УДК 517.938

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ: ГЕНЕРАЛЬНАЯ КОМПАНИЯ – СОВМЕСТНОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ

Е.С. Дюба

Кафедра «Математика и методика преподавания математических дисциплин», ФГБОУ ВПО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина»; dyuba-lisa@rambler.ru

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: дифференциальные уравнения; доля рынка; максимальная прибыль; управление; функционал; экстремум.

Аннотация: Рассмотрена задача управления математической модели развития системы: генеральная компания – совместное предприятие, которая описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений в непрерывном времени. Задача управления сформулирована как задача достижения максимальной прибыли генеральной компании при ограниченном векторе управления. Найдены условия наиболее выгодного развития экономической системы.

Модель развития экономической системы: генеральная компания – совместное предприятие, носит название франчайзинга [1]. Она является выгодной формой ведения бизнеса. Подобная модель развития позволяет генеральной компании расти быстрее и с меньшими затратами, чем при традиционной организации развития экономической системы (открытие филиалов). Предприниматель, присоединившийся к франчайзинговой системе, снижает свой риск за счет работы под известной людям маркой.

По подобной схеме работают известные компании «Копейка», «Пятерочка», часть салонов «Евросеть», фирма 1С. Самым известным представителем является компания McDonald’s.

Рассмотрим математическую модель развития экономической системы, состоящую из генеральной компании и $n-1$ совместного предприятия. Предположим, что финансовый рынок может быть разделен между совместными предприятиями и генеральной компанией в любой пропорции. Пусть $\boldsymbol{x}_1$ – доля рынка, занятая генеральной компанией; $\boldsymbol{x}_i$, $i \in \{2, n\}$ – доля рынка, занятая i-м совместным предприятием.

Символом $\dot{x}_1$ будем обозначать темп изменения доли финансового рынка генеральной компании. Он зависит от занимаемой доли рынка самой генеральной компании и всех ее совместных предприятий в момент времени t, от управляющих воздействий, то есть от вложений в рекламу, и развития качества товаров или услуг. Для успешного развития своей марки генеральной компании приходится поддерживать совместные предприятия. Она выделяет либо часть своих средств, либо часть средств других совместных предприятий, либо оказывает поддержку в виде дополнительных управляющих воздействий.

Таким образом, темп изменения доли финансового рынка генеральной компании определится равенством $\dot{x}_1(t)=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}(t)x_i+\sum_{j=1}^{m}b_{1j}(t)u_i+\bar{f}_1(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$, где $\boldsymbol{u}=(u_1,...,u_m)$ – вектор-управление, $\bar{f}_1(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ включает все нелинейные слагаемые.

Изменение доли финансового рынка, занимаемого первым совместным предприятием, $\dot{x}_2$ зависит от долей рынка, которые занимают генеральная компания и остальные совместные предприятия, от выбранных этой компанией управленческих действий (вложение средств в исследование рынка, организация работы компании). Если этой компании необходима поддержка, ее может оказать генеральная компания из своих средств или из средств одного или нескольких совместных предприятий, либо в виде организации дополнительных управляющих воздействий.

Темп изменения доли финансового рынка первого совместного предприятия определится равенством $\dot{x}_2(t)=\sum_{i=1}^{n}a_{2i}(t)x_i+\sum_{j=1}^{m}b_{2j}(t)u_i+\bar{f}_2(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$. Для второго совместного предприятия аналогично получим $\dot{x}_3(t)=\sum_{i=1}^{n}a_{3i}(t)x_i+\sum_{j=1}^{m}b_{3j}(t)u_i+$ $+\bar{f}_3(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$, и так далее.

В общем случае получим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}+\bar{\boldsymbol{f}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}), \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),...,x_n(t))$ – доли рынка, занятые генеральной компанией и $n-1$ совместным предприятием; $\dot{x}_i$, $i\in\{1,n\}$ – темп изменения каждой из этих величин при $t\in[0,T]$, T – некоторое положительное число; $\boldsymbol{u}=(u_1,...,u_m)$ – вектор-управление; $\boldsymbol{A}(t)$ – $n\times n$-матрица; $\boldsymbol{B}(t)$ – $n\times m$-матрица, коэффициенты которой учитывают вложения в управляющие воздействия. Вектор-функция $\bar{\boldsymbol{f}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ имеет порядок выше первого по $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{u}$ одновременно и учитывает влияние нелинейных членов на темп изменения величин $\boldsymbol{x}(t)$.

Цель исследования состоит в том, чтобы найти управление экономической системы, при котором генеральная компания получит наибольшую прибыль за исследуемый период времени.

Прибыль генеральной компании за время от 0 до T определяется функционалом

$$\pi(x,\boldsymbol{u})=\int_0^T\Phi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})dt, \qquad (2)$$

где $\Phi(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ – некоторая нелинейная функция, в которой учитываются доход от деятельности генеральной компании и совместных предприятий, приносимый вложениями в управляющие воздействия, расходы на инвестиции в развитие сети.

Ставится задача – найти управление $\boldsymbol{u}$, при котором решение $\boldsymbol{x}(t)$ системы (1), определенное на $[0,T]$, доставляет максимальную прибыль генеральной компании, то есть доставляет максимум нелинейному функционалу.

Предположим, что решение системы (1) представимо в виде $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{u})$, где $\boldsymbol{u} \in U$, $U = \{\boldsymbol{u} : |\boldsymbol{u}| \le K\}$ – множество всех допустимых управлений (m-мерный куб); K – заданное положительное число. При $t = 0$ $x(0, \boldsymbol{u})$ обозначим как $\alpha(\boldsymbol{u})$.

Зафиксируем произвольное решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{u}_0)$, $\boldsymbol{u}_0 \in U$. Для решения поставленной задачи выполним замену переменных $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{u}_0)$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0$, система (1) сведется к системе

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}). \tag{2}$$

Функционал $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ в новых переменных определится равенством $\pi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}) = \int_0^T \Phi(t, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{u}_0), \boldsymbol{u}_0)dt.$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что $\boldsymbol{y} = 0$ является решением системы (2) при $\boldsymbol{v} = 0$. Тогда существует $\delta \in (0, \delta_0]$ такое, что для любых $\boldsymbol{c} \in C(\delta)$ и $\boldsymbol{v} \in V(\delta)$ система (2) имеет решение $\boldsymbol{y} = \bar{\boldsymbol{y}}(t, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{v})$, $\bar{\boldsymbol{y}}(0, \boldsymbol{c}, 0) = \boldsymbol{c}$, определенное на сегменте $[0, T]$, непрерывное на множестве $[0, T] \times C(\delta) \times V(\delta)$ и удовлетворяющее на этом множестве неравенству $|\bar{\boldsymbol{y}}(t, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{v})| \le \delta_0$.

В предположении, что $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{z}|} = 0$, $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v})$, справедлива теорема.

Теорема 1. Решение $\boldsymbol{y} = \bar{\boldsymbol{y}}(t, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{v})$ системы (2) представимо в виде $\bar{\boldsymbol{y}}(t, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{c} + \boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{v} + o(|\gamma|)$, где $\gamma = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{X}(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{X}(t)\int_0^t \boldsymbol{X}^{-1}(\tau)\boldsymbol{B}(\tau)d\tau.$

Предположим, что в окрестности точки $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{v}) = (0,0)$ справедливо равенство $\pi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}) = \overline{\Phi}(\boldsymbol{u}_0) + \overline{\Phi}_1(\boldsymbol{u}_0)\gamma + Q_l(\boldsymbol{u}_0, \gamma) + o\left(|\gamma|^l\right)$, где $\overline{\Phi}_1(\boldsymbol{u}_0)$ – известная вектор-функция, $\overline{\Phi}(\boldsymbol{u}_0) = \int_0^T \Phi(t, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}_0), \boldsymbol{u}_0)dt$; $Q_l(\boldsymbol{u}_0, \gamma)$ – форма порядка l, $l \ge 2$, относительно координат вектора γ.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. Необходимым условием существования точки экстремума функционала $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ является выполнение равенства $\overline{\Phi}_1(\boldsymbol{u}_0) = 0$.

Теорема 3. Пусть вектор $\boldsymbol{u}_0$ таков, что $\overline{\Phi}_1(\boldsymbol{u}_0) = 0$. Тогда:

1) если форма $Q_l(\boldsymbol{u}_0, \gamma)$ – определенно-отрицательная, то на решении $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{u}_0)$ системы (1) функционал $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ имеет локальный максимум;

2) если форма $Q_l(\boldsymbol{u}_0, \gamma)$ – знакопеременная, то на решении $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{u}_0)$ системы (1) функционал $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ экстремума не имеет.

Таким образом определятся все точки $\boldsymbol{u}_0$ ($|\boldsymbol{u}_0| < K$), при которых $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_0)$ – локальный максимум функционала (2).

Пользуясь теорией относительного экстремума и теоремой 3, находим все точки $\boldsymbol{u}_0$, принадлежащие граням и ребрам куба U, и такие, что $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_0)$ – локальный относительный максимум функционала (2).

Предположим, что множество векторов $\boldsymbol{u}_0 \in U$, при которых $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_0)$ – локальный максимум функционала (2), конечное. Получим с учетом значений функционала (2) в вершинах куба U, что существует вектор $\overline{\boldsymbol{u}}_0 \in U$ такой, что на решении $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \overline{\boldsymbol{u}}_0)$ функционал (2) принимает наибольшее значение среди всех его значений, определенных на решениях $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{u}_0)$ при любом $\boldsymbol{u}_0 \in U$.

Заключение. В статье построена и исследована нелинейная математическая модель развития экономической системы: генеральная компания – совместное предприятие. Найдены условия существования управления $\overline{\boldsymbol{u}}_0 \in U$ и, следовательно, решения $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \overline{\boldsymbol{u}}_0)$ системы (1), определяющего максимальную прибыль генеральной компании.

Пример. Пусть в системе (1) $\boldsymbol{A} = (\text{colon}(0{,}6;0),\ \text{colon}(0;0{,}3))$, $\boldsymbol{B} = (\text{colon}(-0{,}6;0))$, $\bar{\boldsymbol{f}}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \Big(\text{colon}\Big(-x_1^2 - 1{,}5x_1x_2 + 0{,}3x_1u + 1{,}5x_2u + 0{,}7u^2 + 2{,}5x_1^2x_2 - 0{,}5x_1^2u - 2{,}5x_2u^2 + 0{,}5u^3\Big), \quad \Big(-0{,}5x_1x_2 - 0{,}75x_2^2 - 0{,}35x_2u - 0{,}25x_1x_2u + 1{,}25x_1x_2^2 + 1{,}25x_2^2u - 0{,}25x_2u^2\Big)\Big)$, множество допустимых управлений определяется равенством $U = \{\boldsymbol{u} : |\boldsymbol{u}| \le 0{,}5\}$, $t \in [0,1]$. Функционал прибыли описывается равенством $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \int\limits_0^1 \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})dt$, в котором $\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0{,}4x_1u - 0{,}16x_1^2 - 0{,}25u^2 - 0{,}15x_1x_2 + 0{,}2u$.

Решением системы дифференциальных уравнений является вектор-функция $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) = (\text{colon}(0{,}6 - u),\ (0{,}4 - 0{,}2u))$. Определим условия существования управления $\boldsymbol{u}_0$, при котором генеральная компания получит максимальную прибыль.

Заменой переменных $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}_0)$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0$ система (1) сведется к системе

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}), \tag{3}$$

в которой $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v})$ – известная вектор-функция второго и выше порядка. Тогда по теореме 1 решение системы (3) запишется так: $\boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} + o(|\gamma|)$.

Функционал в новых переменных примет вид: $\pi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}) = \overline{\Phi}(\boldsymbol{u}_0) + \overline{\Phi}_1(\boldsymbol{u}_0)\gamma + \overline{Q}_2(\boldsymbol{u}_0, \gamma) + o\left(|\gamma|^2\right)$. Непосредственными вычислениями устанавливается, что при $\boldsymbol{u}_0 = 0{,}42$ $\overline{\Phi}(\boldsymbol{u}_0) = 0{,}056$, $\overline{\Phi}_1(\boldsymbol{u}_0) = 0{,}71 - 1{,}68u_0 = 0$ и $\overline{Q}_2(\boldsymbol{u}_0, \gamma) = -0{,}0936v^2$. Точка $\boldsymbol{u}_0 = 0{,}42$ является внутренней для сегмента $|\boldsymbol{u}| \le 0{,}5$. Следовательно, выполнены условия теоремы 2. Это значит, что в точке $\boldsymbol{u}_0 = 0{,}42$ функционал имеет локальный максимум.

Непосредственным вычислением устанавливаем, что $\pi(\boldsymbol{x}; -0{,}5) = -0{,}66$, $\pi(\boldsymbol{x}; 0{,}5) = 0{,}051$.

Таким образом, наибольшее значение функционал прибыли $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0{,}056$ принимает в точке $\boldsymbol{u}_0 = 0{,}42$.

Список литературы

1. Рудашевский, В.Д. Проблемы предприятий. Оптимальная стратегия развития франчайзинговой системы / В.Д. Рудашевский, М.А. Фурщик // Экономика и мат. методы. – 1998. – Т. 34, вып. 2. – С. 89–104.

The Conditions of Optimal Handling of the Mathematical Model of the Economic System: General Company – Joint Venture

E.S. Dyuba

Department "Mathematics and Teaching Methods of Mathematical Disciplines", Ryazan State University named after S.A. Yesenin; dyuba-lisa@rambler.ru

Key words and phrases: differential equations; functional; management; market share; the maximum profit; optimization.

Abstract: The paper studies the task of handling the mathematical model of the development of the system "general company – a joint venture", which is described by a nonlinear system of differential equations in continuous time. The task of control is formulated as to maximize the profit of the company with a limited general vector control. The conditions of the most favorable development of the economic system are identified.

Bedingungen der optimalen Steuerbarkeit des mathematischen Modells des ökonomischen Systems: Generalgesellschaft – gemeinsames Unternehmen

Zusammenfassung: Es wird die Aufgabe der Steuerung des mathematischen Modells der Entwicklung des Systems: Generalgesellschaft – gemeinsames Unternehmen, das von dem nichtlinearen Systems der Differentialgleichungen in der kontinuierlichen Zeit beschrieben wird, betrachtet. Die Aufgabe der Steuerung wird als Aufgabe der Erreichung des maximalen Gewinns der Generalgesellschaft bei dem begrenzten Steuerungsvektor formuliert. Es werden die Bedingungen der gewinnbringenderer Entwicklung des ökonomischen Systems gefunden.

Conditions de la dirigeabilité optimale du modèle mathématique du système économique: compagnie générale – enterprise conjointe

Résumé: Est examiné le problème de la commande du modèle mathématique du développement du système compagnie générale – enterprise conjointe, qui est décrit par un système non linéaire des équations différentielles dans le temps continu. Le problème de la commande est formulé comme un problème de l'obtention du bénéfice maximal de la compagnie générale avec un vecteur limité de la commande. Sont trouvées les conditions du développement les plus avantageux du système économique.

Автор: ***Дюба Елизавета Сергеевна*** – аспирант кафедры «Математика и методика преподавания математических дисциплин», ФГБОУ ВПО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина».

Рецензент: ***Терехин Михаил Тихонович*** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Математика и методика преподавания математических дисциплин», ФГБОУ ВПО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина».