

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Н.Я. Молотков, О.В. Ломакина

Кафедра «Теоретическая механика»; ГОУ ВПО «ТГТУ»; tolmat@nnn.tstu.ru

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: автоколебательная система; маятник; частота колебаний; электрические методы; энергия.

Аннотация: На основе применения электрических методов измерения неэлектрических величин исследуется возникновение механических автоколебаний на примере маятника Фроуда. Регистрируются временные характеристики колебаний и фазовая диаграмма возникающих автоколебаний.

Маятник Фроуда [1] представляет собой обычный физический маятник, жестко скрепленный с кольцевой муфтой, свободно насаженной на равномерно вращающийся вал (рис. 1).

Если обозначить угловую скорость вала Ω , угол отклонения маятника от вертикали φ , момент инерции маятника I , массу маятника m и его приведенную длину l , то уравнение движения рассматриваемого маятника запишется в виде

$$I\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = M, \quad (1)$$

где M – момент сил сухого трения муфты маятника о вал. В уравнении (1) учтено и сопротивление воздуха, считается, что оно пропорционально угловой скорости $\dot{\varphi}$ маятника. Так как сила сухого трения между вращающимися валом и муфтой маятника зависит от относительной скорости трущихся поверхностей, то есть от относительной угловой скорости вала и маятника, то момент силы трения можно представить в виде

$$M = f(\Omega - \dot{\varphi}). \quad (2)$$

В случае малых углов ($\sin \varphi \cong \varphi$) уравнение (1) принимает вид

$$I\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + mgl\varphi = f(\Omega - \dot{\varphi}). \quad (3)$$

Раскладывая $f(\Omega - \dot{\varphi})$ в ряд вблизи значения Ω и ограничиваясь первыми двумя членами разложения ряда, получим

$$I\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + mgl\varphi = f(\Omega) - \dot{\varphi}'(\Omega). \quad (4)$$

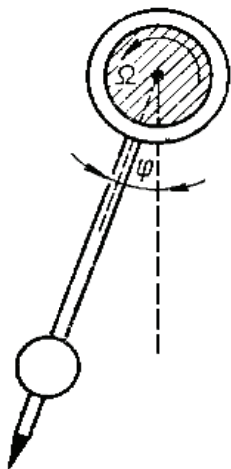


Рис. 1. Маятник Фроуда

Постоянный член $f(\Omega)$ вызывает только смещение положения равновесия маятника. При новой угловой координате, отсчитываемой от нового смещенного положения равновесия, уравнение движения принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \left[\frac{r + f'(\Omega)}{I} \right] \dot{\varphi} + \frac{mgl}{I} \varphi = 0 \quad (5)$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2\alpha\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (6)$$

где

$$\alpha = \frac{r + f'}{2I}; \quad (7)$$

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}. \quad (8)$$

Если $f'(\Omega) < 0$ и по абсолютной величине меньше r , то есть $|f'(\Omega)| < r$, то происходят затухающие колебания, но затухание меньше, чем если бы маятник находился на подвесе, ось которого не вращалась бы. Если $f'(\Omega) < 0$ и по абсолютной величине больше r , то коэффициент при $\dot{\varphi}$ будет отрицателен. Мы получим уравнение аналогичное уравнению обычной системы с трением:

$$\ddot{\varphi} + 2\alpha\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (9)$$

но с той разницей, что коэффициент $\alpha = \frac{r - f'(\Omega)}{2I}$ будет отрицательный. Если функция $f'(\Omega)$ была бы постоянной, то уравнение (9) было бы линейным. Тогда решение дифференциального уравнения имело бы вид нарастающих по амплитуде колебаний

$$\varphi = \varphi_0 e^{\beta t} \cos \omega t, \quad (10)$$

где $\beta = -\alpha > 0$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. В действительности же функция $f'(\Omega)$ не является постоянной и уравнение (9) нелинейно. Потери в системе растут быстрее, чем вносимая источником энергия. Нарастание колебаний происходит до тех пор, пока не установятся, вследствие нелинейности характеристики трения, стационарные автоколебания, амплитуда которых не зависит от начальных условий.

Установка для исследования механической системы с «отрицательным трением» показана на рис. 2. Маятник Фроуда представляет собой стальную стержень длиной 0,5 м с грузом, свободно насаженный с помощью подшипника скольжения

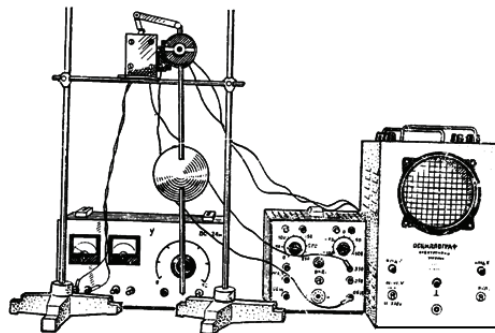


Рис. 2. Установка для исследования механической системы с «отрицательным трением»

на вал диаметром 30 мм. Груз массой 0,5 кг может перемещаться по стержню маятника и закрепляться на произвольном расстоянии от оси вращения при помощи стопорного винта. Вал подвеса маятника приводится во вращение электродвигателем МПР-3 через понижающий редуктор. Угловая скорость вращения вала регулируется путем изменения напряжения, подаваемого на электродвигатель от выпрямителя ВС-24. Для повышения наглядности эксперимента в приборе применена электрическая индикация угла поворота маятника при его колебаниях.

В качестве датчика углового смещения маятника от положения равновесия применен стандартный потенциометр с линейной характеристикой. Принцип действия датчика состоит в следующем. Колебательное движение от муфты маятника передается при помощи рычага и кривошипа к оси потенциометра. Датчик включается в симметричный электрический мост, на который подается регулируемое напряжение от выпрямителя ВУП-1. Напряжение, снимаемое с потенциометрического датчика, пропорционально отклонению маятника от положения равновесия. Для наблюдения временных характеристик колебаний маятника это напряжение подается непосредственно на пластины Y осциллографа с большим временем послесвечения экрана. На пластины X осциллографа подается напряжение медленной развертки.

Перед проведением опытов следует разобрать подшипник скольжения маятника и тщательно удалить следы смазки при помощи ваты, смоченной в спирте. После этого производят сборку подшипника маятника.

Последовательность проведения экспериментов.

1. Выводят маятник из положения равновесия и предоставляют ему возможность совершать колебания при неподвижном вале, на котором насажена муфта маятника. Вследствие сухого трения муфты маятника о неподвижный вал его колебания быстро затухают. При этом график затухающих колебаний маятника, наблюдаемый на экране осциллографа с большим временем послесвечения экрана, показан на рис. 3, *а*. В данном случае $\alpha = \frac{r}{2I}$.

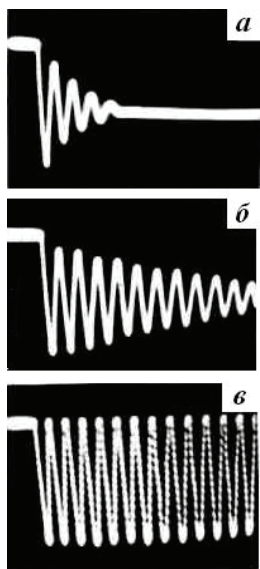


Рис. 3. Затухающие колебания

2. Включив двигатель, приводят вал, на котором подвешена муфта маятника, во вращательное движение с постоянной скоростью. Скорость вращения вала выбирают такой, чтобы время полного оборота вала было меньше периода колебаний маятника. Запустив маятник, снова наблюдают затухающие колебания (см. рис. 3, *б*). Однако время затухания маятника в данном случае явно больше, чем при неподвижном вале. В данном случае $f'(\Omega) < 0$, но $|f'(\Omega)| < r$, вследствие чего коэффициент α согласно формуле (7) имеет значение меньше, чем при неподвижном вале, когда $\alpha = \frac{r}{2I}$.

Следовательно, за счет энергии, поступающей от вращающегося вала, потери энергии маятника частично компенсируются. Объясняется это следующим образом. Линейная скорость v_0 точек поверхности вала постоянна относительно неподвижной системы отсчета. Муфта маятника совершает колебания вместе с ним, поэтому скорость v любой точки поверхности муфты маятника относительно той же системы отсчета изменяется с течением времени по тому же закону, что и мгновенная скорость

маятника: скорость муфты равна нулю при максимальном отклонении маятника от положения равновесия; скорость движения муфты максимальна при прохождении маятником положения равновесия. Так как муфта маятника совершает колебания вместе с ним, то в те моменты времени, когда муфта вращается навстречу вращающемуся валу (рис. 4, а), разность скоростей ($\vec{v}_0 - \vec{v}$) трущихся поверхностей вала и муфты имеет наибольшее значение; в те же моменты времени, когда муфта вращается в том же направлении, что и направление вращающегося вала (см. рис. 4, б), разность скоростей ($\vec{v}_0 - \vec{v}$) трущихся поверхностей имеет минимальное значение.

Следует заметить, что за один полупериод колебаний маятника разность скоростей ($\vec{v}_0 - \vec{v}$) достигает максимального значения, а за другой полупериод эта разность ($\vec{v}_0 - \vec{v}$) достигает минимального значения. В обоих случаях это происходит, когда маятник проходит положение равновесия. Как отмечено выше, сила сухого трения зависит от относительной скорости трущихся поверхностей вала и муфты или, в нашем случае, от разности скоростей ($\vec{v}_0 - \vec{v}$). Зависимость эта нелинейна, причем, чем меньше разность скоростей трущихся поверхностей, тем сила трения больше. При прохождении маятником положения равновесия, когда муфта маятника при его колебаниях вращается навстречу вращающемуся валу (см. рис. 4, а), сила трения будет минимальной; когда же муфта маятника при колебаниях вращается в том же направлении, что и направление вращающегося вала (см. рис. 4, б), сила трения между валом и муфтой достигает максимального значения. Так как скорость точек поверхности вала v_0 больше максимальной скорости v муфты маятника, сила трения, действующая на муфту со стороны вала, всегда направлена в одну сторону. Вектор силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ совпадает с вектором \vec{v}_0 .

Следовательно, сила трения изменяется по величине, но направление ее остается неизменным. Благодаря этому, когда муфта маятника вращается в направлении, противоположном направлению вращения вала (см. рис. 4, а), скорость муфты маятника оказывается направленной против силы трения, поэтому вращающийся вал тормозит его движение, но сила торможения при этом минимальна. Когда же муфта маятника вращается в том же направлении, что и вал (см. рис. 4, б), скорость муфты совпадает с направлением силы трения, но величина силы трения, действующей на муфту, больше, чем в первом случае. В силу этого сила сухого трения, действующая со стороны вращающегося вала на муфту маятника, подталкивает его, увеличивая его кинетическую энергию при прохождении положения равновесия. Однако убыль энергии за первую половину периода колебаний восполняется за вторую половину периода не полностью, так как сила сухого трения, подталкивающая маятник, не достигает своего максимально возможного значения.

3. Выбирают скорость вращения вала такой, чтобы он делал один полный оборот за время, равное периоду колебаний маятника. Запустив маятник, замечают, что он совершает незатухающие колебания (см. рис. 3, в). Таким образом, вращающийся вал полностью компенсирует потери энергии маятника при его трении. В данном случае величина $f'(\Omega) < 0$, а по абсолютной величине $|f'(\Omega)| \geq r$. Это приводит к

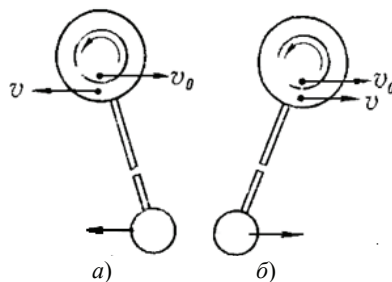


Рис. 4. Вращение муфты

тому, что коэффициент $\alpha \leq 0$, то есть он равен нулю или имеет отрицательное значение. Объясним возникновение автоколебаний подробно. За каждый период колебаний маятника, когда он проходит положение равновесия, а муфта его вращается в том же направлении, что и вал, скорости вала и муфты оказываются равными по величине и разность скоростей $(\bar{v}_0 - \bar{v})$ трущихся поверхностей вала и муфты равна нулю, то есть муфта очень короткое время покоится относительно вращающегося вала. Чтобы лучше видеть этот момент при работе автогенератора, на вращающемся валу делается белая полоска. Во время работы автогенератора отмечают те моменты времени, когда полоска покоится относительно стержня маятника. Таким образом, за каждый период колебаний маятника на короткое время между валом и муфтой возникает *сухое трение покоя*, сила F_{T_0} которого значительно больше, чем сила трения F_T при скольжении муфты о вал во все другие моменты времени рассматриваемого периода колебаний. Это приводит к тому, что если за первую половину периода колебаний, когда муфта вращается в направлении противоположном направлению вращающегося вала (см. рис. 4, а), и скорость муфты оказывается направленной против силы трения, она тормозит движение маятника. Но сила торможения при этом минимальна. За вторую половину периода, когда муфта вращается в том же направлении, что и вал (см. рис. 4, б), а разность их скоростей оказывается равной нулю, максимальная сила трения совпадает с направлением движения муфты и она подталкивает маятник, сообщая ему максимально возможную кинетическую энергию, которая полностью компенсирует потери энергии маятника за первый полупериод. Другими словами, со стороны вращающегося вала как источника энергии на муфту маятника за каждый период колебаний действует один кратковременный толчок в направлении его движения, что и позволяет поддерживать колебания незатухающими.

Следует отметить, что колебания маятника, работающего в автоколебательном режиме, вследствие воздействия на него толчков, не являются гармоническими. Это можно экспериментально доказать, исследуя фазовую диаграмму автоколебаний. Для ее наблюдения электрический сигнал с потенциометрического датчика смещения подается на пластины X осциллографа, а на пластины Y подается электрический сигнал, полученный дифференцированием сигнала с датчика смещения, то есть сигнал, пропорциональный мгновенной скорости [2]. Фазовая диаграмма установившихся автоколебаний показана на рис. 5. Электронный луч обходит полностью фазовую траекторию, двигаясь против часовой стрелки, за время, равное периоду колебаний. На фазовой диаграмме автоколебаний (см. рис. 5) хорошо заметен изгиб, который возникает за счет воздействия толчков со стороны вращающегося вала. Причем за каждый период колебаний на маятник воздействует один толчок в момент прохождения маятником положения равновесия, когда муфта маятника покоится относительно вращающегося вала.

Описанная установка позволяет показать, что частота автоколебаний определяется собственной частотой колебаний маятника. Действительно, изменяя, на-

пример, длину маятника и подбирая необходимую скорость вращения вала, получают автоколебания различной частоты. Если муфту подвеса маятника смазать машинным маслом, то колебания маятника Фруда при любых скоростях вращения вала являются затухающими. Автоколебания при жидком трении не возникают, так как в этом случае сила жидкого трения не зависит от относительной скорости трущихся поверхностей вала и муфты.

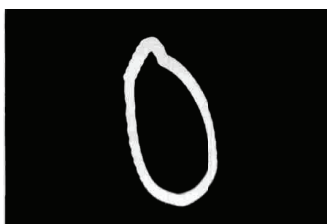


Рис. 5. Фазовая диаграмма

Список литературы

1. Андронов, А.В. Теория колебаний / А.В. Андронов, А.А. Витт, С.З. Хайкин. – М. : Наука, 1981. – 568 с.
 2. Молотков, Н.Я. Изучение колебаний на основе современного эксперимента / Н.Я. Молотков. – Киев : Рад. школа, 1988. – 160 с.
-

Research into Mechanical Auto-Oscillating System

N.Ya. Molotkov, O.V. Lomakina

Department of Theoretical Mechanics; TSTU; tolmat@nnn.tstu.ru

Key words and phrases: auto-oscillating system; electrical methods; frequency of oscillations; pendulum; energy.

Abstract: Based on the application of electrical methods for measuring nonelectrical values the emergence of mechanical oscillations studied on the example of Froude pendulum. The temporal characteristics of the oscillations and phase diagram of the emerging oscillations are registered.

Untersuchung des mechanischen autoschwingenden Systems

Zusammenfassung: Auf Grund der Benutzung der elektrischen Methoden der Messung der nichtelektrischen Größen wird die Erscheinung der mechanischen Autoschwingungen am Beispiel des Pendels von Froude untersucht. Es werden die zeitlichen Charakteristiken der Schwingungen und das Phasendiagramm der entstehenden Autoschwingungen registriert.

Etude du système mécanique autooscillant

Résumé: A la base de l'emploi des méthodes électriques de la mesure des valeurs non électriques est étudiée l'apparition des autooscillations mécaniques à l'exemple du pendule de Froude. Sont enregistrées les caractéristiques temporelles des oscillations ainsi que le diagramme de phase des autooscillations apparues.

Авторы: *Молотков Николай Яковлевич* – доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика»; *Ломакина Ольга Владимировна* – кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика», ГОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: *Червяков Виктор Михайлович* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теория машин, механизмов и детали машин», ГОУ ВПО «ТГТУ».