УДК 519.711.3

К ВОПРОСУ ПРИМЕНЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ МАГНИТОСТРИКЦИОННЫХ ПРИБОРОВ УРОВНЯ

Э.В. Карпухин, Е.С. Демин, С.Б. Демин

Кафедра «Электроника и электротехника», ФГБОУ ВПО «Пензенская государственная технологическая академия», г. Пенза; edvar1@rambler.ru

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: магнитное поле; магнитострикционные преобразователи уровня; эффективные численные методы.

Аннотация: Рассмотрены численные методы расчета магнитных полей магнитострикционных преобразователей уровня накладного типа. Показаны способы повышения эффективности этих численных методов.

Современные условия развития промышленности привели к наличию большого разнообразия приборов для измерения и контроля уровня. Требования, предъявляемые к ним, весьма различны и зависят от области применения. Однако главными из них остаются высокая точность и разрешающая способность, возможность работы с агрессивными средами, низкая стоимость и относительная простота конструкции. Всем этим требованиям удовлетворяют магнитострикционные преобразователи уровня (**МПУ**), в частности новый подкласс устройств – МПУ накладного типа на крутильных волнах.

Отличительной особенностью накладных МПУ является применение бесконтактного метода измерения уровня. Передача информации в них происходит посредством взаимодействия через немагнитную стенку резервуара магнитного поля постоянного магнита с магнитным полем магнитострикционного звукопровода с током. В результате этого взаимодействия в среде последнего формируется ультразвуковая волна кручения, которая далее считывается сигнальным электроакустическим преобразователем [1].

Выбор ширины немагнитной стенки резервуара, где устанавливается МПУ, влияет на эффективность его работы, что является важной задачей, решение которой позволяет добиться улучшения характеристик МПУ накладного типа.

С целью улучшения технических и эксплуатационных характеристик МПУ накладного типа возникает задача поиска оптимальной ширины немагнитной стенки резервуара при их использовании, при которой напряженность его магнитного поля подмагничивания будет достаточной для формирования ультразвуковой волны кручения в среде его звукопровода. Для выявления такой зависимости необходимо проведение математического моделирования магнитного поля МПУ накладного типа с использованием эффективных численных методов.

Для решения поставленной задачи предлагается применить численные методы решения системы уравнений Максвелла, описывающей распределение магнитного поля в любой точке пространства. Известно, что электромагнитное поле определяется векторами магнитной индукции $\overline{B}$, напряженностей электрического $\overline{E}$, магнитного $\overline{H}$ полей и электрического смещения $\overline{D}$, связанных между собой системой [2]

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\overline{H} = \overline{j} + \dfrac{\partial \overline{D}}{\partial t}; \\ \mathrm{rot}\overline{E} = -\dfrac{\partial \overline{B}}{\partial t}; \\ \mathrm{div}\overline{D} = \rho; \\ \mathrm{div}\overline{B} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\overline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \overline{E}$ – вектор электрического смещения; $\overline{B} = \mu_0 \mu \overline{H}$ – вектор магнитной индукции; $\overline{j} = \gamma \overline{E}$ – плотность тока проводимости; ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные соответственно; ε, μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно; γ – удельная проводимость вещества; ρ – объемная плотность электрического заряда.

Для рассматриваемого магнитного поля МПУ накладного типа система (1) может быть сведена к следующему уравнению в частных производных [3]:

$$\mathrm{div}(\mu^{-1}\mathrm{grad}\overline{A}) = -\mathrm{rot}\overline{H}, \tag{2}$$

где $\overline{A}$ – векторный магнитный потенциал ($\overline{B} = \mathrm{rot}\overline{A}$); $\rho_{\text{м.ст}} = -\mathrm{div}\mu\overline{H}$ – плотность сторонних источников магнитного поля.

Наиболее эффективным способом решения уравнения (2) является переход к системе разностных уравнений, являющейся его дискретным аналогом, например методом сеток [3, 4]. Для этого необходимо выбрать систему узлов (сетку), заполняющую расчетную область, исходя из следующих условий: получения меньших погрешностей при переходе к разностному уравнению и простого разностного уравнения. На вычислительную погрешность в этом случае будет в наибольшей степени влиять расстояние между узлами (шаг *h*) сетки.

Рассмотрим фрагмент из четырех смежных ячеек сетки (рис. 1) и выберем в центрах каждой из них точки *a*, *b*, *c*, *d*.

Тогда, как было показано в работе [3], разностное уравнение для узла 0 имеет вид

$$A_1 \frac{\nu_4 + \nu_1}{2} + A_2 \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} + A_3 \frac{\nu_2 + \nu_3}{2} + A_4 \frac{\nu_3 + \nu_4}{2} - A_0 \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4}{2} = A_1 k_1 + A_2 k_2 + A_3 k_3 + A_4 k_4 - A_0 (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) = -i_0, \tag{3}$$

где $k_1 = \dfrac{\nu_4 + \nu_1}{2}$; $k_2 = \dfrac{\nu_1 + \nu_2}{2}$; $k_3 = \dfrac{\nu_2 + \nu_3}{2}$; $k_4 = \dfrac{\nu_3 + \nu_4}{2}$; i_0 – ток проводимости узла 0; A_i – векторный магнитный потенциал *i*-го узла.

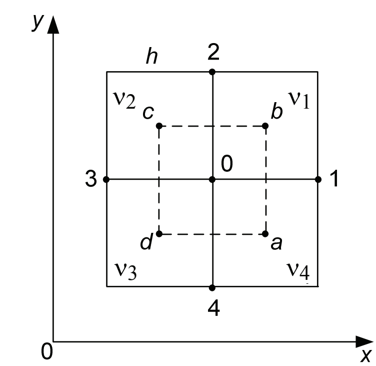

Рис. 1. Контур интегрирования *abcd* для получения разностных уравнений: ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 – коэффициенты, обратные средним значениям магнитной проницаемости каждой ячейки с узлами 0 – 4 расчетной области

Разностные уравнения, аналогичные (3), могут быть записаны для каждого узла сетки расчетной области за исключением граничных, так как значения потенциалов в них определяются граничными условиями. Полученная таким образом система является конечно-разностной аппроксимацией уравнения (2) и может быть представлена в матричной форме

$$Au = P, \tag{4}$$

где $A = \left\| a_{i,j} \right\|$ – матрица коэффициентов системы; u – матрица неизвестных; P – столбец правых частей.

Для решения системы (4) применим метод Зейделя [4], высокая скорость сходимости которого объясняется быстрой итерационной сходимостью вычислительного процесса.

Применительно к рассматриваемой системе (4) формула Зейделя может быть записана в виде [3]

$$\tilde{u}_{i,j}^{n+1} = \frac{a_{i,j-1}u_{i,j-1}^{n+1} + a_{i-1,j}u_{i-1,j}^{n+1} + a_{i,j+1}u_{i,j+1}^{n} + a_{i+1,j}u_{i+1,j}^{n} - P_i}{\sum\limits_{i,j} a_{i,j}}, \tag{5}$$

где $u_{i,j}^{n}$ – значения неизвестных $u_{i,j}$, вычисленные на n-м шаге; $\tilde{u}_{i,j}^{n+1}$ – уточненные значения неизвестных $u_{i,j}$.

Здесь и далее считаем, что начальное приближение $u_{i,j}^{0}$ известно.

Метод Зейделя позволяет получить решение системы уравнений (4) с любой заранее определенной точностью ε. В качестве критерия достижения заданной точности ε используется условие [4]

$$\max\left|\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n}\right| \le \varepsilon. \tag{6}$$

Использование метода Зейделя позволяет уменьшить объем памяти ЭВМ для хранения исходных данных и вычисленных результатов в виде одного массива.

Еще бóльшую скорость сходимости обеспечивают методы верхней или нижней релаксации [3], являющиеся модификацией метода Зейделя. Итерационный процесс в них построен на использовании выражения

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + \overline{\omega}\left(\tilde{u}_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}\right), \tag{7}$$

где $\overline{\omega}$ – коэффициент ускорения сходимости.

Алгоритм использования методов релаксации предусматривает вычисление потенциала в узле $\tilde{u}_{i,j}^{n+1}$ в соответствии с формулой Зейделя (5) и коррекцию его до значения $u_{i,j}^{n+1}$ по выражению (7). Критерием достижения точности ε является аналогичное (6) выражение.

Выбор значения $\overline{\omega}$ влияет на скорость сходимости и осуществляется из условия минимума числа итераций. Как известно [3], оптимальное значение коэффициента ускорения сходимости зависит от числа обусловленности матрицы коэффициентов системы. Поскольку оно связано с параметрами каждой конкретной задачи, в общем случае подобрать оптимальное значение коэффициента $\overline{\omega}_{\text{опт}}$ ускорения сходимости не представляется возможным.

Оптимальное значение коэффициента $\overline{\omega}_{\text{опт}}$ ускорения сходимости может быть определено приближенно. Например, для прямоугольной сетки размером $(N+1)\times(M+1)$, где $N > 14$, $M > 14$, справедливо выражение [3]

$$\overline{\omega}_{\text{опт}} = 2\left(1 - \pi\sqrt{\frac{1}{M^2} + \frac{1}{N^2}}\right). \quad (8)$$

Эффективность метода верхней релаксации со значением коэффициента ускорения сходимости $\overline{\omega}_{\text{опт}}$, рассчитанным по формуле (8), подтверждается экспериментально. Так, в ходе вычислительного эксперимента коэффициент $\overline{\omega}$ из выражения (7) принимал значения: 0,5; 0,9; 1; 1,5; $\overline{\omega}_{\text{опт}}$ (коэффициент $\overline{\omega}_{\text{опт}}$ вычислялся по формуле (8)). В результате была получена зависимость числа итераций n от коэффициента $\overline{\omega}$, график которой изображен на рис. 2.

Как видно из рисунка 2, введение коэффициента ускорения сходимости $\overline{\omega}$ позволяет существенно снизить число требуемых итераций по сравнению с методом Зейделя (при $\overline{\omega} = 1$). Однако наилучший результат может быть достигнут в случае выбора оптимального значения $\overline{\omega}_{\text{опт}}$, позволяющего решить задачу за минимальное число итераций.

Практика решения систем уравнений, подобных по своей структуре конечно-разностным уравнениям (3), получаемым для магнитного поля МПУ накладного типа, позволяет выработать другие способы сокращения времени расчета при сохранении точности результата [3, 4].

Так время, расходуемое на решение системы (4) конечно-разностных уравнений итерационным методом, сильно зависит от того, насколько близко были выбраны начальные приближения $u_{i,j}^0$ к истинным значениям неизвестных. Если они близки к истинным, то временем, затрачиваемым на решение системы, практически можно пренебречь. Поэтому одним из способов повышения эффективности итерационных методов является выбор хорошего начального приближения.

Одним из способов отыскания начальных приближений $u_{i,j}^0$ может служить предварительный расчет поля на сетке с меньшим числом узлов. Полученные в результате потенциалы $u_{i,j}$ с помощью интерполяционных формул переносятся на узлы требуемой более мелкой сетки [2, 3].

При проведении многовариантных расчетов с целью выбора оптимальных геометрических параметров МПУ накладного типа, в качестве начальных значений потенциалов $u_{i,j}^0$ удобно использовать те, что были получены при расчете предыдущего варианта, соответствующие расчетной области с похожей геометрией [3].

Если при расчете магнитного поля МПУ накладного типа используется итерационный метод верхней релаксации (7), то для сокращения числа итераций на i-м шаге можно выбирать новое значение коэффициента ускорения сходимости $\overline{\omega}_i$. Введение набора $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_n$ позволяет сократить общее число итераций n, а, следовательно, и время, затрачиваемое на поиск решения [3, 4].

Таким образом, отыскание начальных значений потенциалов $u_{i,j}^0$,

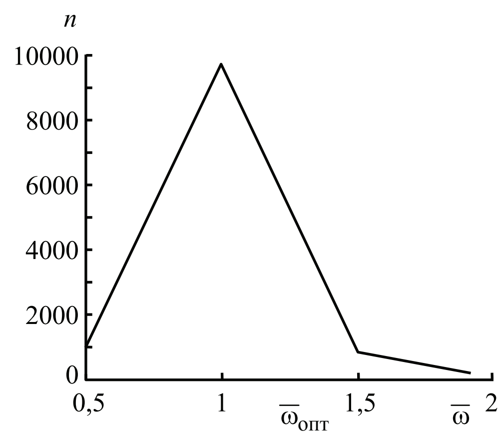

Рис. 2. Зависимость числа итераций *n* от коэффициента ускорения сходимости $\overline{\omega}$

близких к истинным, и введение набора оптимальных значений коэффициента $\overline{\omega}$ ускорения сходимости при решении системы (4) методом верхней релаксации позволит существенно снизить временные затраты.

Эффективным методом повышения точности расчета магнитного поля МПУ накладного типа является экстраполяционный метод, основанный на решении той же задачи, но с введением последовательности сеток [3]. Суть метода заключается в использовании приближенных решений на последовательности сгущающихся сеток, чтобы найти решение с более высокой точностью. Так для получения некоторого решения $u(x)$ с погрешностью порядка $0(h^{2l})$ следует решить задачу на сетках с шагами $h,\ h/2,\ \ldots,\ h[2(l-1)]^{-1}$, то есть найти l приближений $u^h,\ u^{h/2},\ \ldots,\ u^{h(2l-2)^{-1}}$. Искомое решение тогда может быть найдено по формуле

$$u = \sum_{i=1}^{l} \gamma_i u^{h_i}, \tag{9}$$

где γ_i – коэффициенты, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{l} \gamma_i = 1; \\ \sum_{i=1}^{l} h_i^{2S} \gamma_i = 0, \end{cases} \tag{10}$$

где $S = 1,\ 2,\ \ldots,\ l-1$ [3].

Так с использованием данного метода, имея решения $u^h,\ u^{h/2}$ на сетках с шагами $h,\ h/2$ соответственно, можно с легкостью получить решение $u(x)$ с погрешностью порядка $0(h^4)$. Для этого необходимо составить и решить систему (10) при $l = 2$. В результате получим $\gamma_1 = -\frac{1}{3};\ \gamma_2 = \frac{4}{3}.$ Тогда $u = -\frac{1}{3}u^h + \frac{4}{3}u^{h/2}.$

Таким образом, для уменьшения порядка погрешности в два раза требуется произвести расчет на двух сетках с шагами $h,\ h/2$ с последующим составлением линейной комбинации этих решений. Для такого же увеличения точности путем простого измельчения сетки потребовалось бы уменьшить ее шаг от значения h до $10^{-2}h$, то есть в 100 раз. Отсюда следует, что применение рассмотренного метода, основанного на выражениях (9), (10), позволяет существенно повысить точность и сократить время, требуемое для расчета.

Другим способом увеличения точности при расчете магнитного поля МПУ накладного типа является применение разностной аппроксимации с использованием производных более высокого порядка, а также выбор более сложного контура интегрирования при составлении конечно-разностных уравнений.

При этом могут быть использованы следующие известные схемы, приведенные на рис. 3 [3].

Так при использовании схемы на рис. 3, *а*, вместо уравнений вида (3) будут получены более точные уравнения, объединяющие потенциалы девяти соседних точек вида

$$-k_5A_5 - k_6A_6 - k_7A_7 - k_8A_8 + 16(k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 + k_4A_4) - 60A_0 = -i_0,$$

где k_i – коэффициент, зависящий от магнитной проницаемости μ_i i-го узла.

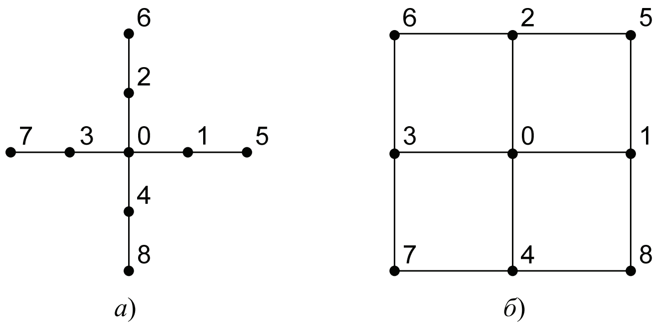

Рис. 3. Схемы для получения разностных уравнений с более высокой точностью аппроксимации

Это выражение имеет порядок погрешности $0(h^4)$, что является в четыре раза выше, чем при использовании уравнения (3), имеющего погрешность порядка $0(h)$.

Более высокий порядок погрешности дает схема на рис. 3, *б*. Соответствующая этой схеме разностная аппроксимация имеет погрешность $0(h^6)$, и имеет вид

$$k_5A_5 + k_6A_6 + k_7A_7 + k_8A_8 + 4(k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 + k_4A_4) - 20A_0 = -i_0.$$

Следует отметить, что существуют и другие способы повышения эффективности численного расчета магнитных полей МПУ накладного типа, основанные на использовании метода конечных элементов, различных методов преобразования уравнений (1), и других, которые были описаны в различных источниках [2–4].

Таким образом, сформулированная задача поиска оптимальной ширины немагнитной стенки резервуара МПУ накладного типа решается путем сведения системы Максвелла (1) к системе конечно-разностных уравнений вида (3). В представленной статье был рассмотрен метод численного решения этой системы, реализация которого в виде комплекса программ позволяет получить мощный инструмент для исследования магнитных полей МПУ накладного типа.

Введение коэффициента $\overline{\omega}_{\text{опт}}$, вычисленного по формуле (8), позволяет сократить число требуемых итераций приблизительно в 50 раз. Это существенно снижает требования к ресурсам ЭВМ, сокращает время решения задачи и позволяет получать результаты с высокой точностью.

Показано, что применение способов, основанных на выборе близкого начального приближения, введения последовательности сеток и более сложных схем конечно-разностной аппроксимации, позволяет достичь бóльшего повышения эффективности расчета магнитного поля МПУ накладного типа.

Список литературы

1. Моделирование магнитных полей магнитострикционных преобразователей перемещений / Э.В. Карпухин [и др.] // Наука и образование – 2011 : сб. ст. междунар. науч.-техн. конф. – Мурманск, 2011. – С. 85–91.

2. Демирчян, К.С. Теоретические основы электротехники. В 3 т. Т. 2 / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин. – СПб. : Питер, 2009. – 432 с.

3. Демирчян, К.С. Машинные расчеты электромагнитных полей / К.С. Демирчян, В.Л. Чечурин. – М. : Высшая школа, 1986. – 240 с.

4. Самарский, А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М : Наука, 1989. – 432 с.

On the Application of Efficient Numerical Methods for Modeling Magnetostrictive Level Devices

E.V. Karpukhin, E.S. Demin, S.B. Demin

Department "Electronics and Electrical Engineering",
Penza State Technological Academy;
edvar1@rambler.ru

Key words and phrases: effective numerical methods; magnetic field; magnetostrictive level converters.

Abstract: We consider numerical methods for calculating magnetic fields of magnetostrictive level transducers of surface type. The ways of improving the efficiency of these numerical methods are shown.

Zur Frage der Anwendung der effektiven Zahlmethoden für die Modellierung der magnetostriktiven Ebenegeräte

Zusammenfassung: Es sind die Zahlmethoden der Berechnung der Magnetfelder der magnetostriktiven Wandler der Ebene des Auflegetypus betrachtet. Es sind die Weisen der Erhöhung der Effektivität dieser Zahlmethoden gezeigt.

Sur le problème de l'application des méthodes efficaces numériques pour le modélage des appareils magnétostrictifs du niveau

Résumé: Sont examinées les méthodes numériques du calcul des convertisseurs magnétostrictifs du niveau du type plaqué. Sont montrés les moyens de l'augmentation de l'efficacité de ces méthodes efficaces numériques.

Авторы: ***Карпухин Эдуард Владимирович*** – аспирант кафедры «Электроника и электротехника»; ***Демин Евгений Станиславович*** – студент; ***Демин Станислав Борисович*** – доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Электроника и электротехника», ФБГОУ ВПО «Пензенская государственная технологическая академия», г. Пенза.

Рецензент: ***Слесарев Юрий Николаевич*** – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Прикладная математика и информатика», ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный педагогический университет им. В.Г. Белинского», г. Пенза.
