УДК. 29.03.77

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В СИСТЕМЕ ДВУХ ТЕЛ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ТЕПЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

И.В. Рогов, Н.Ф. Майникова, О.Н. Попов, С.В. Молодов

Кафедра «Гидравлика и теплотехника», ГОУ ВПО «ТГТУ»;
teplotehnika@nnn.tstu.ru

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: гармоническое тепловое воздействие; математическая модель; неразрушающий контроль; теплофизические свойства.

Аннотация: Представлена математическая модель теплопереноса в системе двух тел. Сформулирована краевая задача теплопроводности в размерном и безразмерном представлениях. Получены распределения значений температуры по длине ограниченного и полуограниченного тел, а также значения температуры на границе контакта двух тел в любой момент времени.

Обозначения и аббревиатуры

a – температуропроводность, м^2/с;
h – толщина первого тела, м;
ε – тепловая активность, Дж/(м$^2 \cdot K \cdot$с^{0,5});
T_0 – начальная температура, °С;
λ – теплопроводность, Вт/(м·К);
x, χ – координата в размерном и безразмерном представлениях соответственно;
τ, Fo – время в размерном и безразмерном представлениях соответственно;
T, Θ – температура в размерном и безразмерном представлениях соответственно;
ω, ω' – круговая частота в размерном и безразмерном представлениях соответственно;
ТФС – теплофизические свойства;
НК – неразрушающий контроль.

Индексы

1 – первое тело;
2 – второе тело.

В случае НК материалов активными тепловыми методами искомые ТФС проявляются через температурный отклик исследуемого объекта на тепловое воздействие, которому подвергается объект в специально организованном эксперименте [1].

Важным преимуществом гармонического теплового воздействия (в сравнении с другими) является возможность управлять в широких пределах частотой колебаний источника, что существенно упрощает условия оптимизации режима опыта и позволяет снижать влияние теплообмена исследуемого объекта со средой на результаты измерений. В опытах удается непосредственно регистрировать фазовый сдвиг температурных волн [2].

Наиболее сложной и важной задачей при создании новых методов НК ТФС является разработка физико-математических моделей, адекватно описывающих тепловые процессы в объектах контроля.

В данной работе представлена математическая модель теплопереноса в системе двух тел при гармоническом тепловом воздействии.

Ограниченная пластина (первое тело) приведена в соприкосновение со вторым (полуограниченным) телом (рисунок). Боковые поверхности тел имеют тепловую изоляцию. В начальный момент времени на поверхность ограниченного тела с начальной температурой T_0 начинает действовать гармоническое тепловое воздействие $T(0,\tau) = T_m\cos(\omega\tau) + T_0$.

Необходимо найти распределения значений температуры T_1, T_2 по длине ограниченного и полуограниченного тел, а также значение температуры на границе двух тел T_2' в любой момент времени τ.

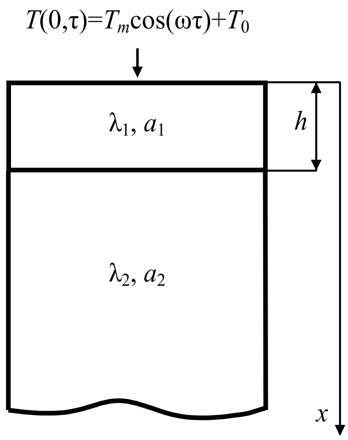
В математическом виде задача записывается следующим образом:

$$\frac{\partial T_1(x,\tau)}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial T_1^2(x,\tau)}{\partial x^2} \quad (0 < x < h); \qquad (1)$$

$$\frac{\partial T_2(x,\tau)}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial T_2^2(x,\tau)}{\partial x^2} \quad (x > h); \qquad (2)$$

$$T_1(x,0) = T_2(x,0) = T_0; \qquad (3)$$

$$T_1(0,\tau) = T_m\cos(\omega\tau)+T_0; \qquad (4)$$



Система ограниченного и полуограниченного тел

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(h,\tau)}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2(h,\tau)}{\partial x}; \qquad (5)$$

$$T_1(h,\tau) = T_2(h,\tau); \qquad (6)$$

$$T_2(\infty,\tau) = 0. \qquad (7)$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathrm{Fo} = \frac{a_1\tau}{h^2};\ \Theta = \frac{(T - T_0)}{T_m};\ \chi = \frac{x}{h};\ \omega' = \frac{\omega h^2}{a_1};\ K_\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1};\ K_a = \frac{a_2}{a_1}. \qquad (8)$$

Задачу перепишем в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \Theta_1(\chi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial \Theta_1^2(\chi,\mathrm{Fo})}{\partial \chi^2} \quad (0 < \chi < 1); \qquad (9)$$

$$\frac{\partial \Theta_2(\chi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = K_a \frac{\partial \Theta_2^2(\chi,\mathrm{Fo})}{\partial \chi} \quad (\chi > 1); \qquad (10)$$

$$\Theta_1(\chi,0) = \Theta_2(\chi,0) = 0; \qquad (11)$$

$$\Theta_1(0,\mathrm{Fo}) = \cos(\omega'\,\mathrm{Fo}); \qquad (12)$$

$$-\frac{\partial \Theta_1(1,\mathrm{Fo})}{\partial \chi} = -K_\lambda \frac{\partial \Theta_2(1,\mathrm{Fo})}{\partial \chi}; \qquad (13)$$

$$\Theta_1(1,\mathrm{Fo}) = \Theta_2(1,\mathrm{Fo}); \qquad (14)$$

$$\Theta_2(\infty,\mathrm{Fo}) = 0. \qquad (15)$$

Решение задачи будем искать для квазистационарного состояния, в котором начальные условия перестают оказывать влияние на тепловой процесс. Перейдем к комплексным решениям:

$$\Theta_1(\chi,\mathrm{Fo}) = A_1(\chi)\exp(\omega'\mathrm{Fo}i); \qquad (16)$$

$$\Theta_2(\chi,\mathrm{Fo}) = A_2(\chi)\exp(\omega'\mathrm{Fo}i). \qquad (17)$$

Подставив выражения (16), (17) в (9) и (10) соответственно, получим:

$$\omega' i A_1(\chi)\exp(\omega'\mathrm{Fo}i) = \frac{\partial^2 A_1(\chi)}{\partial\chi^2}\exp(\omega'\mathrm{Fo}i); \quad (18)$$

$$\omega' i A_2(\chi)\exp(\omega'\mathrm{Fo}i) = K_a\,\frac{\partial^2 A_2(\chi)}{\partial\chi^2}\exp(\omega'\mathrm{Fo}i). \quad (19)$$

Сократив $\exp(\omega'\mathrm{Fo}i)$, получим:

$$\omega' i A_1(\chi) = \frac{\partial^2 A_1(\chi)}{\partial\chi^2}; \quad (20)$$

$$\frac{\omega' i}{K_a} A_2(\chi) = \frac{\partial^2 A_2(\chi)}{\partial\chi^2}. \quad (21)$$

Решения выражений (20) и (21) относительно $A_1(\chi)$ и $A_2(\chi)$:

$$A_1(\chi) = C_{11}\exp\left(\sqrt{\omega' i}\chi\right) + C_{12}\exp\left(-\sqrt{\omega' i}\chi\right); \quad (22)$$

$$A_2(\chi) = C_{21}\exp\left(\sqrt{\frac{\omega' i}{K_a}}\chi\right) + C_{22}\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega' i}{K_a}}\chi\right), \quad (23)$$

где C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22} – постоянные.

Из условия (15) следует, что $C_{21} = 0$. Формула (23) примет вид

$$A_2(\chi) = C_{22}\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega' i}{K_a}}\chi\right). \quad (24)$$

Постоянные C_{11}, C_{12}, C_{22} найдем из условий (12) – (14), которые с учетом перехода к комплексным переменным примут вид:

$$C_{11} + C_{12} = 1; \quad (25)$$

$$C_{11}\exp\left(\sqrt{\omega' i}\right) - C_{12}\exp\left(-\sqrt{\omega' i}\right) = -K_\lambda C_{22}\sqrt{\frac{1}{K_a}}\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega' i}{K_a}}\right); \quad (26)$$

$$C_{11}\exp\left(\sqrt{\omega' i}\right) + C_{12}\exp\left(-\sqrt{\omega' i}\right) = C_{22}\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega' i}{K_a}}\right). \quad (27)$$

Решив систему (25) – (27), получим

$$C_{11} = \frac{\exp\left(-\sqrt{\omega' i}\right)(1 - K_\varepsilon)}{\exp\left(\sqrt{\omega' i}\right)(1 + K_\varepsilon) + \exp\left(-\sqrt{\omega' i}\right)(1 - K_\varepsilon)}; \quad (28)$$

$$C_{12} = \frac{\exp\left(\sqrt{\omega' i}\right)(1 + K_\varepsilon)}{\exp\left(\sqrt{\omega' i}\right)(1 + K_\varepsilon) + \exp\left(-\sqrt{\omega' i}\right)(1 - K_\varepsilon)}; \quad (29)$$

$$C_{22} = \frac{2\exp\left(\sqrt{\frac{\omega' i}{K_a}}\right)}{\exp\left(\sqrt{\omega' i}\right)(1 + K_\varepsilon) + \exp\left(-\sqrt{\omega' i}\right)(1 - K_\varepsilon)}. \quad (30)$$

Подставив C_{11}, C_{12}, C_{22} в (22) и (24) получим:

$$A_1(\chi) = \frac{\exp\left(\sqrt{\omega' i}\,(\chi-1)\right)(1-K_\varepsilon) + \exp\left(\sqrt{\omega' i}\,(1-\chi)\right)(1+K_\varepsilon)}{\exp\left(\sqrt{\omega' i}\right)(1+K_\varepsilon) + \exp\left(-\sqrt{\omega' i}\right)(1-K_\varepsilon)}; \tag{31}$$

$$A_2(\chi) = \frac{2\exp\left(\sqrt{\frac{\omega' i}{K_a}}(1-\chi)\right)}{\exp\left(\sqrt{\omega' i}\right)(1+K_\varepsilon) + \exp\left(-\sqrt{\omega' i}\right)(1-K_\varepsilon)}. \tag{32}$$

Введем обозначение [2] $h^* = \dfrac{1-K_\varepsilon}{1+K_\varepsilon}$. (33)

Выражения (31) и (32) перепишем в виде:

$$A_1(\chi) = \frac{\exp\left(\sqrt{\omega' i}\,(\chi-1)\right)h^* + \exp\left(\sqrt{\omega' i}\,(1-\chi)\right)}{\exp\left(\sqrt{\omega' i}\right) + \exp\left(-\sqrt{\omega' i}\right)h^*}; \tag{34}$$

$$A_2(\chi) = \frac{2\exp\left(\sqrt{\frac{\omega' i}{K_a}}(1-\chi)\right)}{(1+K_\varepsilon)\left(\exp\left(\sqrt{\omega' i}\right) + \exp\left(-\sqrt{\omega' i}\right)h^*\right)}. \tag{35}$$

Окончательное решение задачи (8) – (15) в комплексной форме:

$$\Theta_1(\chi, \mathrm{Fo}) = \exp(\omega' \mathrm{Fo}\, i)\frac{\exp\left(\sqrt{\omega' i}\,(\chi-1)\right)h^* + \exp\left(\sqrt{\omega' i}\,(1-\chi)\right)}{\exp\left(\sqrt{\omega' i}\right) + \exp\left(-\sqrt{\omega' i}\right)h^*}; \tag{36}$$

$$\Theta_2(\chi, \mathrm{Fo}) = \frac{\exp(\omega' \mathrm{Fo} i)}{(1+K_\varepsilon)}\frac{2\exp\left(\sqrt{\frac{\omega' i}{K_a}}(1-\chi)\right)}{(\exp(\sqrt{\omega' i}) + \exp(-\sqrt{\omega' i})h^*)}. \tag{37}$$

В размерном виде (36) и (37):

$$T_1(x,\tau) = T_m\exp(\omega\tau i)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{\exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{a_1}}\,i\,(x-h)\right)h^* + \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{a_1}}\,i\,(h-x)\right)}{\exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{a_1}}\,i\right)(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{a_1}}\,i\right)(\varepsilon_1-\varepsilon_2)} + T_0; \tag{38}$$

$$T_2(h,\tau) = T_m\varepsilon_1\exp(\omega\tau\cdot i)\frac{2}{\exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{a_1}}\,i\right)(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{a_1}}\,i\right)(\varepsilon_1-\varepsilon_2)} + T_0; \tag{39}$$

Температура на границе двух тел T_2'

$$T_2'(x,\tau) = T_m\varepsilon_1\exp(\omega\tau\cdot i)\frac{2\exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{a_2}}\,i\,(h-x)\right)}{\exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{a_1}}\,i\right)(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{a_1}}\,i\right)(\varepsilon_1-\varepsilon_2)} + T_0. \tag{40}$$

Найденные решения (38) – (40) могут быть использованы для определения размеров слоев в многослойных изделиях, а также для нахождения теплофизических свойств материалов исследуемых объектов.

Список литературы

1. Жуков, Н.П. Многомодельные методы и средства неразрушающего контроля теплофизических свойств твердых материалов и изделий : монография / Н.П. Жуков, Н.Ф. Майникова. – М. : Машиностроение-1, 2004. – 288 с.
2. Теплофизические измерения и приборы / Е.С. Платунов [и др.] ; под общ. ред. Е.С. Платунова. − Л. : Машиностроение, 1986. − 256 с.
3. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 599 с.

Simulation of Heat Transfer in Two Bodies under Harmonious Thermal Influence

I.V. Rogov, N.F. Maynikova, O.N. Popov, S.V. Molodov

Department "Hydraulics and Heat Engineering", TSTU; teplotehnika@nnn.tstu.ru

Key words and phrases: harmonious thermal influence; mathematical model; non-destructive control; thermophysical properties.

Abstract: the mathematical model of heat transfer in a system of two bodies is presented. The boundary problem of heat conduction in the dimensional and dimensionless representations is formulated. The distributions of temperature along the length of the limited and semi-limited bodies, as well as temperature values at the interface of two bodies at any moment time are produced.

Modellierung der Wärmeübertragung im System der zweien Körper bei der harmonischen Wärmeeinwirkung

Zusammenfassung: Es ist das mathematische Modell der Wärmeübertragung im System der zweien Körper dargelegt. Es ist die Randaufgabe der Wärmeleitfähigkeit in den dimensionalen und undimensionalen Representationen formuliert. Es sind die Verteilungen der Werten der Temperatur nach der Länge der begrenzten und unbegrenzten Körper im jeden Zeitmoment erhalten.

Modélage du transfert de chaleur dans le système de deux corps lors de l'action thermique harmonieuse

Résumé: Est présenté le modèle mathématique du transfert de chaleur dans le système de deux corps. Est formulé le problème de la contrée du transfert de chaleur dans les représentations dimensionnelles et non dimensionnelles. Sont reçues les répartitions des valeurs de la température sur la longueur des corps limité et semi-limité ainsi que les valeurs de la température sur la limite du contact de deux corps dans n'importe quel moment du temps.

Авторы: ***Рогов Иван Владимирович*** – кандидат технических наук, докторант кафедры «Гидравлика и теплотехника»; ***Майникова Нина Филипповна*** – доктор технических наук, заведующая кафедрой «Гидравлика и теплотехника»; ***Попов Олег Николаевич*** – аспирант кафедры «Гидравлика и теплотехника»; ***Молодов Сергей Викторович*** – магистрант, ГОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: ***Глинкин Евгений Иванович*** – доктор технических наук, профессор кафедры «Биомедицинская техника», ГОУ ВПО «ТГТУ».