УДК 517. 16

# ОБ ОДНОМ УТОЧНЕНИИ НЕРАВЕНСТВА КИ ФАНА

**Л.В. Панкратова**

*Кафедра математического анализа и методики обучения математике,*
*ГОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров;*
*pankratovalarisa19@rambler.ru*

*Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым*

**Ключевые слова и фразы:** неравенство Ки Фана; среднее арифметическое; среднее гармоническое; среднее геометрическое; экстремум функции нескольких переменных.

**Аннотация:** Рассмотрено одно уточнение известного в тематике средних величин неравенства Ки Фана. Доказательство опирается на теоремы дифференциального исчисления функций нескольких переменных.

---

**Введение.** В теории среднего степенного хорошо известно неравенство

$$H_n \le G_n \le A_n, \tag{1}$$

связывающее средние гармоническое $H_n = \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i}}$, геометрическое $G_n = \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}$ и арифметическое $A_n = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n}$ положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \ge 2)$. Если $a_1, a_2, ..., a_n$ взять из промежутка $\left(0; \dfrac{1}{2}\right]$, то можно ввести аналогичные средние $H'_n$, $G'_n$ и $A'_n$ чисел $1 - a_1, 1 - a_2, ..., 1 - a_n$. В тематике средних часто рассматривается неравенство

$$\frac{H_n}{H'_n} \le \frac{G_n}{G'_n} \le \frac{A_n}{A'_n}, \tag{2}$$

правое в котором есть известное неравенство Ки Фана [1, с. 15], а левое принадлежит W.-L. Wang и P.-F. Wang [6]. Среди уточнений (1) известно опубликованное в [5] В. Серпинским неравенство

$$A_n H_n^{n-1} \le G_n^n \le A_n^{n-1} H_n. \tag{3}$$

При анализе (1) – (3) возникает вопрос о справедливости неравенства

$$\frac{A_n H_n^{n-1}}{A'_n (H'_n)^{n-1}} \le \left(\frac{G_n}{G'_n}\right)^n \le \frac{A_n^{n-1} H_n}{(A'_n)^{n-1} H'_n}, \tag{4}$$

структура которого «унаследована» от (2) и (3). Альцер Х. с помощью алгебраических преобразований и свойств числовых неравенств доказывает правое неравенство в (4), являющееся уточнением неравенства Ки Фана [4]. Мы рассмотрим другой подход к доказательству упомянутого соотношения.

**Вспомогательные утверждения**.

**Предложение 1** [2, с. 225]. *Пусть $a$ и $b$ $(a < b)$ – положительные числа, не превосходящие $\frac{1}{2}$. Тогда для любых положительных чисел $q_1, q_2$ справедливо неравенство* $\left(\dfrac{a}{1-a}\right)^{q_1}\left(\dfrac{b}{1-b}\right)^{q_2} < \left(\dfrac{q_1a+q_2b}{q_1(1-a)+q_2(1-b)}\right)^{q_1+q_2}$.

Доказательство предложения 1 можно найти в [2, с. 226].

**Предложение 2**. *Последовательность* $\left\{\left(1+\dfrac{m}{n}\right)^n\right\}$ $(m \in \boldsymbol{N})$, $n \ge 2$, *строго возрастает и* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{m}{n}\right)^n = \mathrm{e}^m$.

Доказательство. Монотонность последовательности можно показать, например, по схеме в [3, с. 89]. Также нетрудно видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{m}{n}\right)^n = \mathrm{e}^m$.

Сформулируем основной результат.

**Теорема.** *Справедливо неравенство*

$$\left(\frac{G_n}{G_n'}\right)^n \le \frac{A_n^{n-1}H_n}{(A_n')^{n-1}H_n'}, \tag{4'}$$

*причем, если $n > 2$, то равенство в нем возможно лишь при условии $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, если же $n = 2$, то равенство достигается при любом наборе $a_1, a_2$.*

Доказательство. Пусть $n > 2$ (случай $n = 2$ тривиален). Тогда (4') равносильно неравенству

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}(1-a_i)}\right)^{n-1} \ge \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n} a_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}(1-a_i)}. \tag{5}$$

Будем доказывать (5), опираясь на вторую теорему Вейерштрасса о непрерывной на компактном множестве функции нескольких переменных и теорему о необходимых условиях экстремума функции нескольких переменных. Очевидно, (5) обращается в равенство, если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Мы утверждаем, что в противном случае неравенство в (5) будет строгим. Рассмотрим функцию $f : \left[0; \frac{1}{2}\right]^n \to \boldsymbol{R}$, положив $f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{n-1}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}(1-x_i)\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)\right)^{n-1}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n} x_i\right)$. Так как $f$ непрерывна на множестве $\left[0;\frac{1}{2}\right]^n$, то по второй теореме Вейерштрасса в нем найдется точка $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$, для которой $\inf\limits_{[01/2]^n} f = f(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n)$. Покажем, что $\tilde{x}_1=...=\tilde{x}_n$.

Предположим противное: среди $\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n$ есть различные. Пусть сначала $\tilde{x}$ – внутренняя точка множества $\left[0;\frac{1}{2}\right]^n$. Тогда, в силу необходимого условия экстремума для функций нескольких переменных, можем заключить: $\left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{(x_1,...,x_n)=(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n)} = 0$, где $k=1,...,n$. Анализируя выражения для частных производных, получим

$$(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\right)^{n-2}\left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(1-\tilde{x}_i)\right)+(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}(1-\tilde{x}_i)\right)^{n-2}\left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\tilde{x}_i\right)=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\right)^{n-1}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j\\ i\neq k}}^{n}(1-\tilde{x}_i)\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}(1-\tilde{x}_i)\right)^{n-1}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j\\ i\neq k}}^{n}\tilde{x}_i\right),\quad k=1,\ldots,n. \tag{6}$$

Левая часть (6) не зависит от $k$, поэтому можем записать систему из $n$ равенств

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\right)^{n-1}\left(\sum_{j=2}^{n}\prod_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{n}(1-\tilde{x}_i)\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}(1-\tilde{x}_i)\right)^{n-1}\left(\sum_{j=2}^{n}\prod_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{n}\tilde{x}_i\right)=...$$

$$...=\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\right)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1}(1-\tilde{x}_i)\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}(1-\tilde{x}_i)\right)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1}\tilde{x}_i\right). \tag{7}$$

Из равенства, например, первой и последней сумм в (7) получим уравнение

$$(\tilde{x}_1-\tilde{x}_n)\left(\left(\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(1-\tilde{x}_i)\right)}\right)^{n-1}-\frac{\left(\prod\limits_{i=2}^{n-1}\tilde{x}_i\right)\sum\limits_{i=2}^{n-1}\frac{1}{\tilde{x}_i}}{\left(\prod\limits_{i=2}^{n-1}(1-\tilde{x}_i)\right)\sum\limits_{i=2}^{n-1}\frac{1}{1-\tilde{x}_i}}\right)=0. \tag{8}$$

Если $n=3$, то, очевидно, $\tilde{x}_1=\tilde{x}_3$. Соотношения, подобные (8), верны и для других компонент точки $\tilde{x}$. Значит, $\tilde{x}_1=\tilde{x}_2=\tilde{x}_3$. Получаем противоречие, поскольку среди $\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n$ должны быть различные. Если же $n > 3$, запишем равенство

$$(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_n)\left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^{n}(1-\tilde{x}_i)}\right)^{n-1} - \frac{\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n-1}\tilde{x}_i\right)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n-1}\frac{1}{\tilde{x}_i}}{\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n-1}(1-\tilde{x}_i)\right)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n-1}\frac{1}{1-\tilde{x}_i}}\right) = 0, \tag{9}$$

следующее из равенства второй и последней сумм в (7). Предположив в (8), что $\tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_n$, преобразуем (9):

$$(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_n)(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1)\frac{\prod_{i=3}^{n-1}\tilde{x}_i}{\prod_{i=3}^{n-1}(1-\tilde{x}_i)}\frac{SS' + S + S'}{(1+(1-\tilde{x}_1)S')(1+(1-\tilde{x}_2)S')} = 0,$$

где $S = \sum_{i=3}^{n-1}\frac{1}{\tilde{x}_i}$, $S' = \sum_{i=3}^{n-1}\frac{1}{1-\tilde{x}_i}$. Тогда $\tilde{x}_2 = \tilde{x}_n$ или $\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1$. Продолжая рассуждения, приходим к выводу, что все компоненты $\tilde{x}$ можем разделить (без ограничения общности) на два класса: $\tilde{x}_1 = ... = \tilde{x}_k$ , $\tilde{x}_{k+1} = ... = \tilde{x}_n$ , $(\tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_n,\ 1 \le k \le n)$. Для $f(\tilde{x})$ получаем

$$f(\tilde{x}) = \left(\frac{k\tilde{x}_1 + (n-k)\tilde{x}_n}{k(1-\tilde{x}_1) + (n-k)(1-\tilde{x}_n)}\right)^{n-1} -$$

$$-\left(\frac{\tilde{x}_1}{1-\tilde{x}_1}\right)^{k-1}\left(\frac{\tilde{x}_n}{1-\tilde{x}_n}\right)^{n-k-1}\left(\frac{k\tilde{x}_n + (n-k)\tilde{x}_1}{k(1-\tilde{x}_n) + (n-k)(1-\tilde{x}_1)}\right).$$

Из неравенств

$$\left(\frac{\tilde{x}_1}{1-\tilde{x}_1}\right)^{k-1}\left(\frac{\frac{k}{n}\tilde{x}_n + \frac{n-k}{n}\tilde{x}_1}{\frac{k}{n}(1-\tilde{x}_n) + \frac{n-k}{n}(1-\tilde{x}_1)}\right) < \left(\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\tilde{x}_1 + \frac{1}{n}\tilde{x}_n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)(1-\tilde{x}_1) + \frac{1}{n}\tilde{x}_n}\right)^{k}$$

и

$$\left(\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\tilde{x}_1 + \frac{1}{n}\tilde{x}_n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)(1-\tilde{x}_1) + \frac{1}{n}\tilde{x}_n}\right)^{k}\left(\frac{\tilde{x}_n}{1-\tilde{x}_n}\right)^{n-k-1} < \left(\frac{k\tilde{x}_1 + (n-k)\tilde{x}_n}{k(1-\tilde{x}_1) + (n-k)(1-\tilde{x}_n)}\right)^{n-1},$$

справедливых в силу предложения 1 для $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_n$ (и для $\tilde{x}_1 > \tilde{x}_n$, если их переименовать), заключаем, что $f(\tilde{x}) > 0$. Противоречие: $\inf\limits_{[01/2]^n} f(x) > 0$, но функция $f$ может обращаться в нуль.

Итак, $(\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_n)$ может быть лишь граничной точкой множества $\left[0;\frac{1}{2}\right]^n$. Здесь возможны такие варианты: 1) среди ее компонент есть равные нулю; 2) ни одна из компонент точки $\widetilde{x}$ в нуль не обращается. Рассмотрим первый из них.

Пусть $n-k$ $(1 \le k \le n-1)$ компонент точки $\widetilde{x}$ равны нулю. Без ограничения общности, положим: $0 < \widetilde{x}_i \le \frac{1}{2}$, $i = 1, ..., k$; $\widetilde{x}_{k+1} = ... = \widetilde{x}_n = 0$. Рассмотрим функцию $g : \left[0;\frac{1}{2}\right]^k \to \boldsymbol{R}$, считая $g(x_1, ..., x_k) = f(x_1, ..., x_k, 0, ..., 0)$. Покажем, что в наших предположениях $g$ строго положительна. При $k < n-1$ это утверждение очевидно, если же $k = n-1$, оно равносильно неравенству

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i\right)^{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} x_i} > \frac{\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(1-x_i)\right)^{n-1}}{\left(\prod\limits_{i=1}^{n-1}(1-x_i)\right)\left(1+\frac{1}{1-x_1}+...+\frac{1}{1-x_{n-1}}\right)}. \tag{10}$$

С помощью соотношений $\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i\right)^{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} x_i} \ge \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}(1-x_i)\right)^{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(1-x_i)}$ (см. (2)) и $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1-x_i}}{n-1} \ge \frac{n-1}{\sum\limits_{i=1}^{n-1}(1-x_i)}$, доказательство (10) сводится к исследованию неравенства

$$1+(n-1)^2 M > (1+M)^{n-1}, \tag{11}$$

где $M = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n-1}(1-x_i)}$. Так как $x_i \in \left(0;\frac{1}{2}\right]$ $(i = 1, ..., n)$, то $M \in \left(\frac{1}{n-1};\frac{2}{n-1}\right]$, значит, $(1+M)^{n-1} \le \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}$. Верны оценки $1+(n-1)^2 M > 1+(n-1)^2\frac{1}{n-1}$ и $(1+M)^{n-1} < \mathrm{e}^2$ (в силу предложения 2). Тогда для $n > 7$ заключаем: $1+(n-1)^2 M > n > \mathrm{e}^2 > (1+M)^{n-1}$. Далее рассмотрим функцию

$$\widetilde{g}(M) = 1+(n-1)^2 M - (1+M)^{n-1}, \text{ где } n = 3, ..., 7.$$

Нетрудно проверить, что $\widetilde{g}(M)$ является неубывающей на всяком промежутке $\left(\frac{1}{n-1};\frac{2}{n-1}\right]$. Оценив ее значение в точке $M = \frac{1}{n-1}$ (здесь

$\widetilde{g}\left(\frac{1}{n-1}\right)=\lim\limits_{M\to\frac{1}{n-1}+}\widetilde{g}(M))$, убеждаемся, что $\widetilde{g}\left(\frac{1}{n-1}\right)=n-\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}>0$ в силу предложения 2. Неравенство (11) доказано. Функция $g(x_1,...,x_k)$ принимает положительные значения, а это противоречит тому, что $\inf\limits_{[01/2]^n} f = f(\widetilde{x})$. Итак, ни одна из компонент точки $\widetilde{x}$ не обращается в нуль, то есть для этой точки возможен лишь второй вышеописанный вариант.

Пусть теперь $k$ $(1\le k\le n-1)$ компонент точки $\widetilde{x}$ отличны от $\frac{1}{2}$, а $n-k$ равны $\frac{1}{2}$. Рассмотрим функцию $h:\left[0;\frac{1}{2}\right]^k\to\boldsymbol{R}$, полагая без ограничения общности $h(x_1,...,x_k)=f\left(x_1,...,x_k,\frac{1}{2},...,\frac{1}{2}\right)$, $0<x_i\le\frac{1}{2}$, $i=1,...,k$. Так как $(\widetilde{x}_1,...,\widetilde{x}_k)$ – внутренняя точка множества $\left[0;\frac{1}{2}\right]^k$, а по предположению $\inf\limits_{[01/2]^n} f = f(\widetilde{x}_1,...,\widetilde{x}_n)$, то $(\widetilde{x}_1,...,\widetilde{x}_k)$ будет точкой инфимума функции $h$ и $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(x_1,...,x_{kn})=(\widetilde{x}_1,...,\widetilde{x}_k)}=0.$ $(i=1,...,k)$. Рассуждая так же, как и ранее для $f$, убеждаемся, что $h(\widetilde{x}_1,...,\widetilde{x}_k)>0$. Вновь приходим к противоречию с предположением. Таким образом, условие $\inf\limits_{[01/2]^n} f = f(\widetilde{x}_1,...,\widetilde{x}_n)$ требует равенства $\widetilde{x}_1=...=\widetilde{x}_n$. Теорема доказана.

**Заключение.** Для полноты проведенного исследования отметим следующее.

*Замечание 1.* Неравенство $(A'_n)^{n-1}H'_n-A_n^{n-1}H_n\le(G'_n)^n-G_n^n$, называемое аддитивным аналогом неравенства (4'), неверно (например, для $a_1=a_2=\frac{1}{4},a_3=\frac{1}{2}$).

*Замечание 2.* Вопрос о справедливости неравенства $\frac{A_nH_n^{n-1}}{A'_n(H'_n)^{n-1}}\le\left(\frac{G_n}{G'_n}\right)^n$, являющегося уточнением неравенства W.-L. Wang и P.-F. Wang, пока открыт.

Надеемся, что изложенный метод исследования вызовет интерес читателей и будет способствовать развитию теории среднего степенного и ее приложений.

*Список литературы*


1. Беккенбах, Э. Неравенства / Э. Беккенбах, Р. Беллман. – М. : Мир, 1965. – 276 с.

2. Калинин, С.И. Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана : учеб. пособие по спецкурсу / С.И. Калинин. – Киров : Изд-во Вят. гос. гуманитар. ун-та, 2002. – 368 с.

3. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 1 / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 2003. – 680 с.

4. Alzer, H. Verschärfung einer Ungleichung von Ky Fan / H. Alzer // Aequationes Mathematicae. – 1988. – № 36. – S. 246–250.

5. Sierpinski, W. Sur une inegalité pour la moyenne arithmétique, géométrique et harmonique / W. Sierpinski // Warszawa Sitzungsber. – 1909. – № 2. – С. 354–357.
6. Wang, W.L. A Class of Inequalities for the Symmetric Functions (Chinese) / W.L. Wang, P. F. Wang // Acta Math. Sinica. – 1984. – V. 27. – P. 485–497.

---

## On Clarification of Ky Fan Inequality

**L.V. Pankratova**

*Department "Mathematical Analysis and Methodology of Teaching Mathematics",*
*Vyatka State University of Humanities, Kirov;*
*pankratovalarisa19@rambler.ru*

**Key words and phrases:** arithmetic mean; extremum of the function of several variables; geometric mean; harmonic mean; Ky Fan inequality.

**Abstract:** The paper is devoted to the consideration of clarification of Ky Fan inequality, which is well known in the theory of averages. The proof is based on theorems of differential calculus of functions of several variables.

---

## Über einer Berichtigung der Ungleichung von Ky Fan

**Zusammenfassung:** Es wird eine Berichtigung der in der Thematik der Mittelgrößen bekannten Ungleichung von Ky Fan betrachtet. Die Beweisführung basiert auf den Theoremen der Differentialberechnung der Funktionen der einigen Variablen.

---

## Sur une précision de l'inégalité de Ky Fan

**Résumé:** Est examinée une précision de l'inégalité de Ky Fan connue parmis les sujets des valeurs moyennes. La preuve est fondée sur les théorèmes du calcul différentiel des fonctions de plusieures variables.

---

**Автор:** ***Панкратова Лариса Валерьевна*** **–** старший преподаватель кафедры математического анализа и методики обучения математике, ГОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров.

**Рецензент:** ***Калинин Сергей Иванович*** – доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа и методики обучения математике, ГОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров.

---