \bar{x}')}{2Fo^{0,5}} \right] - \frac{1 + (\bar{x} - \bar{x}')}{2(\pi Fo)^{0,5}} \operatorname{Ei} \left[-\frac{(1 + (\bar{x} - \bar{x}')^2)}{4Fo} \right] + \operatorname{erf} \left[\frac{1 - (\bar{x} - \bar{x}')}{2Fo^{0,5}} \right] - \frac{1 - (\bar{x} - \bar{x}')}{2(\pi Fo)^{0,5}} \operatorname{Ei} \left[-\frac{(1 - (\bar{x} - \bar{x}')^2)}{4Fo} \right] + \operatorname{erf} \left[\frac{1 + (\bar{x} + \bar{x}')}{2Fo^{0,5}} \right] - \frac{1 + (\bar{x} + \bar{x}')}{2(\pi Fo)^{0,5}} \operatorname{Ei} \left[-\frac{(1 + (\bar{x} + \bar{x}')^2)}{4Fo} \right] + \operatorname{erf} \left[\frac{1 - (\bar{x} + \bar{x}')}{2Fo^{0,5}} \right] - \frac{1 - (\bar{x} + \bar{x}')}{2(\pi Fo)^{0,5}} \operatorname{Ei} \left[-\frac{(1 - (\bar{x} + \bar{x}')^2)}{4Fo} \right] \right\}. \quad (21)$$

Подставив выражения (2) – (6) в (21), получим:

$$T(x, 0, \tau) = \frac{qa^{0,5}\tau^{0,5}}{\pi^{0,5}\lambda} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{h + (x - x')}{2a^{0,5}\tau^{0,5}} \right] - \frac{h + (x - x')}{2\pi^{0,5}a^{0,5}\tau^{0,5}} \operatorname{Ei} \left[-\frac{(h + (x - x'))^2}{4a\tau} \right] + \operatorname{erf} \left[\frac{h - (x - x')}{2a^{0,5}\tau^{0,5}} \right] - \frac{h - (x - x')}{2\pi^{0,5}a^{0,5}\tau^{0,5}} \operatorname{Ei} \left[-\frac{(h - (x - x'))^2}{4a\tau} \right] + \operatorname{erf} \left[\frac{h + (x + x')}{2a^{0,5}\tau^{0,5}} \right] - \frac{h + (x + x')}{2\pi^{0,5}a^{0,5}\tau^{0,5}} \operatorname{Ei} \left[-\frac{(h + (x + x'))^2}{4a\tau} \right] + \operatorname{erf} \left[\frac{h - (x + x')}{2a^{0,5}\tau^{0,5}} \right] - \frac{h - (x + x')}{2\pi^{0,5}a^{0,5}\tau^{0,5}} \operatorname{Ei} \left[-\frac{(h - (x + x'))^2}{4a\tau} \right] \right\}. \quad (22)$$

Значение для температуры поверхности $z = 0$ в точке с координатой x от действия двух нагревателей для больших значений τ

$$T(x, 0, \tau) = \frac{\bar{q}_0 h}{\pi \lambda} \left\{ 2 \ln \left(\frac{a \tau}{h^2} \right) - \frac{h + (x - x')}{2h} \ln \left(\frac{h + (x - x')}{h} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{h + (x + x')}{2h} \ln \left(\frac{h + (x + x')}{h} \right)^2 - \frac{h - (x - x')}{2h} \ln \left(\frac{-h + (x - x')}{h} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{h + (-x - x')}{2h} \ln \left(\frac{h - (x + x')}{h} \right)^2 + 4 - 2\gamma + 4 \ln(2) \right\}. \quad (23)$$

Безразмерная температура в любой точке поверхности от действия двух нагревателей для больших значений Fo

$$\Theta(\bar{x}, 0, Fo) = \frac{1}{\pi} \left\{ 4 - 2\gamma + 4 \ln(2) + 2 \ln(Fo) - \frac{(1 + (\bar{x} - \bar{x}'))}{2} \ln(1 + (\bar{x} - \bar{x}'))^2 - \right. \\ \left. - \frac{(1 + (\bar{x} + \bar{x}'))}{2} \ln(1 + (\bar{x} + \bar{x}'))^2 - \frac{(1 - (\bar{x} - \bar{x}'))}{2} \ln(-1 + (\bar{x} - \bar{x}'))^2 - \right. \\ \left. - \frac{(1 - (\bar{x} + \bar{x}'))}{2} \ln(-1 + (\bar{x} + \bar{x}'))^2 \right\}. \quad (24)$$

Найденные решения (21) – (24) могут быть использованы для нахождения ТФС материалов исследуемых объектов, а также для решения задач оптимизации измерительного устройства при реализации метода неразрушающего определения ТФС.

Список литературы

1. Жуков, Н.П. Многомодельные методы и средства неразрушающего контроля теплофизических свойств твердых материалов и изделий : монография / Н.П. Жуков, Н.Ф. Майникова. – М. : Машиностроение-1, 2004. – 288 с.
2. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел : пер. с англ. / Г. Карслоу, Д. Егер ; под ред. А.А. Померанцева. – М. : Наука, 1964. – 487 с.
3. Теоретическое обоснование метода неразрушающего контроля теплофизических свойств материалов / Н.П. Жуков [и др.] // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2010. – Т. 16, № 2. – С. 296–302.

Mathematical Modeling of Heat Transfer from Two Heaters in a Semibounded Body

N.P. Zhukov, N.F. Maynikova, I.V. Rogov, O.N. Popov

Department "Hydraulics and Heat Engineering", TSTU;
teplotehnika@nnt.tstu.ru

Key words and phrases: nondestructive testing; mathematical modeling; thermal effects; thermal properties.

Abstract: The paper presents the mathematical model of heat conduction from the two linear heaters in the semibounded body. The boundary value problem of heat conduction in the dimensional and non-dimensional forms has been formulated. The distributions of temperature along the length of a semibounded body have been produced.

Mathematische Modellierung der Wärmeübertragung von den zwei Erhitzer im halbbegrenzten Körper

Zusammenfassung: Es ist das mathematische Modell des Prozesses der Wärmeleitung von den zwei linearen Erhitzer im halbbegrenzten Körper vorgelegt. Es ist die Endaufgabe der Wärmeleitung in den dimensional und undimensionalen Vorstellungen formuliert. Es sind die Verteilungen der Temperaturwerte nach der Länge des halbbegrenzten Körpers erhalten.

Modélage mathématique du transfert de la chaleur à partir de deux réchauffeurs dans un corps semi-limité

Résumé: Est présenté le modèle mathématique du processus du transfert de la chaleur à partir de deux réchauffeurs dans un corps semi-limité. Est formulé le problème de limite de la conductibilité de chaleur dans les représentations dimensionnelle et non-dimensionnelle. Sont obtenues les répartitions des valeurs de la température par la longueur du corps semi-limité.

Авторы: *Жуков Николай Павлович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Гидравлика и теплотехника», проректор по социально-воспитательной работе; *Майникова Нина Филипповна* – доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой «Гидравлика и теплотехника»; *Рогов Иван Владимирович* – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры «Гидравлика и теплотехника»; *Попов Олег Николаевич* – аспирант кафедры «Гидравлика и теплотехника», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: *Пономарев Сергей Васильевич* – доктор технических наук, профессор, исполняющий обязанности заведующего кафедрой «Управление качеством и сертификация», ФГБОУ ВПО «ТГТУ».
