УДК 519.853.32

РЕШЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ДЕТЕРМИНИЗАЦИИ

В.И. Левин[1], Е.А. Немкова[2]

Кафедры: «Научные технологии» (1); «Математика» (2), ФГБОУ ВПО «Пензенская государственная технологическая академия», г. Пенза; levin@pgta.ru

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: детерминизация; интервальная задача выпуклого программирования; квадратичное программирование.

Аннотация: Рассмотрена интервальная задача выпуклого программирования. Показаны способы решения задачи методом сведения к двум детерминированным задачам: верхней и нижней граничным задачам. Подход основан на сравнении интервалов.

В математическом моделировании интервальные методы и модели применяются для анализа неопределенности, возникающей при использовании данных с ошибками, при отсутствии знаний о вероятностных свойствах объекта, при возникновении ошибок округления в расчетах с конечной точностью [1]. Результатом применения интервальных моделей является оценка решения или область возможных решений. Математический аппарат интервальных вычислений позволяет формулировать интервальные уравнения, интервальные оптимизационные задачи и анализировать интервальные функции [2, 3]. В последние годы интервальные методы моделирования начинают использоваться в микроэкономическом анализе, можно также отметить теорию интервальных предпочтений и интервальные вероятностные модели [4].

Основной вопрос, возникающий в отношении интервальных оптимизационных задач, касается определения решения, в частности понятия экстремума интервально-значной функции и выполнения интервального неравенства. Наиболее часто в ситуациях параметрической неопределенности для функции цели используют так называемые критериальные определения, отвечающие условию полной гарантии (максиминное решение), «критерию игрока» (максимакс), среднему решению [1]. Применительно к интервальным неравенствам известны прямое теоретико-множественное сравнение интервалов, а также «сильное», «слабое» и «центральное» определения [5]. Всевозможные сочетания данных определений позволяют перейти от интервальной постановки оптимизационных задач к решению различных детерминированных линейных и нелинейных задач оптимизации.

Функции ограничений выбираются исследователем исходя из априорных предположений относительно возможных реализаций параметров из соответствующих интервалов. Так как интервальность предполагает отсутствие достоверной информации о принятии параметрами конкретных значений внутри выбранных интервалов, для получения решения (или набора решений) оптимизируемой задачи исследователь должен точно перечислить свои ожидания. При этом формирование ожиданий может носить как субъективный, так и объективный характер. Рассматривается решение интервальной недетерминированной задачи выпуклого программирования сведением к двум детерминированным задачам: верхней и нижней граничным задачам. Подход основан на аксиоматическом теоретико-множественном сравнении интервалов, сводящим проблему к сравнению их одноименных границ и вытекающем из него методе детерминизации решения интервальных оптимизационных задач [3].

Задача математического программирования

$$\max(\min) z = f(x); \tag{1}$$

$$\varphi_i(x)(\le, =\ge) b_i, \; i = \overline{1, m}; \quad x \ge 0, \; x = \{x_1, ..., x_n\}, \tag{2}$$

в которой либо целевая функция (1), либо ограничения (2), либо и то и другое нелинейны, называется нелинейной [6]. Если же целевая функция и ограничения линейны, задача (1), (2) называется линейной.

У произвольной задачи нелинейного программирования некоторые или все приведенные выше свойства линейного программирования отсутствуют. Вследствие этого задачи нелинейного программирования несравненно сложнее задач линейного программирования и для них не существует общего универсального метода решения.

Нелинейные задачи составляют широкий класс сложных задач, для отдельных специальных подклассов которых разработаны свои способы решения. Прежде всего, это задачи с выпуклыми (вогнутыми) функциями $f(x)$ и $\varphi_i(x)$. В теории выпуклого программирования в качестве основной обычно рассматривается задача минимизации выпуклой функции n переменных $z = f(x)$ при ограничениях $\varphi_i(x) \le 0$, $i = \overline{1, m}$, $x \ge 0$, где функции $\varphi_i(x)$ предполагаются выпуклыми. Если функции $f(x)$ и $\varphi_i(x)$ являются вогнутыми функциями, то имеем задачу максимизации $f(x)$ при ограничениях $\varphi_i(x) \ge 0$, $i = \overline{1, m}$, $x \ge 0$.

Классическим методом решения задач нелинейного математического программирования (в частности выпуклого) является метод множителей Лагранжа. Он дает математический аппарат для обоснования различных численных методов решения, широко применяемых на практике. Рассмотрим классическую задачу оптимизации

$$\max(\min) z = f(x); \tag{3}$$

$$\varphi_i(x) = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad x = \{x_1, ..., x_n\}. \tag{4}$$

Эта задача выделяется из задачи (1), (2) тем, что среди ограничений нет неравенств и условий неотрицательности переменных, а функции $f(x)$ и $\varphi_i(x)$ непрерывны и имеют частные производные, по крайней мере, первого и второго порядков.

Классический подход к решению задачи (3), (4) позволяет использовать систему уравнений (необходимые условия), которым должна удовлетворять точка x^*, в которой функция $f(x)$ имеет локальный экстремум и которая на множестве точек, удовлетворяющих условиям (4), будет одновременно и точкой глобального экстремума.

Предположим, что в точке x^* функция (3) имеет локальный условный экстремум, и ранг матрицы $\left(\partial \varphi_i / \partial x_j\right)_{m \times n}$ равен m. Тогда необходимые условия оптимальности $f(x)$ запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1,n} \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda} = b_i - \varphi_i, i = \overline{1,m} \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где

$$L(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m) = f(x_1,...,x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - \varphi_i(x_1,...,x_n)\right) \tag{6}$$

есть функция Лагранжа; $\lambda_1,...,\lambda_m$ – множители Лагранжа.

Существуют также и достаточные условия, при выполнении которых решение системы уравнений (5) определяет точку экстремума функции $f(x)$. Этот вопрос решается на основании исследования знака дифференциала второго порядка функции Лагранжа. Порядок решения задачи (3), (4) методом Лагранжа следующий.

1. Составить функцию Лагранжа (6).
2. Найти частные производные функции Лагранжа по всем переменным $x_1,...,x_n, \lambda_1,...,\lambda_m$ и приравнять их нулю. Тем самым будет получена система (5), состоящая из $n+m$ уравнений. Решить полученную систему (если это возможно) и найти таким образом все стационарные точки функции Лагранжа.
3. Из стационарных точек, взятых без координат $\lambda_1,...,\lambda_m$, выбрать точки, в которых функция $f(x)$ имеет условные локальные экстремумы при наличии ограничений (4). Этот перебор осуществляется, например, с применением достаточных условий локального экстремума. Часто исследование упрощается, если использовать конкретные условия задачи.

В теории нелинейного программирования центральное место занимает теорема Куна–Таккера, обобщающая классический метод множителей Лагранжа на случай, когда в нелинейной задаче, помимо ограничений-равенств, содержатся также ограничения-неравенства [6]. В частности, для задачи выпуклого программирования: минимизировать функцию $z = f(x)$ при ограничениях $\varphi_i(x) \le 0$, $i = \overline{1,m}$, $x \ge 0$, где все функции $f(x)$ и $\varphi_i(x)$ выпуклые. Теорема Куна–Таккера устанавливает связь между оптимальным решением задачи и седловой точкой функции Лагранжа для этой задачи

$$L(x,\overline{\lambda}) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x). \tag{7}$$

Точка $\left(x^*, \overline{\lambda^*}\right)$ называется седловой точкой функции (7), если n-мерная точка x^* является точкой минимума функции $L\left(x^*, \overline{\lambda^*}\right)$, а m-мерная точка $\overline{\lambda^*}$ – точкой максимума функции $L\left(x^*,\overline{\lambda^*}\right)$, так что для всех x и $\overline{\lambda}$ выполняется неравенство

$$L\left(x^*,\overline{\lambda^*}\right) \le L\left(x^*,\overline{\lambda^*}\right) \le \left(x^*,\overline{\lambda^*}\right). \tag{8}$$

В этом заключается смысл теоремы Куна–Таккера. Сама же теорема формулируется следующим образом.

Теорема Куна–Таккера. Предположим, что существует вектор $x \ge 0$, такой что $\varphi_i(x) < 0$, $i = \overline{1,m}$. Тогда необходимым и достаточным условием оптимальности вектора x^*, принадлежащего допустимой области, является существование такого вектора $\overline{\lambda^*}$, что для всех $x \ge 0$ и $\overline{\lambda} \ge 0$ имеет место неравенство (8). Певоначально эта теорема была доказана только для дифференцируемых функций $f(x)$ и $\varphi_i(x)$. Обобщение на случай произвольных выпуклых функций принадлежит Слейтеру.

Если функции $f(x)$ и $\varphi_i(x)$ являются дифференцируемыми, то неравенства (8), где $x^* \ge 0$ и $\overline{\lambda^*} \ge 0$, эквивалентны следующим «локальным» условиям Куна–Таккера:

$$\frac{\partial L\left(x^*,\overline{\lambda^*}\right)}{\partial x} \ge 0; \tag{9}$$

$$x^* \frac{\partial L(x^*,\overline{\lambda^*})}{\partial x} = 0; \tag{10}$$

$$x^* \ge 0; \tag{11}$$

$$\frac{\partial L\left(x^*,\overline{\lambda^*}\right)}{\partial \overline{\lambda}} \le 0; \tag{12}$$

$$\overline{\lambda^*} \frac{\partial L\left(x^*,\overline{\lambda^*}\right)}{\partial x} = 0; \tag{13}$$

$$\lambda^* \ge 0. \tag{14}$$

Одним из частных видов задачи нелинейного выпуклого программирования, распространенных на практике, является задача, в которой целевая функция содержит квадратичные слагаемые, а ограничения носят линейный характер. В этом случае задача относится к так называемому квадратичному программированию. В качестве основной в квадратичном программировании рассматривается задача минимизации квадратичной функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j; \tag{15}$$

при линейных ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \, , \; i = \overline{1,m} \, ; \tag{16}$$

$$x_j \ge 0 \, , \; j = \overline{1,n} \, . \tag{17}$$

Матрица $D = (d_{ij})_{n \times n}$ квадратичной формы $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j$ предполагается симметрической и неотрицательно определенной. В этом случае функция (15) будет выпуклой. Если в задаче квадратичного программирования целевая функция не минимизируется, а максимизируется, или если в некоторых ограничениях вместо знака $\le$ стоит знак $\ge$, то такие задачи можно привести к основной форме (15) – (17).

С геометрической точки зрения задача (15) – (17) сводится к определению точки выпуклого многогранника допустимых решений, через которую проходит линия уровня поверхности $f(x)$, имеющая наименьшее значение функции $f(x)$. Если в разрешимой задаче линейного программирования оптимальное значение находилось в вершине многогранника, то целевая функция квадратичной задачи (15) – (17) свой конечный минимум, даже если он единственный, может принимать как на границе, так и внутри многогранника решений.

Переходя к решению задачи (15) – (17), составим локальные условия Куна–Таккера (9) – (14), являющиеся необходимыми и достаточными условиями оптимальности решения x^*. Функция Лагранжа в данном случае имеет вид

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum^{n} d_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) . \tag{18}$$

Найдем частные производные функции

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = c_j + 2 \sum_{k=1}^{n} d_{kj} x_k + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \, , \; j = \overline{1,n} \, ; \tag{19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \, , \; i = \overline{1,m} \, . \tag{20}$$

Обозначим в равенствах (19) и (20)

$$c_j + 2 \sum_{k=1}^{n} d_{kj} x_k + + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = v_j \, , \; j = \overline{1,n} \, ; \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i = -y_i \, , \; i = \overline{1,m} \, . \tag{22}$$

С учетом этих обозначений условия (9) – (14), записанные в координатной форме, примут следующий вид:

$$\left. \begin{array}{l} c_j + 2 \sum_{k=1}^{n} d_{kj} x_k + + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = v_j \ge 0 \\ x_j v_j = 0, x_j \ge 0, j = \overline{1,n} \end{array} \right\} , \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i = -y_i \le 0\\&\lambda_i(-y_i) = 0, \lambda_i \ge 0, i=\overline{1,m}\end{aligned}\right\}. \tag{24}$$

Объединяя соотношения (23) и (24), окончательно получаем

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i,\ i=\overline{1,m}\ ; \tag{25}$$

$$2\sum_{k=1}^{n} d_{kj}x_k - v_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = -c_j,\ \ j=\overline{1,n}\ ; \tag{26}$$

$$x_j \ge 0,\ v_j \ge 0,\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n};\ \ \lambda_i \ge 0,\ -y_i \ge 0,\ \lambda_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}\ ; \tag{27}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j v_j + \sum_{i=1}^{m} y_i \lambda_i = 0\,. \tag{28}$$

Равенства (25) и (26) образуют систему $N = n + m$ линейных уравнений с $N = n + m$ неизвестными $x_1,...,x_n, v_1,...,v_n, y_1,..., y_m, \lambda_1,...,\lambda_m$. Итак, в соответствии с локальными условиями Куна–Таккера решение $x^* = (x_1^*,...,x_n^*)$ является оптимальным для задачи (15) – (17) тогда и только тогда, когда совместно с решением $v = (v_1,...,v_n)$ существуют решения $\overline{\lambda} = (\lambda_1,...,\lambda_m)$, $y = (y_1,..., y_m)$, такие что $z = (x_1,..., x_n, v_1,...,v_n, y_1,..., y_m, \lambda_1,...,\lambda_m)$ является решением системы (25) – (27) при условии выполнения равенства (28).

Таким образом, применение теоремы Куна–Таккера для решения задачи квадратичного программирования позволяет нелинейную задачу сводить к решению системы линейных алгебраических уравнений при соблюдении, правда, дополнительного комбинаторного условия (28). Это условие требует, чтобы из каждых двух ограниченных по знаку переменных x_j и v_j (соответственно y_i и λ_i), хотя бы одна равнялась нулю. Иначе говоря, не все решения $z = (x_1,..., x_n, v_1,...,v_n, y_1,..., y_m, \lambda_1,...,\lambda_m)$ системы (25) – (27) удовлетворяют условию (28), а только те, в которых, по крайней мере, $(n+m)$-компонент равны нулю, то есть столько, сколько уравнений в системе. Но таким свойством обладают базисные решения системы. Значит, искать решение, которое удовлетворяло бы условию (28), имеет смысл среди базисных решений. А для этого можно использовать симплекс-метод.

Рассмотрим теперь интервальную задачу квадратичного выпуклого программирования. Она отличается от изложенной выше детерминированной задачи квадратичного программирования (15) – (17) тем, что параметры c_j, d_{ij} целевой функции (15) и параметры a_{ij}, b_i функций ограничений (16) имеют вид замкнутых интервалов $\tilde{c}_j = [c_{j\text{н}}, c_{j\text{в}}]$, $\tilde{d}_{ij} = [d_{ij\text{н}}, d_{ij\text{в}}]$, $\tilde{a}_{ij} = [a_{ij\text{н}}, a_{ij\text{в}}]$, $\tilde{b}_i = [b_{i\text{н}}, b_{i\text{в}}]$, в которых заключены возможные значения их величин. Вследствие этого значения самих функций при любом аргументе также имеют вид замкнутых интервалов возможных значений. Тогда недетерминированная (интервальная) задача квадратичного нелинейного (выпуклого) программирования может быть сформулирована так: найти минимум нелинейной интервальной функции

$$\widetilde{f}(x)=\sum_{j=1}^{n}\widetilde{c}_j x_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{d}_{ij}x_i x_j \tag{29}$$

при наличии линейных ограничений

$$\sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_{ij}x_j\le\widetilde{b}_i \quad i=\overline{1,m} \tag{30}$$

и при дополнительном условии неотрицательности неизвестных

$$x_j\ge 0\,,\ j=\overline{1,n}\,. \tag{31}$$

Можно показать, что в наших условиях целевая функция f является интервальной функцией вида

$$\widetilde{f}(x)=[f_{\text{н}}(x),f_{\text{в}}(x)]\,, \tag{32}$$

с детерминированными нижними $f_{\text{н}}(x)$ и верхними $f_{\text{в}}(x)$ граничными функциями вида

$$f_{\text{н}}(x)=\sum_{j=1}^{n}c_{j\text{н}}x_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_{ij\text{н}}x_i x_j,\quad f_{\text{в}}(x)=\sum_{j=1}^{n}c_{j\text{в}}x_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_{ij\text{в}}x_i x_j\,. \tag{33}$$

Для недетерминированной (интервальной) квадратичной задачи нелинейного программирования (29) – (31) определим две детерминированные квадратичные задачи нелинейного программирования: нижнюю граничную задачу – найти минимум нелинейной функции

$$f_{\text{н}}(x)=\min \tag{34}$$

при наличии линейных ограничений

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij\text{н}}x_j\le b_{i\text{н}} \tag{35}$$

и дополнительном условии неотрицательности неизвестных (31); и верхнюю граничную задачу – найти минимум нелинейной функции

$$f_{\text{в}}(x)=\min \tag{36}$$

при наличии линейных ограничений

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij\text{в}}x_j\le b_{i\text{в}} \tag{37}$$

и дополнительном условии неотрицательности неизвестных (31).

Таким образом, целевой функцией нижней (верхней) граничной задачи является нижняя (верхняя) граничная функция целевой функции (32) исходной интервальной задачи (29) – (31), а ее система ограничений получается из исходной задачи заменой интервальных функций ограничений их нижними (верхними) граничными функциями.

Из общего условия существования решения интервальной задачи нелинейного программирования [3] вытекает следующая **теорема 1**: Для того чтобы недетерминированная (интервальная) квадратичная задача нелинейного программирования (29) – (31) имела решение x^*, необходимо и достаточно, чтобы это же решение имели ее нижняя и верхняя граничные задачи.

Таким образом, решение интервальной квадратичной задачи нелинейного программирования сводится к решению двух детерминированных задач нелинейного программирования: нижней граничной и верхней граничной. При этом алгоритм решения интервальной квадратичной задачи нелинейного программирования (29) – (31) таков.

1. Отыскание множества решений $M_{\text{н}}$ нижней граничной задачи имеющейся интервальной задачи нелинейного программирования. Для этого можно использовать любые методы решения детерминированной задачи нелинейного программирования (теорема Куна–Таккера, численные методы, метод Монте-Карло и т.д.), с учетом специфики целевой функции и функции ограничений задачи (29) – (31).

2. Отыскание множества решений $M_{\text{в}}$ верхней граничной задачи имеющейся интервальной задачи нелинейного программирования с использованием тех же методов, что и на шаге 1.

3. Нахождение пересечения M множеств $M_{\text{в}}$ и $M_{\text{н}}$. Если $M \neq \varnothing$, то любой вектор x^* из M есть решение заданной интервальной задачи нелинейного программирования. Если же $M = \varnothing$, то задача не имеет решения.

Две детерминированные задачи нелинейного программирования одинаковой размерности n называются согласованными, если они имеют хотя бы одно общее решение (которое называется согласованным) [3]. В новых терминах теорему 1 можно сформулировать так. **Теорема 1′** [3]: для того чтобы (интервальная) квадратичная задача нелинейного программирования (29) – (31) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ее нижняя и верхняя граничные задачи были согласованы.

Список литературы

1. Вощинин, А.П. Оптимизация в условиях неопределенности / А.П. Вощинин, Г.Р. Сотиров. – М. : Изд-во Моск. энергет. ин-та, 1989. – 224 с.
2. Алефельд, Г. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М. : Мир, 1986. – 355 с.
3. Левин, В.И. Интервальные методы оптимизации систем в условиях неопределенности / В.И. Левин. – Пенза : Изд-во Пензен. технолог. ин-та, 1999. – 101 с.
4. Фишберн, П. Теория полезности для принятия решений : пер. с англ. / П. Фишберн. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
5. Шарый, С.П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение : дис. … д-ра физ.-мат. наук : 01.01.07 : защищена 25.08.2000 : утв. 12.01.2001 / Шарый Сергей Петрович. – Новосибирск, 2000. – 266 с.
6. Математическое программирование / А.В. Кузнецов [и др.]. – М. : Лань, 2010. – 351 с.

Solving Quadratic Programming Problem by the Determinization Technique

V.I. Levin[1], E.A. Nemkova[2]

Departments: “Scientific Technology” (1), “Mathematics”, Penza State Technological Academy, Penza; levin@pgta.ru

Key words and phrases: determinization; interval convex programming problem; quadratic programming.

Abstract: The paper considers the interval convex programming problem. The ways of solving the problem through the two deterministic problems – upper and lower boundary value problems – are shown. The approach is based on the comparison of the intervals.

Lösung der Intervallaufgabe der quadratischen Programmierung durch die Methode der Determinisation

Zusammenfassung: Es ist die Intervallaufgabe der konvexen Programmierung betrachtet. Es sind die Wege der Lösung der Aufgabe durch die Methode der Reduzierung zu den zwei determinierten Aufgaben: der oberen Grenzaufgabe und der unteren Grenzaufgabe gezeigt. Das Herangehen ist auf dem Vergleich der Intervalle gegründet.

Solution du problème d'intervalle de la programmation quadratique par la méthode de la détermination

Résumé: Est examiné le problème d'intervalle de la programmation convexe. Sont montrés les moyens de la solution du problème par la méthode de la réduction à deux problèmes déterminés: problème supérieur frontière et problème inférieur frontière. L'approche est fondée sur la comparaison des intervalles.

Авторы: ***Левин Виталий Ильич*** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Научные технологии»; ***Немкова Елена Анатольевна*** – доцент кафедры «Математика», ФГБОУ ВПО «Пензенская государственная технологическая академия», г. Пенза.

Рецензент: ***Дворецкий Станислав Иванович*** – доктор технических наук, профессор, проректор по научно-инновационной деятельности, ФГБОУ ВПО «ТГТУ».
