УДК 517.948

О ВЕРТИКАЛЬНЫХ АСИМПТОТАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Т.В. Жуковская[1], Е.А. Молоканова[1], Д.Л. Стуров[2]

Кафедра «Высшая математика»; zukovskys@mail.ru; ФГБОУ ВПО «ТГТУ» (1); факультет «Авиационные средства связи», Воронежский авиационный инженерный университет, г. Воронеж (2)

Представлена членом редколлегии профессором Н.П. Пучковым

Ключевые слова и фразы: аппроксимация решения; вертикальные асимптоты; модификация численного метода Эйлера; оценки асимптот.

Аннотация: Исследованы условия существования и возможности построения вертикальных асимптот интегральных кривых обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Получены оценки асимптот, предложена модификация численного метода Эйлера для нахождения асимптот и построения приближенного решения дифференциального уравнения.

В работе исследуются условия существования и возможности построения вертикальных асимптот решения задачи Коши

$$y' = f(x, y), \;\; y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Для простейшего дифференциального уравнения

$$y' = f(x), \tag{2}$$

в предположении знакопостоянства функции $f(x)$, легко получить критерии существования вертикальных и горизонтальных асимптот интегральных кривых. Решение уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, имеет вид

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)dx. \tag{3}$$

Следовательно, решение $y(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = c > x_0$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to c-} \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \infty.$$

Очевидно, что интегральные кривые дифференциального уравнения (2) имеют горизонтальные асимптоты $y = C$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \;\; \exists \int_{x_0}^{\infty} f(x)dx < \infty. \tag{4}$$

Используем критерий существования горизонтальной асимптоты решения уравнения (2) для получения достаточных условий существования вертикальной асимптоты решения задачи (1).

Теорема 1. Если непрерывная функция $f(x,y)$ на всей полуплоскости $x \geq x_0$ (или $x \leq x_0$) удовлетворяет неравенству

$$|f(x,y)| \geq g(y), \tag{5}$$

где $g(y)$ такая непрерывная положительная функция, что $\lim\limits_{y \to +\infty} g(y) = +\infty$ (или $\lim\limits_{y \to -\infty} g(y) = +\infty$) и интеграл $\int\limits_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{g(y)}$ (или интеграл $\int\limits_{-\infty}^{y_0} \frac{dy}{g(y)}$) сходится, то решение задачи Коши (1) имеет вертикальную асимптоту $x = c$, где

$$c \leq x_0 + \int\limits_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{g(y)} \quad (\text{или } c \geq x_0 - \int\limits_{-\infty}^{y_0} \frac{dy}{g(y)}). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть неравенство (5) выполняется в полуплоскости $x \geq x_0$. В силу непрерывности функции $f(x,y)$ и положительности функции $g(y)$ неравенство (5) эквивалентно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(x,y) \geq g(y) \quad \forall x \geq x_0; \\ f(x,y) \leq -g(y) \quad \forall x \geq x_0. \end{array}\right.$$

Докажем теорему для случая

$$f(x,y) \geq g(y) \quad \forall x \geq x_0 .$$

Так как функция $f(x,y)$ непрерывная, то задача (1) имеет решение [1, с. 41].

Рассмотрим задачу Коши

$$z' = g(z), \quad z(x_0) = y_0 . \tag{7}$$

Найдем вертикальную асимптоту решения этой задачи. Так как функция $g(z)$ положительная, то на решении задачи (7) между переменными x и z имеется взаимно однозначное соответствие. Поэтому отыскание вертикальных асимптот функции $z(x)$ равносильно нахождению горизонтальных асимптот функции $x(z)$ – решения уравнения

$$g(z)x' = 1 . \tag{8}$$

Необходимые и достаточные условия (4) существования горизонтальных асимптот решений уравнения (8) являются условиями существования вертикальной асимптоты решения задачи (7): решение $z(x)$ задачи (7) имеет вертикальную асимптоту тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{z \to +\infty} g(z) = +\infty$, а интеграл $\int\limits_{y_0}^{+\infty} \frac{dz}{g(z)}$ сходится. Уравнение вертикальной асимптоты в этом случае, как следует из представления (3), имеет вид

$$x = x_0 + \int\limits_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{g(y)} .$$

Согласно теореме об оценке решения дифференциального уравнения [2, с. 29] решения $y(x)$ задачи (1) и $z(x)$ задачи (7) связаны неравенством

$y(x) \geq z(x)$. Из последнего неравенства следует, что решение задачи (1) имеет вертикальную асимптоту $x = c$, где

$$c \leq x_0 + \int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{g(y)}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1 [3, теорема 1]. Пусть в задаче (1) $y_0 > 0$ и существуют такие числа $A > 0$ и $\alpha > 1$, что при всех $x \geq x_0$, $y \geq \alpha$ выполнено неравенство

$$f(x, y) \geq A\, y^{\alpha},$$

тогда решение задачи (1) имеет вертикальную асимптоту $x = c$, где

$$c \leq x_0 + \frac{{y_0}^{1-\alpha}}{A(\alpha - 1)}.$$

Следствие 2. Установлено при доказательстве теоремы, что решение задачи Коши

$$y' = g(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

где $g(y)$ – непрерывная знакопостоянная функция, имеет вертикальную асимптоту тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{y \to \infty} g(y) = \infty$ и интеграл $\int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{g(y)}$ сходится. Уравнение вертикальной асимптоты имеет вид

$$x = x_0 + \int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{g(y)}.$$

Замечание. Можно ослабить условие теоремы и потребовать их выполнение не на всей плоскости, а в полосе $[x_0, x_0 + \delta) \times R$ (или на множестве $(x_0 - \delta, x_0] \times R$), где $\delta > \int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{g(y)}$ (или $\delta > \int_{-\infty}^{y_0} \frac{dy}{g(y)}$).

Неравенства (5) дают оценку вертикальной асимптоты решения задачи (1), зависящую от выбора функции $g(y)$. Для получения оценки значения $x = c$, не зависящей от выбора функции $g(y)$, используем одношаговые методы численного решения задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения. Выполнение неравенств (6) свидетельствует о том, что на интервале $(x_0 + \int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{g(y)}, +\infty)$ решения задачи (1) не существует, то есть $y(x)$ не продолжаемо на всю числовую ось. Применение шаговых методов типа Рунге–Кутты с постоянным шагом $(x_{i+1} - x_i)$ для интегрирования уравнения задачи (1) не позволяет «заметить» максимальный интервал существования решения и приводит к построению лишенных смысла приближенных значений решения за границами этого интервала. В работе используется модификация численных методов типа Рунге–Кутты [3], позволяющая изменять шаг интегрирования по оси $0x$, в зависимости от поведения функции $y(x)$: в качестве постоянного шага выбирается длина заключенного между точками (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) отрезка кривой, аппроксимирующей решение.

Применим эту идею к методу Эйлера, значения приближенного решения в котором вычисляются по формуле $y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i)$, где $x_i = x_0 + hi,\ i = 1, 2, \ldots$. Шаг h будем считать переменным $h = h_i$, а в качестве постоянного шага H возьмем расстояние между точками (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1})

$$H = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} = h_i \sqrt{1 + f^2(x_i, y_i)}\,.$$

Отсюда $h_i = \dfrac{H}{\sqrt{1 + f^2(x_i, y_i)}}$. Таким образом, получаем модификацию метода Эйлера в виде

$$x_{i+1} = x_i + \frac{H}{\sqrt{1 + f^2(x_i, y_i)}}, \qquad y_{i+1} = y_i + \frac{H\, f(x_i, y_i)}{\sqrt{1 + f^2(x_i, y_i)}}\,. \tag{9}$$

Если решение находим в полуплоскости $x \le x_0$, то в формулах (9) вместо шага H выбираем «$-H$».

Теорема 2. Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и, кроме того, функция $g(y)$ является монотонной, то приближенное решение задачи (1), полученное по формулам (9), имеет вертикальную асимптоту, т.е.

$$\lim_{i\to\infty} y_i = \infty, \quad \lim_{i\to\infty} x_i = \bar{c} < \infty\,.$$

Доказательство. Докажем теорему для случая

$$f(x, y) \ge g(y) > 0 \quad \forall x \ge x_0 \ \ \forall y \ge y_0\,.$$

Тогда из формулы (10) имеем $y_{i+1} > y_i$ при любом i и

$$y_{i+1} - y_i = \frac{H\, f(x_i, y_i)}{\sqrt{1 + f^2(x_i, y_i)}} \ge \frac{H\, g(y_i)}{\sqrt{1 + g^2(y_i)}}\,,$$

так как функция $F(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$ является возрастающей при $t > 0$. Далее, из монотонного возрастания функции $g(y)$ следует, что $y_i \ge y_0 + \dfrac{H\, g(y_0)}{\sqrt{1 + g^2(y_0)}}\, i$, поэтому $\lim\limits_{i\to\infty} y_i = \infty$.

Для последовательности $\{x_i\}$ из формулы (9) имеем

$$0 < x_{i+1} - x_i = \frac{H}{\sqrt{1 + f^2(x_i, y_i)}} \le \frac{H}{\sqrt{1 + g^2(y_i)}}\,. \tag{10}$$

Из сходимости интеграла $\displaystyle\int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{g(y)}$ следует сходимость ряда $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{g(y_i)}$. Функции $\dfrac{1}{g(y)}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{1 + g^2(y)}}$ являются эквивалентными бесконечно малыми при $y \to \infty$, поэтому ряд $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{H}{\sqrt{1 + g^2(y_i)}}$ также сходится. Тогда неравенство (10) обеспечивает сходимость знакоположительного ряда $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (x_{i+1} - x_i)$, поэтому существует конечный предел $\bar{c} = \lim\limits_{i\to\infty} x_i$. Теорема доказана.

Приведем условия, при которых можно оценить погрешность вычисления асимптоты, т.е. $|\bar{c}-c|$.

Теорема 3. Если функция $f(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, имеет непрерывные частные производные в полуплоскости $x \ge x_0$ (или $x \le x_0$) и существует такое число $K>0$, что в соответствующей полуплоскости выполняются неравенства:

$$|f'_x(x,y)| \le K|f(x,y)|, \quad |f'_y(x,y)| \le K|f(x,y)|, \tag{11}$$

тогда существует такое число $M>0$, что $|\bar{c}-c| \le MH^2$, где $x=c$ – вертикальная асимптота решения задачи (1); $x=\bar{c}$ – вертикальная асимптота приближенного решения, полученного по формулам (9); H – постоянный шаг, используемый в формулах (9).

Доказательство. Докажем теорему для случая

$$f(x,y) \ge g(y) > 0 \quad \forall x \ge x_0 \;\; \forall y \ge y_0 . \tag{12}$$

Оценим расстояние между двумя интегральными кривыми уравнения задачи (1) при фиксированном значении переменной *y*, если соответствующие точки, через которые эти кривые проходят: $(\xi,\bar{y})$ и $(\eta,\bar{y})$, где $\bar{y} \ge y_0$, $\xi \ge x_0, \eta \ge x_0$. Вследствие положительности функции $f(x,y)$ эти кривые можно рассматривать как графики решений соответствующих задач Коши:

$$f(x,y)x' = 1, \;\; x(\bar{y}) = \xi ;$$

$$f(z,y)z' = 1, \;\; z(\bar{y}) = \eta .$$

По теореме Лагранжа о среднем и в силу неравенств (11) и (12) имеем

$$|x'-z'| = \left|\frac{1}{f(x,y)} - \frac{1}{f(z,y)}\right| = \left|\frac{f'_x(\bar{x},y)}{f^2(\bar{x},y)}\right| |x-z| \le \frac{K}{f(\bar{x},y)}|x-z| \le \frac{K}{g(y)}|x-z| .$$

По теореме об оценке решения дифференциального уравнения [2, с. 29] справедливо неравенство $|x(y)-z(y)| \le u(y)$ при $y \ge \bar{y}$, где $u(y)$ является решением задачи

$$g(y)u'(y) = Ku, \;\; u(\bar{y}) = |\xi-\eta| .$$

Поскольку

$$u = |\xi-\eta| \exp\left(\int_{\bar{y}}^{y} \frac{dy}{g(y)}\right) < |\xi-\eta| \exp\left(\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{g(y)}\right),$$

то, обозначив $N = \exp\left(\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{g(y)}\right)$, получим для всех $y \ge \bar{y}$

$$|x(y)-z(y)| < N|\xi-\eta| . \tag{13}$$

Обозначим $x_i(y)$ интегральную кривую уравнения $f(x,y)x'=1$, проходящую через точку (x_i,y_i), координаты которой вычисляются по формулам (9), $i=1,2,\ldots$, а $x_0(y)$ – интегральная кривая, проходящая через точку (x_0,y_0), т.е. функция, обратная решению задачи (1). Найдем расстояние от точки (x_i,y_i) до интегральной кривой $x_{i-1}(y)$ при $y=y_i$, $i=1,2,\ldots$, используя формулы (9), представление решения вида (3) и интегральную теорему о среднем

$$|x_i - x_{i-1}(y_i)| = \left| x_{i-1} + \frac{H}{\sqrt{1+f^2(x_{i-1}, y_{i-1})}} - x_{i-1} - \int\limits_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{dy}{f(x(y), y)} \right| =$$

$$= \left| \frac{H}{\sqrt{1+f^2(x_{i-1}, y_{i-1})}} - \frac{Hf(x_{i-1}, y_{i-1})}{\sqrt{1+f^2(x_{i-1}, y_{i-1})}\, f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)} \right| = \left| \frac{1}{f(x_{i-1}, y_{i-1})} - \frac{1}{f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)} \right| \Delta y_i ,$$

где $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\bar{y}_i \in [y_{i-1}, y_i]$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. С помощью теоремы Лагранжа о среднем для функции нескольких переменных [4, с. 454] и неравенств (11) и (12) получим оценку этого расстояния

$$|x_i - x_{i-1}(y_i)| = \left| \frac{1}{f(x_{i-1}, y_{i-1})} - \frac{1}{f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)} \right| \Delta y_i =$$

$$= \left| \frac{f'_x(\hat{x}_i, \hat{y}_i)(x_{i-1} - \bar{x}_i) + f'_y(\hat{x}_i, \hat{y}_i)(y_{i-1} - \bar{y}_i)}{f^2(\hat{x}_i, \hat{y}_i)} \right| \Delta y_i \le$$

$$\le \frac{K(\Delta x_i + \Delta y_i)}{f(\hat{x}_i, \hat{y}_i)} \Delta y_i \le \frac{2KH^2}{g(y_{i-1})}. \tag{14}$$

Здесь учитывалось также, что функция $g(y)$ монотонно возрастает и по формулам (10) выполняются неравенства $\Delta x_i \le H$, $\Delta y_i \le H$.

Неравенства (13) и (14) позволяют получить оценку расстояния от точки (x_n, y_n) до решения $x_0(y)$ задачи (1) при $y = y_n$:

$$|x_n - x_0(y_n)| \le |x_n - x_{n-1}(y_n)| + \sum_{i=1}^{n-1} \sup_{y \ge y_i} |x_i(y) - x_{i-1}(y)| < |x_n - x_{n-1}(y_n)| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} N |x_i - x_{i-1}(y_i)| \le \frac{2KH^2}{g(y_{n-1})} + N \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2KH^2}{g(y_{i-1})} = \frac{2KH^2}{g(y_{n-1})} + 2KH^2 N \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{g(y_{i-1})}.$$

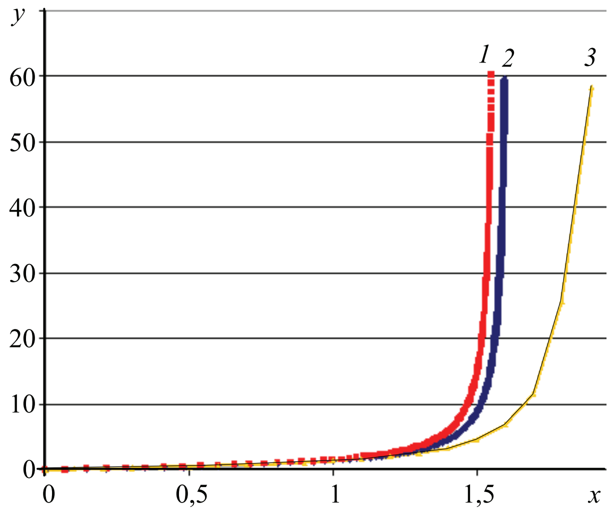
Перейдем к пределу при $n \to \infty$. По теореме 2 и по свойствам функции $g(y)$ имеем

$$|\bar{c} - c| \le 2KH^2 N \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{g(y_{i-1})}.$$

Полученный ряд сходится по интегральному признаку Коши. Полагая $M = 2KN \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{g(y_{i-1})}$, получим $|\bar{c} - c| \le MH^2$. Теорема доказана.

Эффективность применения формул (9) для нахождения вертикальной асимптоты интегральной кривой проиллюстрируем на простом примере.

Пример. Дана задача Коши: $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$. Ее решением является функция $y = \mathrm{tg}x$ с вертикальной асимптотой $x = \pi/2$. Такая задача рассмотрена в следствии 2 к теореме 1. На рисунке приведены графики решения данной задачи (отмечен цифрой *1*), приближенного решения, полученного по формулам (9) (цифрой *2*), и приближенного решения, полученного по методу Эйлера (циф-



Графики решения к примеру

рой *3*). Для наглядности узлы аппроксимации в приближенных решениях соединены гладкой кривой. Шаг аппроксимации $H = 0{,}1$, асимптота приближенного решения, с точностью до третьей цифры после запятой, $x = 1{,}603$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00645).

Список литературы

1. Филиппов, А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений : учебник / А.Ф. Филиппов. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 240 с.
2. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1976. – 576 с.
3. Жуковский, Е.С. О параметрическом задании решения дифференциального уравнения и его приближенном построении / Е.С. Жуковский // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 1996. – № 4 (407). – С. 31–34.
4. Зорич, В.А. Математический анализ. В 2 ч. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.

About Vertical Asymptotes of Integral Curves of Ordinary Differential Equations

T.V. Zhukovskaya[1], E.A. Molokanova[1], D.L. Sturov[2]

Department "Higher Mathematic"; zukovskys@mail.ru; TSTU (1);
Faculty "Aviation Communication", Voronezh Aviation Engineering University, Voronezh (2)

Key words and phrases: approximation of solutions; modification of the numerical method Euler's evaluation of the asymptotes; vertical asymptote.

Abstract: The paper examines the conditions of existence and the possibility of constructing vertical asymptotes of the integral curves of ordinary differential equations of the first order. We obtain estimates of the asymptotes and propose the modification of the numerical Euler method for finding the asymptotes and the construction of an approximate solution of differential equations.

Über senkrechten Asimptoten der Integralkurven der gewöhnlichen Differentialgleichung

Zusammenfassung: Es sind die Bedingungen des Existierens und der Möglichkeit des Baues der senkrechten Asimptoten der Kurven der gewöhnlichen Differentialgleichung der ersten Reihe untersucht. Es sind die Einschätzungen der Asimptoten erhalten, es ist die Modifikation der Zahlmethde von Eiler für das Finden der Asimptoten und des Baues der Annäherungslösung der Differentialgleichung vorgeschlagen.

Sur les asymptotes verticales des courbes intégrales d'une équation différentielle ordinaire

Résumé: Sont étudiées les conditions de l'existance et les possibilités de la construction des asymptotes verticales des courbes intégrales d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Sont obtenues les estimations des asymptotes, est proposée la modification de la méthode numérique d'Euler pour trouver les asymptotes et construire la solution approximée de l'équation différentielle.

Авторы: ***Жуковская Татьяна Владимировна*** **–** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика»; ***Молоканова Елена Анатольевна*** – кандидат педагогических наук, старший преподаватель кафедры «Высшая математика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ»; ***Стуров Дмитрий Леонидович*** – курсант факультета «Авиационные средства связи», специальность «Радиотехника» Воронежского авиационного инженерного университета, г. Воронеж.

Рецензент: ***Дзюба Сергей Михайлович*** **–** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика», ФГБОУ ВПО «ТГТУ», г. Тамбов.
