

## ОСОБЕННОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛИМЕРНОМ ПОКРЫТИИ ПРИ НАНЕСЕНИИ НА ТРУБУ

**В.Б. Ряснов, В.М. Шаповалов**

*Кафедра «Технологические машины и оборудование»,  
Волжский политехнический институт (филиал ГОУ ВПО «Волгоградский  
государственный технический университет»), г. Волжский;  
vitalant@mail.ru*

*Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым*

**Ключевые слова и фразы:** метод Фурье; полимерное покрытие; процесс охлаждения; температурные напряжения; температурное поле; температурный режим; термическое взаимодействие.

**Аннотация:** По результатам математического моделирования и теоретического анализа предложена методика инженерного расчета для определения температуры напряжений по толщине полимерного покрытия. Проанализированы изменения напряжений в полимерном покрытии в процессе охлаждения.

---

### Задача теплопроводности

Процесс охлаждения полимера на трубе сопровождается существенной усадкой поверхностных слоев, в то время как внутренние слои остаются в вязкотекучем состоянии. Усадка покрытия может привести к возникновению напряжений, превышающих предел прочности, и трещинообразованию на поверхности.

На рисунке 1 представлена схема процесса охлаждения трубы с полимерным покрытием. Начальная температура системы  $T_0$ . Температурное поле в слое полимера описывается функцией  $T_1 = T_1(t, y)$ , в стальной стенке трубы –  $T_2 = T_2(t, y)$ . Радиус поверхности металлической трубы  $R$ . Толщина покрытия  $\delta$ , стенки трубы –  $k\delta$ . Анализ ведем в системе Лагранжа, связанной с поверхностью трубы. Внутри трубы теплообмен отсутствует. Температура охлаждающей среды  $T_c$  постоянна. Начальный профиль температур однороден в стенке трубы и покрытии. Ширина и толщина покрытия при охлаждении не изменяются. Радиус трубы значительно больше толщины покрытия и стенки трубы, поэтому пренебрегаем при анализе теплопроводности их кривизной (задача одномерная, нестационарная). Тепловой поток радиальный. Продольный тепловой поток вдоль трубы не учитываем. Между полимерным покрытием и поверхностью трубы имеет место идеальный тепловой контакт. Поскольку труба непрерывно вращается вокруг собственной оси, условия охлаждения однородны в окружном направлении, то есть задача осесимметрична. Теплофизические свойства полимерного материала и стенки трубы постоянны. Тепловой эффект кристаллизации игнорируем. Поверхность покрытия охлаждается путем орошения водой из лотка в соответствии с законом Ньютона.

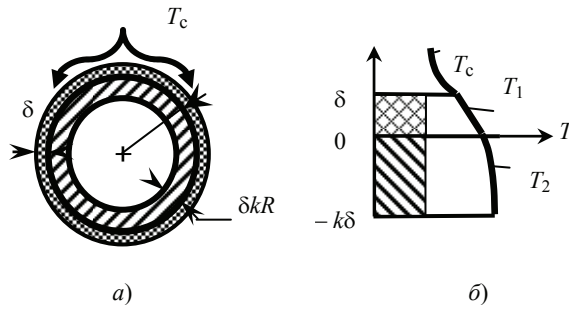


Рис. 1. Схема охлаждения трубы (а) и распределения температур в стенке трубы и покрытии (б)

Введем безразмерные переменные и параметры:

$$\{\theta_1, \theta_2\} = \frac{\{T_1, T_2\} - T_c}{T_0 - T_c}; \quad Y = \frac{y}{\delta}; \quad A = \frac{a_1}{a_2}; \quad \Lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}; \quad \text{Bi} = \frac{\alpha \delta}{\lambda_1}; \quad \text{Fo} = \frac{a_1 t}{\delta^2};$$

$$\{\bar{\sigma}_z, \bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\varphi\} = \frac{\{\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\varphi\}(1 - \mu)}{\beta E_0 (T_0 - T_c)}; \quad \Delta = \frac{\delta}{R}, \quad (1)$$

где  $a_1, a_2, \lambda_1, \lambda_2$  – коэффициенты температуропроводности и теплопроводности материала покрытия и материала трубы соответственно;  $T_1, T_2, \theta_1, \theta_2$  – размерные и безразмерные температуры покрытия и стенки трубы соответственно, К;  $T_c$  – температура охлаждающей среды, К;  $T_0$  – начальная температура системы, К;  $t$  – время, с;  $\Lambda, A$  – безразмерные параметры;  $y, Y$  – размерная и безразмерная поперечные координаты;  $\text{Bi}$  – число Био;  $\text{Fo}$  – число Фурье;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;  $E_0$  – коэффициент зависимости модуля упругости  $E$  от температуры,  $E = E_0 e(\Delta T)$ ;  $e(\Delta T)$  – безразмерная функция температуры;  $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\varphi, \bar{\sigma}_z, \bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\varphi$  – размерные и безразмерные компоненты напряжения, Па. Функция  $e(\Delta T)$  зависит от материала покрытия и определяется путем обработки экспериментальных данных.

С учетом принятых допущений и обозначений (1) краевая задача описывается системой уравнений теплопроводности, начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial Y^2}; \quad \text{Fo} > 0; \quad 0 < Y < 1;$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \text{Fo}} = \frac{1}{A} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial Y^2}; \quad \text{Fo} > 0; \quad -k < Y < 0; \quad (2)$$

$$\text{Fo} = 0: \quad \theta_1 = 1, \quad \theta_2 = 1; \quad (3)$$

$$\text{Fo} > 0: \quad Y = 1, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial Y} = -\text{Bi} \theta_1;$$

$$Y = -k; \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial Y} = 0; \quad (4)$$

$$Y = 0, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \Lambda \frac{\partial \theta_1}{\partial Y} = \frac{\partial \theta_2}{\partial Y}. \quad (5)$$

Решение задачи (2) – (5) получено методом Фурье в виде рядов [1]:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{2,n} S_n \exp(-\mu_n^2 Fo) \sin(\mu_n Y + \varphi_{1,n}); \\ \theta_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{2,n} S_n \exp(-\mu_n^2 Fo) \sin(\mu_n \sqrt{AY} + \varphi_{2,n}); \\ A_{2,n} &= \frac{\Lambda S_n [\cos \varphi_{1,n} - \cos(\mu_n + \varphi_{1,n})] - \sqrt{A} \cos \varphi_{2,n}}{\frac{\Lambda S_n^2}{4} (2\mu_n + \sin 2\varphi_{1,n} - \sin [2(\mu_n + \varphi_{1,n})]) + \frac{\sqrt{A}}{4} (2\mu_n \sqrt{Ak} - \sin 2\varphi_{2,n})}; \\ S_n &= \frac{\sin \varphi_{2,n}}{\sin \varphi_{1,n}}.\end{aligned}\quad (6)$$

Собственные числа задачи  $\mu_n$  и постоянные  $\varphi_{1,n}$  и  $\varphi_{2,n}$  находятся из уравнений:

$$\begin{aligned}\Lambda \operatorname{tg} \varphi_{2,n} &= \sqrt{A} \operatorname{tg} \varphi_{1,n}; \quad \cos(-\mu_n k \sqrt{A} + \varphi_{2,n}) = 0; \\ \mu_n &= -\operatorname{Bitg}(\mu_n + \varphi_{1,n}).\end{aligned}\quad (7)$$

### Температурные напряжения

Температурный коэффициент линейного расширения материала стенки трубы  $\beta = 1,1 \cdot 10^{-5}$  значительно меньше температурного коэффициента линейного расширения материала покрытия  $\beta = 2 \cdot 10^{-4}$ , модуль упругости покрытия  $E = 0,1$  ГПа значительно меньше модуля упругости материала стенки трубы  $E = 200$  ГПа, толщина покрытия  $\sim 3$  мм меньше толщины стенки трубы  $\sim 14$  мм. С учетом перечисленных обстоятельств, температурную деформацию металлической стенки трубы не учитываем. Возникающие в стальной стенке напряжения от давления покрытия весьма незначительны и не вызывают ее существенной радиальной деформации.

Для полимеров характерно сложное реологическое поведение, особенно с изменением температуры. В процессе охлаждения поверхностные слои покрытия находятся в состоянии, близком к упругому (модель Гука). Слои покрытия, близкие к поверхности трубы, находятся в расплавленном состоянии, которое можно охарактеризовать в первом приближении как вязкую жидкость. Используем двухслойную модель механического поведения покрытия. Рассматриваем нижние слои покрытия, находящиеся в расплавленном состоянии, как упругий материал с модулем упругости, близким к нулю. Верхние остывшие слои покрытия, вплоть до границы кристаллизации, как гуковское тело с модулем упругости, изменяющимся с температурой. Поперечные сечения остаются плоскими и осевая деформация отсутствует.

Уравнение равновесия для элемента покрытия имеет вид [2]

$$\sigma_r dr + r d\sigma_r - \sigma_\varphi dr = 0, \quad (8)$$

где  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  – радиальные и окружные напряжения в стенке, Па;  $r$  – радиус, м. Третье главное напряжение  $\sigma_z$  действует на площадках, совпадающих с поперечным сечением.

Воспользуемся обобщенным законом Гука, добавив к деформациям, обусловленным напряжениями, температурные расширения. Тогда для основных деформаций получим следующие формулы:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_r - \mu\sigma_\varphi) + \beta\Delta T; \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_z - \mu\sigma_\varphi) + \beta\Delta T; \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \mu\sigma_z - \mu\sigma_r) + \beta\Delta T,\end{aligned}\quad (9)$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $\Delta T = T_0 - T = (T_0 - T_c)(1 - \theta)$  – понижение температуры. Для температурного коэффициента линейного расширения полагаем  $\beta = \text{const}$ .

Продольной усадкой трубы и смещениями покрытия относительно стенки трубы пренебрегаем. При этом продольные деформации в покрытии отсутствуют  $\varepsilon_z = 0$ .

На внешней (свободной) поверхности покрытия отсутствует нормальное давление, поэтому можем записать условие

$$r = R + \delta, \quad \sigma_r = 0. \quad (10)$$

Отсутствуют радиальные деформации покрытия на поверхности металлической трубы

$$r = R, \quad \varepsilon_r = 0. \quad (11)$$

В безразмерной форме решение задачи (8) – (11) имеет вид:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_z &= -e(\theta_1)\mu \left[ \frac{1}{\mu}(\theta_1 - 1) + \frac{2(\theta_{1*} - 1)(1 + 2\Delta^2 + 2\mu)}{(1 - 2\mu)(2\Delta + \Delta^2 + 2\mu)} + \frac{2\Delta}{(2\Delta + \Delta^2 + 2\mu)} I(1, Fo) \right]; \\ \bar{\sigma}_r &= -\frac{e(\theta_1)}{(1 + \Delta Y)^2} \left[ -I(Y, Fo) - \frac{(\theta_{1*} - 1)(1 + \Delta Y)^2}{(1 - 2\mu)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(1 + \Delta Y)^2 - 1 + 2\mu]}{(2\Delta + \Delta^2 + 2\mu)} \left[ \frac{(\theta_{1*} - 1)}{(1 - 2\mu)} + \frac{1}{(1 + \Delta)^2} I(1, Fo) \right] \right]; \\ \bar{\sigma}_\varphi &= -\frac{e(\theta_1)}{(1 + \Delta Y)^2} \left[ I(Y, Fo) - \theta_1 + 1 + \frac{(\theta_{1*} - 1)(1 + \Delta Y)^2(2\Delta - 1 - 2\mu) + (1 - 2\mu)(1 + \Delta)^2}{(1 - 2\mu)(2\Delta + \Delta^2 + 2\mu)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta[(1 + \Delta Y)^2 + 1 - 2\mu]}{2\Delta + \Delta^2 + 2\mu} I(1, Fo) \right],\end{aligned}\quad (12)$$

где  $\theta_{1*} = \theta_1(Y = 0, Fo)$ ,  $I(Y, Fo)$  – интеграл вида

$$I(Y, Fo) = \sum_{n=0}^N A_{2,n} S_n e^{-\mu_n^2 Fo} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{\mu_n} [\cos \varphi_{1,n} - \cos(\mu_n Y + \varphi_{1,n})] + \frac{\Delta}{\mu_n^2} [\sin(\mu_n Y + \varphi_{1,n}) - \sin \varphi_{1,n} - \mu_n Y \cos(\mu_n Y + \varphi_{1,n})] \right] \times$$

$$\times \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{N+1}\right)}{\left(\frac{\pi n}{N+1}\right)} - Y - \Delta \frac{Y^2}{2},$$

который получен с учетом первого выражения в (6) и  $\sigma$ -множителя Ланцоша [3].

### Анализ модели

Если в начале процесса охлаждения напряжения в покрытии отсутствуют ( $\bar{\sigma}_z = \bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_\varphi = 0$ ), то по мере охлаждения напряжения возрастают, достигая наибольшего значения в конце охлаждения ( $Fo \rightarrow \infty$ ).

*Предельные свойства решения.* При бесконечной продолжительности охлаждения ( $Fo \rightarrow \infty$ ) в выражениях (12) необходимо положить:  $I(Y, \infty) = -Y - 0,5\Delta Y^2$ ,  $\theta_1 = \theta_{1*} = 0$ . Осевые напряжения однородны по толщине покрытия. При этом на поверхности покрытия  $Y = 1$  безразмерные напряжения отвечают значениям  $I(1, \infty) = -1 - 0,5\Delta$ ,  $\theta_1 = \theta_{1*} = 0$ . В слоях покрытия, непосредственно прилегающих к поверхности металлической трубы  $Y = 0$ , имеем:  $I(0, \infty) = 0$ ,  $\theta_1 = \theta_{1*} = 0$ .

Выражения (12) можно использовать для инженерных оценок величины внутренних температурных напряжений в покрытии и в качестве теста при отладке компьютерных программ.

В предварительных расчетах проигнорируем температурную зависимость модуля упругости полимерного материала покрытия от температуры, то есть положим  $e(\theta_1) = 1$ . Действительно, форма для безразмерных напряжений (12) позволяет исключить из расчетных выражений для напряжений (1) параметр  $e(\theta_1)$ , путем его переноса из правой части в левую.

Численный анализ выполнен для случая охлаждения полимерного покрытия на поверхности стальной трубы. Пользуясь литературными источниками, найдем пределы варьирования параметров процесса.

Теплофизические характеристики для материала стальной стенки трубы и покрытия [4–7]: сталь Ст20:  $\lambda_2 = 50$  Вт/(м·К),  $\rho_2 = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $C_2 = 500$  Дж/(кг·К),  $a_2 = 1,28 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с; ПЭНД:  $a_1 = (0,1 \dots 0,7) \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $\lambda_1 = 0,24 \dots 0,55$  Вт/(м·К),  $A = 0,0112$ ,  $\Lambda = 0,00722$ ;  $\alpha = 2148$  Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $Bi = 19,82$ ;  $k = 4,77$ . Механические свойства: для стальной трубы:  $E = 2 - 2,1 \cdot 10^{11}$  Па;  $\mu = 0,24 - 0,28$ ;  $\beta = 1,3 \cdot 10^{-7}$  К<sup>-1</sup>, ПЭНД:  $\beta = 1,7 - 2 \cdot 10^{-4}$  К<sup>-1</sup>;  $\mu = 0,3 - 0,35$ ;  $E = 0,1$  ГПа. Полагаем параметр  $\beta$  постоянным, не зависящим от температуры. Принимаем температуру покрытия равной температуре трубы  $T_0 = 200$  °С. Температура охлаждающей воды не более 30 °С. Труба 168×14,3 мм. Толщина покрытия  $\delta = 3$  мм, параметр  $k = 4,77$ , соответственно,  $\Delta = \delta/R = 3/88 = 0,0341$ .

При расчете учитывались первые 15 членов ряда. Результаты расчета представлены на рис. 2. Видно, что распределение напряжений близко к линейной зависимости. Причем окружные напряжения у стенки трубы наибольшие (положительные, растягивающие). Радиальные напряжения отрицательны (сжимающие); наибольшее значение принимают у стенки трубы. Осевые напряжения – растягивающие и однородны по сечению покрытия.

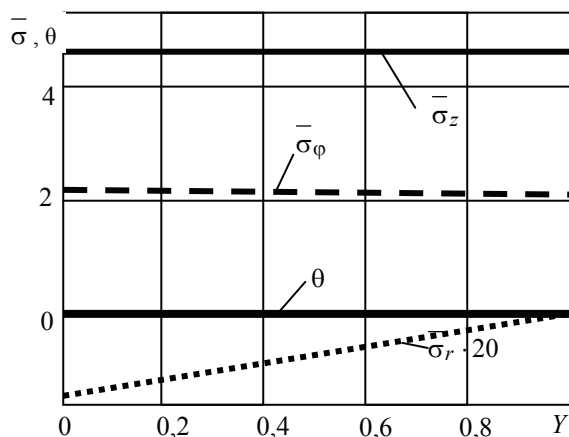


Рис. 2. Распределение главных безразмерных напряжений и температуры в покрытии при полном охлаждении системы  $Fo \rightarrow \infty$

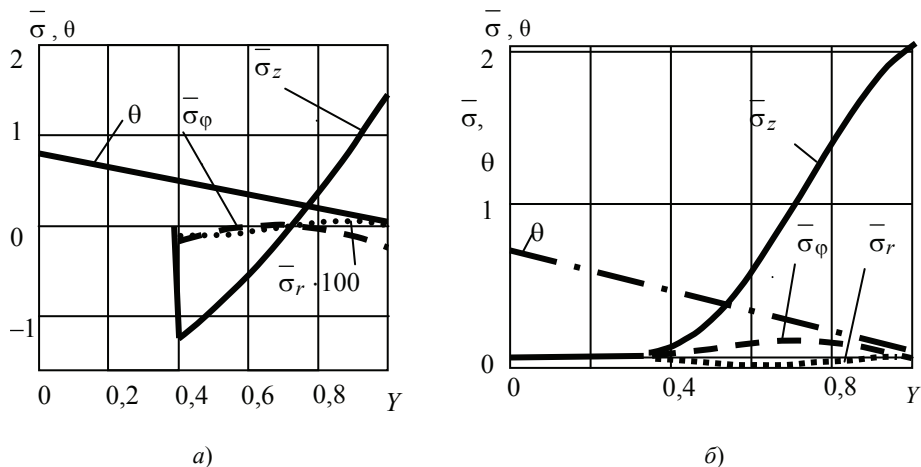
Рассмотрим случай температурозависимого модуля упругости покрытия. Экспериментальных данных о температурной зависимости модуля упругости в литературе обнаружить не удалось, поэтому примем, что модуль упругости в интервале температур  $T_c$  и температуры плавления изменяется по параболической зависимости. Выше температуры плавления модуль упругости принимает нулевое значение. В свете сказанного принимаем:  $e = 1 - 4\theta_1^2$  на интервале температур  $0 < \theta_1 < 0,5$  и  $e = 0$  при  $\theta_1 \geq 0,5$ . Начальная температура покрытия  $T_0 = 200$  °С. Температура охлаждающей жидкости  $T_c = 20$  °С. Температура плавления равна температуре затвердевания и составляет  $T_3 = 110$  °С. Это соотношение введем в программу расчета напряжений.

На рис. 3, а представлена расчетная зависимость главных напряжений и безразмерной температуры по толщине покрытия для момента безразмерного времени  $Fo = 2$ . Из рисунка видно, что глубина кристаллизации, отвечающая температуре  $\theta = 0,5$ , составляет  $Y \approx 0,4$ . Для наглядности радиальные напряжения увеличены в 100 раз. Главные напряжения знакопеременны в пределах зоны кристаллизации. На цилиндрической поверхности в закристаллизовавшейся зоне, отвечающей  $Y \approx 0,73$ , главные напряжения принимают нулевые значения. Продольные (осевые) и тангенциальные напряжения описываются почти идентичными, но зеркально перевернутыми, кривыми. На границе кристаллизации напряжения изменяются скачкообразно. Это обусловлено изломом принятой функции  $e(\theta)$ . Анализ показал, что в процессе охлаждения в пределах зоны кристаллизации имеет место весьма сложная перестройка эпюр главных напряжений, существенно изменяется характер их распределения.

Было предложено использовать для описания функции изменения модуля упругости с температурой косинусоидальную зависимость, которая не имеет излома в точке застывания

$$e(\theta_1) = \begin{cases} 0,5[1 + \cos(2\pi\theta_1)] & \text{при } 0 \leq \theta_1 < 0,5; \\ 0 & \text{при } \theta_1 \geq 0,5. \end{cases}$$

При этом расчетные графики главных напряжений не имеют разрыва на линии застывания. Сопоставление рис. 3, а с рис. 3, б показывает, что главные напряжения значительно снижаются в окрестности точки застывания полимера. В целом характер изменения напряжений во времени (переходный процесс) остается достаточно сложным.



**Рис. 3. Распределение температурных напряжений и безразмерной температуры по толщине покрытия с учетом**  
**а – температурной зависимости модуля упругости при  $Fo = 2$ ;**  
**б – косинусообразной температурной зависимости модуля упругости при  $Fo = 3$**

Результаты математического моделирования и теоретического анализа позволили предложить методику инженерного расчета для определения температурных напряжений по толщине полимерного покрытия. Данная методика может использоваться для прогнозирования трещинообразования в полимерном покрытии.

#### Список литературы

1. Шаповалов, В.М. Механика элонгационного течения полимеров / В.М. Шаповалов. – М. : Физматлит, 2007. – 176 с.
2. Зозуля, В.В. Механика материалов / В.В. Зозуля, А.В. Мартыненко, А.Н. Лукин. – Харьков : Изд-во Нац. ун-та внутр. дел, 2001. – 404 с.
3. Арфкен, Г. Математические методы в физике / Г. Арфкен. – М. : Атомиздат, 1970. – 712 с.
4. Тепло- и массообмен. Теплотехнический эксперимент : справочник / под общ. ред. В.А. Григорьева, В.М. Зорина. – М. : Энергоиздат, 1982. – 512 с.
5. Павлов, К.Ф. Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии / К.Ф. Павлов, П.Г. Романков, А.А. Носков. – Л. : Химия, 1987. – 576 с.
6. Справочник химика. – М. : Химия, 1968. – Т. 5. – 976 с.
7. Общетехнический справочник / Е.А. Скороходов [и др.] ; под общ. ред. Е.А. Скороходова. – М. : Машиностроение, 1990. – 496 с.

### Peculiarities of Changes in Temperature Stresses of Polymer Coatings when Applied on the Tube

V.B. Ryasnov, V.M. Shapovalov

Department "Technological Machinery and Equipment", Volga Polytechnic Institute (Affiliate), Volgograd State Technical University, Volzhskiy; vitalant@mail.ru

**Key words and phrases:** cooling process; Fourier method; polymer coating; temperature field; temperature stresses; thermal interaction; temperature mode.

**Abstract:** The cooling process of the polymer on the tube is accompanied by a substantial shrinkage of the surface layers, while the inner layers remain in the viscous-fluid state. Shrinkage of the coating can cause stress, exceeding the tensile strength, and cracking on the surface. The paper analyzes the change of stresses in the polymer coating during the cooling process.

---

### **Besonderheiten der Veränderung der Temperaturspannungen in der Polymerdeckung bei dem Auftragen auf das Rohr**

**Zusammenfassung:** Das Prozess der Kühlung des Polymers auf dem Rohr wird von der wesentlichen Schwindung der Oberschichten begleitet, während die Innenschichten bleiben im zähflüssigen Zustand. Die Schwindung der Deckung kann zur Entstehung der Spannungen, die die Haltbarkeitsgrenze übersteigen, führen. In der Arbeit wird die Veränderung der Spannungen in der Polymerdeckung im Prozess der Kühlung analysiert.

---

### **Particularités du changement des tensions de la température dans un revêtement polymère lors de la mise sur une tube**

**Résumé:** Le processus du refroidissement du polymère sur une tube est accompagné de la contraction des couches superficielles tandis que les couches intérieures demeurent dans un état visqueux et malléable. La contraction du revêtement peut emmener à l'apparition des tensions dépassant la limite de la résistance et à la formation des fissures sur la surface. Dans le présent article est analysé le changement des tensions dans un revêtement polymère lors du refroidissement.

---

**Авторы:** *Ряснов Виталий Борисович* – аспирант кафедры «Технологические машины и оборудование»; *Шаповалов Владимир Михайлович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Технологические машины и оборудование», Волжский политехнический институт (филиал ГОУ ВПО «Волгоградский государственный технический университет»), г. Волжский.

**Рецензент:** *Голованчиков Александр Борисович* – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Процессы и аппараты химических производств», ГОУ ВПО «Волгоградский государственный технический университет», г. Волгоград.

---