

УДК 531.391.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО МАЯТНИКА И МАЯТНИКА С ПЕРЕМЕННЫМ g

Н.Я. Молотков, О.В. Ломакина

Кафедра «Теоретическая механика»; ГОУ ВПО «ТГТУ»; tolmat@nnn.tstu.ru

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: гироскоп; гироскопический момент; демпфирование колебаний; маятник; период колебаний; эффективное ускорение.

Аннотация: Исследуется демпфирование колебаний маятника с помощью гироскопического эффекта, а также влияние эффективного ускорения свободного падения на механические колебания.

В технике для борьбы с нежелательными вибрациями используют гироскопическое демпфирование колебаний [1]. Сущность данного явления можно экспериментально исследовать с помощью прибора, изображенного на рис. 1. Устройство представляет собой маятник, у которого на штанге длиной 50 см вместо массивного груза в П-образном подвесе с помощью подшипников подвешен гироскоп с электроприводом, то есть электродвигатель с массивным ротором. В состоянии равновесия маятника ось фигуры гироскопа расположена горизонтально в плоскости колебаний маятника. Гироскопический маятник подвешен на горизонтальной оси, которая расположена перпендикулярно плоскости колебаний маятника. Для уменьшения потерь энергии в подвесе при колебаниях маятника используются два спаренных шариковых подшипника. Электрогироскоп имеет две степени свободы: во-первых, он может вращаться вокруг собственной оси x с угловой скоростью ω и иметь момент импульса $L = I\omega$, где I – момент инерции гироскопа относительно его собственной оси; во-вторых, гироскоп может вращаться вокруг оси y подвеса. Так как ось подвеса маятника закреплена, то он не может вращаться вокруг третьей оси z (рис. 2).

Последовательность проведения экспериментальных исследований:

а) не приводя гироскоп во вращение вокруг собственной оси, определяют период T колебаний маятника. Для этого определяют время t , за которое он совершает, например, 50 полных колебаний. При $t = 79$ с вычисления дают $T = 1,58$ с;

б) определяют коэффициент затухания α маятника при не вращающемся гироскопе. Для этого запускают маятник, отклонив его от положения равновесия на расстояние $X_{m0} = 10$ см. Определяют число N полных колебаний, совершив которые

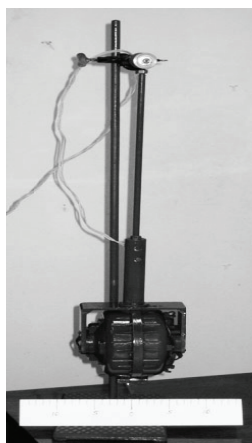


Рис. 1. Гироскопический маятник

амплитуда колебаний уменьшается до $X_m = 5$ см. Опыт дает $N = 65$. Учитывая закон затухания

$$X_m = X_{m0}e^{-\alpha t},$$

где $t = NT$ – время, за которое совершается N колебаний, найдем

$$X_m = X_{m0}e^{-\alpha NT} \quad \text{или} \quad \alpha NT = \ln \frac{X_{m0}}{X_m}.$$

Откуда окончательно имеем

$$\alpha = \frac{\ln \frac{X_{m0}}{X_m}}{NT}. \quad (1)$$

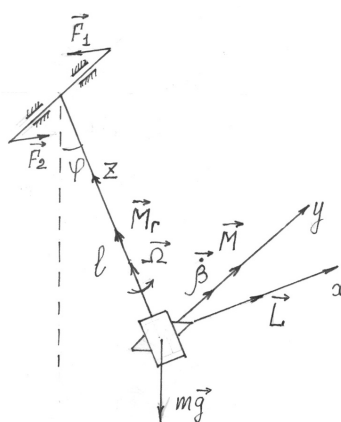


Рис. 2. Колебания маятника

При вышеуказанных параметрах найдем $\alpha = 0,0068 \text{ с}^{-1}$;

в) подают постоянное напряжение на электрогироскоп и приводят его во вращательное движение с достаточно большой частотой ω . Определяют число N полных колебаний, совершив которые амплитуда маятника уменьшается от $X_{m0} = 10$ см до $X_m = 5$ см. Опыт дает $N = 7$. Следовательно, коэффициент затухания гироскопического маятника согласно формуле (1) равен $\alpha = 0,063 \text{ с}^{-1}$, то есть коэффициент затухания возрастает более чем в 9 раз и колебания маятника быстро затухают.

Объяснение опыта. Вектор момента импульса \bar{L} гироскопа совпадает с его собственной осью вращения и расположен в плоскости колебаний маятника. При отклонении маятника на некоторый угол φ от положения равновесия на него действует вращательный момент силы тяжести $M = mgl \sin \varphi$, где l – расстояние от оси подвеса маятника до его центра тяжести. Вектор \bar{M} момента внешней силы направлен перпендикулярно к плоскости колебаний маятника. Действие внешнего момента силы \bar{M} должно приводить к прецессии гироскопа с частотой $\bar{\Omega}$, которая определяется соотношением

$$[\bar{\Omega} \times \bar{L}] = \bar{M}. \quad (2)$$

Вектор $\bar{\Omega}$ направлен перпендикулярно векторам \bar{L} и \bar{M} (см. рис. 2). Направление вектора $\bar{\Omega}$ перпендикулярно оси подвеса маятника, которая закреплена неподвижно. Благодаря этому, вращение гироскопа с частотой $\bar{\Omega}$ становится невозможным. Однако заторможенная прецессия приводит к тому, что со стороны гироскопа на подшипники подвеса действует пара сил (\bar{F}_1, \bar{F}_2) , стремящаяся кратчайшим путем установить ось собственного вращения параллельно оси подвеса. Момент этой пары сил \bar{M}_r называется гироскопическим моментом и определяется равенством [2]

$$\bar{M}_r = [\bar{L} \times \dot{\beta}], \quad (3)$$

где $\dot{\beta}$ – угловая скорость гироскопа, которая возникает под действием внешнего момента силы \bar{M} . Направление вектора $\dot{\beta}$ совпадает с направлением вектора \bar{M} . Действие гироскопического момента сил \bar{M}_r приводит к тому, что значительно увеличиваются силы давления на подшипники оси подвеса маятника. Вследствие

чего увеличивается трение качения и значительно возрастает коэффициент затухания. Так как во второй полупериод колебаний маятника при движении его слева направо (см. рис. 2) направление вектора угловой скорости $\dot{\beta}$ изменяется на противоположное, то в соответствии с формулой (3) изменяется и направление гироскопического момента $\overline{M}_Г$ пары сил. Следовательно, гироскопическое демпфирование происходит дважды за период колебаний.

Известно, что при малых амплитудах колебаний период математического маятника зависит от его длины l и ускорения свободного падения g

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4)$$

Влияние ускорения свободного падения на период колебаний маятника можно показать, если ось его подвеса наклонить под некоторым углом α к горизонту (рис. 3). Маятник выполнен в виде легкого стержня и массивного груза. Для уменьшения трения в подвесе используются шариковые подшипники. Ось подвеса маятника может устанавливаться как горизонтально, так и под любым углом α к горизонту, который отсчитывается по шкале. Фиксация угла α наклона оси подвеса маятника осуществляется с помощью стопорного винта. При $\alpha = 0^\circ$ для указанного маятника с достаточной точностью будет справедлива формула (4), при $\alpha \neq 0^\circ$ период колебаний маятника будет зависеть от эффективной составляющей ускорения свободного падения g_3 , которая согласно рис. 4 численно равна

$$g_3 = g \cos \alpha. \quad (5)$$

При отклонении маятника на малый угол φ от положения равновесия на него действует вращательный момент

$$M = -mg_3l \sin \varphi,$$

который стремится возвратить маятник в положение равновесия. Закон динамики для вращательного движения маятника имеет вид

$$I_0\varepsilon = M,$$

где $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ – угловое ускорение; I_0 – момент инерции маятника относительно



Рис. 3. Маятник

оси подвеса, наклоненной под углом α к горизонту. Следовательно, дифференциальное уравнение для колебательных движений маятника примет вид

$$I_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mg_3l \sin \varphi = 0.$$

Учитывая, что $I_0 = ml^2$, а при малых амплитудах колебаний $\sin \varphi \approx \varphi$, получим

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g_3}{l}\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0,$$

где $\omega = \sqrt{\frac{g_3}{l}}$ – круговая частота колебаний маятника.

Для периода колебаний получаем

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_3}} \quad (6)$$

или при учете формулы (5)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}} = \frac{T_0}{\sqrt{\cos \alpha}}. \quad (7)$$

Откуда видно, что при увеличении угла α наклона подвеса маятника эффективное ускорение g_3 уменьшается, а период колебаний увеличивается. На рис. 5 показан график зависимости периода колебаний от эффективного ускорения свободного падения для описанного маятника при $l = 0,3$ м согласно формуле (6).

Экспериментальные исследования зависимости периода колебаний маятника от эффективного ускорения свободного падения проводят в следующей последовательности. Установив ось подвеса маятника (см. рис. 3) горизонтально $\alpha = 0$, определяют его период колебания при $l = 0,3$ м. Опыт показывает, что $N = 20$ полных колебаний маятник совершает за $t = 22$ с, то есть его период колебаний равен

$T_0 = \frac{t}{N} = 1,1$ с. Это значение совпадает с величиной периода колебаний, рассчитанного по формуле (4) при $g = 9,8$ м/с² и $l = 0,3$ м. Устанавливают ось подвеса маятника под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Опыт показывает, что $N = 20$ полных колебаний маятник совершает за $t = 30$ с, то есть его период колебаний увеличился и стал равен $T = 1,5$ с. При $\alpha = 60^\circ$ эффективное ускорение свободного падения равно $g_3 = g \cos \alpha = 4,9$ м/с², то есть оно уменьшается в два раза, а период колебаний согласно формуле (6) увеличивается в $\sqrt{2}$ раз и становится равным $T = 1,55$ с, что согласуется с экспериментом. При дальнейшем увеличении угла наклона оси подвеса маятника и уменьшении эффективного ускорения свободного падения период колебаний увеличивается более быстро. Так при $\alpha = 85^\circ$ период колебаний приближается к $T \approx 4$ с.

Примером таких медленных колебаний являются колебания двери, когда ось ее вращения или подвеса наклонена под небольшим углом к вертикали.

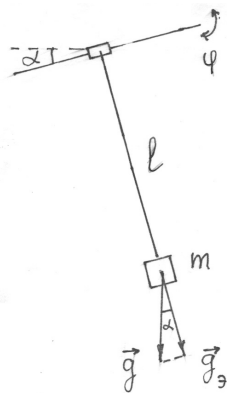


Рис. 4. Отклонение маятника от положения равновесия

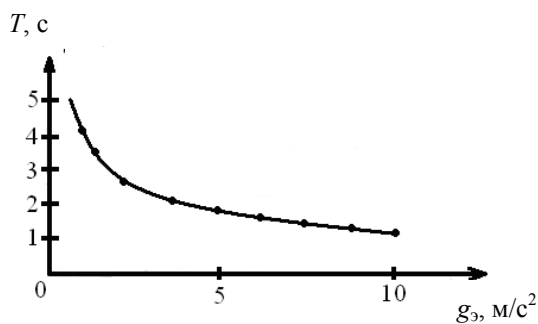


Рис. 5. Зависимость периода колебаний от эффективной составляющей ускорения свободного падения

Список литературы

1. Гайнутдинов, О.И. Методология анализа и формирования гироскопического взаимодействия в аэроупругой колебательной системе / О.И. Гайнутдинов. – Тамбов : Изд-во Тамб. высш. воен. инженер. училища радиоэлектроники, 2008. – 78 с.
2. Ишлинский, А.Ю. Физическая энциклопедия / А.Ю. Ишлинский. – М. : Сов. энциклопедия, 1988. – Т. 1. – 704 с.

Investigation of the Gyroscopic Pendulum and the Pendulum with Variable g

N.Ya. Molotkov, O.V. Lomakina

Department "Theoretical Mechanics"; TSTU; tolmat@nnn.tstu.ru

Key words and phrases: damping of oscillations; effective acceleration; gyroscope; gyroscopic moment; pendulum; period of oscillations.

Abstract: The paper studies the damping of pendulum's oscillations through the gyroscopic effect as well as the impact of the effective gravitational acceleration on the mechanical vibrations.

Untersuchung des gyrokopischen Pendels und des Pendels mit der g -Variable

Zusammenfassung: Im Artikel wird die Dämpfung der Schwankungen des Pendels mit Hilfe des gyrokopischen Effektes und auch den Einfluß der effektiven Beschleunigung des freien Fallens auf die mechanischen Schwankungen untersucht.

Etude du pendule gyroscopique et du pendule avec une g variable

Résumé: Dans l'article est étudié l'étouffement des oscillations du pendule à l'aide de l'effet gyroscopique ainsi que l'influence de l'accélération efficace de la chute sur les oscillations mécaniques.

Авторы: *Молотков Николай Яковлевич* – доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая механика»; *Ломакина Ольга Владимировна* – кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика», ГОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: *Гайнутдинов Олег Инсафович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Физика», ГОУ ВПО «ТГТУ».