УДК 519.5

О РАЗЛИЧЕНИИ СЧЕТНЫХ МНОЖЕСТВ ПО ЗАПАСУ ЭЛЕМЕНТОВ В НИХ

В.И. Фомин

Кафедра «Прикладная математика и механика», ГОУ ВПО «ТГТУ»; kulikov@apmath.tstu.ru

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: отношение порядка; счетное множество; μ-измеримое подмножество; μ-мощность; μ-равномощность.

Аннотация: Предложена количественная характеристика одного типа счетных множеств, позволяющая различать между собою счетные множества по запасу элементов в них, на основе чего обобщено классическое определение вероятности на случай, когда множество элементарных исходов и множество благоприятствующих исходов счетны.

Как известно, одной из основных характеристик произвольного множества является его количественная характеристика. Если множество конечно, то эта характеристика выражается некоторым натуральным числом, равным количеству элементов данного множества. В случае бесконечного множества вводится неконструктивное определение мощности множества: «мощность – это то, что есть общего у всех эквивалентных между собою множеств» [1, с. 13]. При этом определение одинаковой мощности (эквивалентности) множеств принимается за «прямое обобщение понятия одинаковой численности конечных множеств» [2, с. 14], следствием чего являются трудновоспринимаемые, несмотря на их условный характер, фразы типа «четных чисел столько же, сколько всех натуральных» [2, с. 15], «на интервале $(0, 1)$ «столько же» точек, сколько и на всей прямой» [3, с. 26]. Недостатком понятия одинаковой мощности как количественной характеристики множеств является то, что оно не позволяет различать множества, запас элементов которых заведомо различен, в частности, не позволяет различать между собою счетные множества. Для точечных множеств мощности континуума на прямой, плоскости и в трехмерном пространстве этот недостаток компенсируется в определенном смысле введением понятия меры множества. Однако в ряде задач необходимо различать между собою по количественной характеристике счетные множества. Пусть, например, G – некоторый эксперимент; A – некоторое случайное событие, связанное с экспериментом G; Ω – множество всех элементарных исходов эксперимента G, при этом Ω счетно и все элементарные исходы равновозможны; Ω_0 – множество элементарных исходов, благоприятствующих событию A, Ω_0 также счетно. Требуется определить вероятность события A. Стандартные формулы:

$$p(A) = \sum_{\omega \in \Omega_0} p(\omega); \quad p(A) = \frac{\operatorname{mes} \Omega_0}{\operatorname{mes} \Omega}$$

применить не удается, так как в первом случае сумма ряда всегда равна нулю, во втором случае получаем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Нужно ввести более тонкое, чем известное, понятие мощности множества, которое различало бы Ω и Ω_0.

В данной работе предлагается одна количественная характеристика счетных множеств, элементы которых занумерованы в естественном порядке. С помощью этой характеристики обобщается классическое определение вероятности на случай, когда множество элементарных исходов и множество благоприятствующих исходов счетны.

1. Пусть $H = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ – некоторое счетное множество действительных чисел, причем $a_1 < a_2 < ... < a_n < ...$ (или $a_1 > a_2 > ... > a_n > ...$), А – система всех подмножеств множества H, при этом порядок следования элементов в каждом подмножестве тот же, что и в самом множестве H: если $A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n}, ...\}$ – некоторый элемент из А, то $a_{i_1} < a_{i_2} < ... < a_{i_n} < ...$ (или соответственно $a_{i_1} > a_{i_2} > ... > a_{i_n} > ...$).

Определение 1. Множество $A \in$ А называется μ-измеримым, если существует предел вида

$$\lim_{k \to \infty} \frac{m_k}{k}, \tag{1}$$

где k – произвольное натуральное число; m_k – количество элементов множества $A \cap H_k$ $H_k = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. При этом значение предела (1) называется μ-мерой или μ-мощностью множества A на множестве H и обозначается $\mu_H(A)$:

$$\mu_H(A) = \lim_{k \to \infty} \frac{m_k}{k}.$$

Величина $\mu_H(A)$ выражает степень насыщенности множества H элементами множества A.

Пример 1. $H = N = \{1, 2, ..., n, ...\}$, $A = N_{pn} = \{p, 2p, ..., np, ...\}$, где p – некоторое фиксированное натуральное число. Тогда

$$\mu_N(N_{pn}) = \lim_{k \to \infty} \frac{\left[\frac{k}{p}\right]}{k} = \frac{1}{p}$$

$\left(\left[\frac{k}{p}\right]\right.$ – целая часть числа $\left.\frac{k}{p}\right)$, в частности, $\mu_N(N_{2n}) = \frac{1}{2}$, т.е. условно можно сказать, что «четных чисел в два раза меньше, чем всех натуральных».

Пример 2. $H = N = \{1, 2, ..., n, ...\}$, $A = N_0 = \{2, 3, ...\}$ – множество всех простых чисел. Как известно [4, с. 21],

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0,$$

где $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих x. Следовательно, $\mu_N(N_0)=0$, т.е. «простых чисел, несмотря на то что их бесконечно много, все же существенно меньше, чем всех натуральных чисел». Этот пример также показывает, что существуют бесконечные подмножества счетного множества, μ-мощность которых равна нулю.

Заметим, что существуют такие $A \in \mathrm{A}$, которые не являются μ-измеримыми. Действительно, возьмем произвольным образом из H_{10} один элемент, из $H_{100} \setminus H_{10}$ – 19 элементов, из $H_{1000} \setminus H_{100}$ – 80 элементов, из $H_{10000} \setminus H_{1000}$ – 1900 элементов, … , из $H_{10^{2i-1}} \setminus H_{10^{2i-2}}$ – $10^{2i-2}...2\cdot 10^{2i-3}$ элементов и т.д. Пусть A – множество, состоящее из всех выбранных элементов. Тогда для $k=10^i$ $(i=1, 2, ...)$ $m_k = 10^{i-1}$, если i нечетно, и $m_k = 2\cdot 10^{i-1}$, если i четно. Подпоследовательность $\left\{\dfrac{m_{k_i}}{k_i}\right\}$, $k_i = 10^i$ $(i=1, 2, ...)$ не является сходящейся. Следовательно, последовательность $\left\{\dfrac{m_k}{k}\right\}$ также не имеет предела, т.е. множество A не является μ-измеримым.

Пусть $\mathrm{A} = \mathrm{A}_\mu \cup \mathrm{A}_\nu$, где A_μ – система всех μ-измеримых подмножеств множества H; A_ν – система всех подмножеств множества H, не являющихся μ-измеримыми. Из определения μ-меры и свойств пределов числовых последовательностей получаем следующее.

1. Для любого $A \in \mathrm{A}_\mu$ $0 \le \mu_H(A) \le 1$.
2. $\varnothing \in \mathrm{A}_\mu$, $\mu_H(\varnothing)=0$.
3. $H \in \mathrm{A}_\mu$, $\mu_H(H)=1$.
4. Если $A \in \mathrm{A}$ конечно, то $A \in \mathrm{A}_\mu$ и $\mu_H(A)=0$.
5. Если $A_1, A_2 \in \mathrm{A}_\mu$ и $A_1 \subset A_2$, то $\mu_H(A_1) \le \mu_H(A_2)$.
6. Если $A_1, A_2 \in \mathrm{A}_\mu$ и $A_1 \cap A_2 \in \mathrm{A}_\mu$, то $A_1 \cup A_2 \in \mathrm{A}_\mu$ и $\mu_H(A_1 \cup A_2) = \mu_H(A_1) + \mu_H(A_2) - \mu_H(A_1 \cap A_2)$.
7. Если $A \in \mathrm{A}_\mu$, $A_0 \subset A$ и $A_0 \in \mathrm{A}_\mu$, то $A \setminus A_0 \in \mathrm{A}_\mu$ и $\mu_H(A \setminus A_0) = \mu_H(A) - \mu_H(A_0)$.

Как следствие перечисленных свойств, отметим следующее.

8. Если $A_1, A_2 \in \mathrm{A}_\mu$ и $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то $A_1 \cup A_2 \in \mathrm{A}_\mu$ и $\mu_H(A_1 \cup A_2) = \mu_H(A_1) + \mu_H(A_2)$ (следствие свойств 2, 6).
9. Если $A_1, A_2 \in \mathrm{A}_\mu$ и $A_1 \cap A_2$ – конечное множество, то $A_1 \cup A_2 \in \mathrm{A}_\mu$ и $\mu_H(A_1 \cup A_2) = \mu_H(A_1) + \mu_H(A_2)$ (следствие свойств 4, 6).
10. Если $A \in \mathrm{A}_\mu$, то $H \setminus A \in \mathrm{A}_\mu$ и $\mu_H(H \setminus A) = 1 - \mu_H(A)$ (следствие свойств 3, 7).
11. Если $A \in \mathrm{A}_\mu$, $A_0 \subset A$, A_0 – конечно, то $A \setminus A_0 \in \mathrm{A}_\mu$ и $\mu_H(A \setminus A_0) = \mu_H(A)$ (следствие свойств 4, 7).

12. Если $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathrm{A}_\mu$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$ для любых $1 \le i, j \le n$, $i \ne j$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathrm{A}_\mu$ и $\mu_H\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_H(A_i)$ (обобщение свойства 8 на случай конечного числа слагаемых).

13. Если $A \in \mathrm{A}_\mu$, $A_1, A_2, ..., A_n \subset A$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ для любых $1 \le i, j \le n$, $i \ne j$, и $A_i \in \mathrm{A}_\mu$, $1 \le i \le n$, то $A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathrm{A}_\mu$ и $\mu_H(A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \mu_H(A) - \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_H(A_i)$ (следствие 7, 12).

14. Если $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathrm{A}_\mu$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$ для любых $1 \le i, j \le n$, $i \ne j$, то $H \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathrm{A}_\mu$ и $\mu_H\left(H \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_H(A_i)$ (следствие свойств 3, 13).

15. Если $A \in \mathrm{A}_\mu$, $A_1, A_2, ..., A_n \subset A$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ для любых $1 \le i, j \le n$, $i \ne j$, и $A_i \in \mathrm{A}_\mu$, $1 \le i \le n$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_H(A_i) \le \mu_H(A)$ (следствие свойств 5, 12).

Заметим, что μ-мера удовлетворяет обычным требованиям, предъявляемым к мере множества, т.е. является неотрицательной аддитивной функцией множества.

2. В системе множеств A_μ введем отношение порядка (иерархию) по μ-мощности: для $A_1, A_2 \in \mathrm{A}_\mu$ положим $A_1 \simeq A_2$, если $\mu_H(A_1) = \mu_H(A_2)$, и $A_1 \prec A_2$, если $\mu_H(A_1) < \mu_H(A_2)$.

Определение 2. Множества $A_1, A_2 \in \mathrm{A}_\mu$ называются μ-равномощными (μ-эквивалентными), если $A_1 \simeq A_2$, т.е. $\mu_H(A_1) = \mu_H(A_2)$..

Отношение μ-равномощности, обладая свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, является обычным отношением эквивалентности, следовательно, определяет разбиение системы множеств A_μ на попарно непересекающиеся классы μ-равномощных между собою множеств. Например, класс μ-равномощных множеств с μ-мощностью, равной нулю, имеет вид

$$K^0 = \{A \in \mathrm{A}_\mu \mid \mu_H(A) = 0\}.$$

В частности, этому классу принадлежат все конечные подмножества множества H, т.е. понятие μ-мощности не различает конечные множества, зато оно позволяет различать бесконечные множества (если приходится работать с конечными множествами с достаточно большим запасом элементов в них, то с практической точки зрения не так уж важно различать два таких множества, количественные характеристики которых мало отличаются друг от друга; например, не важно имеем мы дело с партией из 100 000 однотипных изделий или с партией из 100 003 таких изделий).

Пусть K – множество всех классов μ-равномощных множеств из A_μ. Введем в K отношение порядка: для $K_1, K_2 \in \mathrm{K}$ положим $K_1 \prec K_2$, если $\mu_H(A_1) < \mu_H(A_2)$, где A_1, A_2 – некоторые элементы соответственно из K_1, K_2. Заметим, что K^0 и $K^1 = \{A \in \mathrm{A}_\mu \mid \mu_H(A) = 1\}$ являются соответственно первым и последним элементами множества K.

3. Пусть G – некоторый эксперимент; Ω – множество всех элементарных исходов эксперимента G, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$ – счетно; ω_n – действительные числа $(n = 1, 2, ...)$, $\omega_1 < \omega_2 < ... < \omega_n < ...$ (или $\omega_1 > \omega_2 > ... > \omega_n > ...$), при этом все элементарные исходы равновозможны, A_μ – система всех μ-измеримых подмножеств множества Ω (класс событий, связанных с экспериментом G).

Определение 3. Вероятностью события $A \in \mathrm{A}_\mu$ называется μ-мощность (μ-мера) множества A на множестве Ω:

$$p(A) = \mu_\Omega(A).$$

Заметим, что определенная таким образом вероятность удовлетворяет всем необходимым аксиомам:

1) $0 \le p(A) \le 1$ (см. свойство 1);

2) $p(\varnothing) = 0$, $p(\Omega) = 1$ (см. свойства 2, 3);

3) Если $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathrm{A}_\mu$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$ для любых $1 \le i, j \le n$, $i \ne j$, то $p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$ (см. свойство 12).

Тройка $(\Omega, \mathrm{A}_\mu, \mu_\Omega(A))$ не является вероятностным пространством в общепринятом смысле [5, с. 31], так как множество A_μ не обладает свойством замкнутости относительно операции пересечения, т.е. существуют такие $A_1, A_2 \in \mathrm{A}_\mu$, что $A_1 \cap A_2 \notin \mathrm{A}_\mu$ (соответствующий пример строится аналогично тому, как был построен выше пример множества $A \notin \mathrm{A}_\mu$).

Введенное определение вероятности является в некотором смысле обобщением классического определения вероятности: вероятность события равна μ-мощности множества благоприятствующих этому событию исходов на множестве всех элементарных исходов.

4. Понятие μ-мощности можно ввести также для подмножеств счетного множества элементов произвольной природы, если элементы этого множества занумерованы в естественном порядке, например, для подмножеств таких множеств, как $H_1 = \left\{S_1, S_{\frac{1}{2}}, ..., S_{\frac{1}{n}}, ...\right\}$, где $S_{\frac{1}{n}} = \left\{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{n^2}\right\}$ $(n = 1, 2, ...)$, или $H_2 = \{f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t), ...\}$, где $f_n(t) \in C[a, b]$ $(n = 1, 2, ...)$, $f_1(t) < f_2(t) < ... < f_n(t) < ...$ для любого $t \in [a, b]$.

Результаты настоящей работы анонсированы в [6, 7].

Список литературы

1. Александров, П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П.С. Александров. – М. : Наука, 1977. – 368 с.

2. Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. – М. : Наука, 1974. – 480 с.

3. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1976. – 544 с.

4. Прахар, К. Распределение простых чисел / К. Прахар. – М. : Мир, 1967. – 511 с.

5. Боровков, А.А. Теория вероятностей / А.А. Боровиков. – М. : Наука, 1976. – 352 с.

6. Фомин, В.И. О количественном сравнении счетных множеств в вузовском курсе математики / В.И. Фомин // Современные методы теории функций и смежные проблемы : тез. докл. Воронеж. зим. мат. шк. / Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1999. – С. 196.

7. Фомин, В.И. Об одном обобщении классического определения вероятности в вузовском курсе математики / В.И. Фомин // Нелинейный анализ и функционально-диффереациальные уравнения : тез. докл. междунар. науч. конф. / Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 2000. – С. 191–192.

On the Distinction between Countable Sets as Sets of Elements in Them

V.I. Fomin

Department «Applied Mathematics and Mechanics», TSTU;
kulikov@apmath.tstu.ru

Key words and phrases: countable set; μ-cardinality; μ-measurable subset of the order relation; μ-power.

Abstract: We propose a quantitative characterization of the same type of countable sets, which allows distinguishing the countable sets as sets of elements in them; the classical definition of probability is generalized in case the set of elementary outcomes and many favorable outcomes are countable.

Über Erkennung der Rechenmengen nach den Vorräten in ihnen der Elemente

Zusammenfassung: Es ist die einige zahlenmäßige Charakteristik eines Typus der Rechenmengen vorgeschlagen. Sie erlaubt, die Rechenmengen nach den Vorräten in ihnen der Elemente zu unterscheiden. Auf diesem Grund ist die klassische Bestimmung der Wahrscheinlichkeit auf den Fall, wenn die Menge der Elementarausgänge und die Menge der begünstigenden Ausgänge gerechnet sind, zusammnegefasst.

Sur la distinction des multitudes comptables d'après la réserve des éléments dans ces multitudes

Résumé: Est proposée une certaine caractéristique quantitative d'un type des multitudes comptables permettant de distinguer multitudes comptables d'après les la réserve des éléments dans ces multitudes. A la base de cela est généralisée la définition classique de la probabilité pour le cas lorsque la multitude des issues élémentaires est la multitude des issues favirisantes sont comptables.

Автор: ***Фомин Василий Ильич*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и механика», ГОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: ***Дзюба Сергей Михайлович*** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика», ГОУ ВПО «ТГТУ».