УДК 512

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПЕРРОНА

В.И. Фомин

Кафедра «Прикладная математика и механика», ГОУ ВПО «ТГТУ»; kulikov@apmath.tstu.ru

Представлена членом редколлегии профессором Г.М. Куликовым

Ключевые слова и фразы: знакосимметрическая матрица; позитивная матрица; положительное собственное значение; собственный вектор; тип позитивной матрицы.

Аннотация: Классический результат Перрона о существовании доминирующего положительного собственного значения у положительной матрицы обобщен на более широкий класс матриц, допускающих наличие отрицательных элементов.

Пусть $R^{n\times n}$ – множество вещественных матриц $A = (a_{ij})$ порядка n, $R_+^{n\times n}$ – множество положительных матриц из $R^{n\times n}$:

$$R_+^{n\times n} = \{A \in R^{n\times n} | a_{ij} > 0, 1 \le i, j \le n\}.$$

По теореме Перрона [1, с. 354], любая матрица $A \in R_+^{n\times n}$ имеет положительное собственное значение, равное спектральному радиусу этой матрицы. В настоящей работе предлагается обобщение этого факта на некоторый класс матриц $R_p^{n\times n} \subset R^{n\times n}$, $R_p^{n\times n} \supset R_+^{n\times n}$.

Определение 1. Матрица $A \in R^{n\times n}$ называется позитивной, если существует такое разбиение множества индексов $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ на два непересекающихся подмножества $M_1 = \{1, p_2, \ldots, p_r\}$, $1 < p_2 < \ldots < p_r$, $M_2 = \{q_1, q_2, \ldots, q_s\}$, $q_1 < q_2 < \ldots < q_s$, что для любых $1 \le i, j \le n$:

$$a_{ij} > 0, \text{ если } i, j \in M_1, \text{ либо } i, j \in M_2;$$

$$a_{ij} < 0, \text{ если } i \in M_1,\ j \in M_2, \text{ либо } i \in M_2,\ j \in M_1.$$

При этом множество M_1 называется типом позитивной матрицы A.

Замечание 1. Тип позитивной матрицы определяется однозначно и имеет вид $\{1, p_2, \ldots, p_r\}$, где $1, p_2, \ldots, p_r$ – вторые индексы положительных элементов первой строки матрицы.

Замечание 2. Элементы главной диагонали позитивной матрицы положительны.

Пример 1. Матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix},$$

где знаками «+», «–» отмечены знаки соответствующих матричных элементов, является позитивной матрицей типа $\{1, 3\}$.

Пример 2. Матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + \\ + & + & + \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

не является позитивной.

Пусть $R_p^{n\times n}$ – множество позитивных матриц из $R^{n\times n}$.

Замечание 3. Справедливо включение $R_+^{n\times n} \subset R_p^{n\times n}$, ибо любая матрица $A \in R_+^{n\times n}$ является позитивной типа $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Определение 2. Матрица $A \in R^{n\times n}$ называется знакосимметрической, если $a_{ij}a_{ji} > 0,\ 1 \le i, j \le n$.

Пусть $R_s^{n\times n}$ – множество знакосимметрических матриц из $R^{n\times n}$.

Замечание 4. $R_p^{n\times n} \subset R_s^{n\times n}$, $R_p^{n\times n} \ne R_s^{n\times n}$.

Действительно, включение $R_p^{n\times n} \subset R_s^{n\times n}$ очевидно. Неравенство $R_p^{n\times n} \ne R_s^{n\times n}$ следует, например, из того, что знакосимметрическая матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & + \\ + & + & + \end{pmatrix}$$

не является позитивной.

Теорема. Любая матрица $A \in R_p^{n\times n}$ типа $M_1 = \{1, p_2, \ldots, p_r\}$ имеет положительное собственное значение, равное ее спектральному радиусу, и этому собственному значению отвечает собственный вектор вида $x = (x_j)_{j=1}^n,\ x_1 > 0,$ $x_{p_k} > 0,\ 2 \le k \le r,\ x_j < 0,\ j \in M \backslash M_1$.

Доказательство. Рассмотрим телесный замкнутый конус $K = \{(x_j)_{j=1}^n \in$ $\in R^n | x_1 \ge 0,\ x_{p_k} \ge 0,\ 2 \le k \le r,\ x_j < 0,\ j \in M \backslash M_1\}$ (координатный угол в n-мерном пространстве). Тогда $A(K) \subset K$, откуда следует, в силу известной теоремы [2, с. 78], наше утверждение. Теорема доказана.

Список литературы

1. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1966. – 576 с.
2. Белицкий, Г. Р. Нормы матриц и их приложения / Г. Р. Белицкий, Ю.И. Любич. – Киев : Наук. думка, 1984. – 160 с.

A Generalization of Perron's Theorem

V.I. Fomin

Department of Applied Mathematics and Mechanics, TSTU;
kulikov@apmath.tstu.ru

Key words and phrases: eigenvector; matrix of symmetric terms; positive matrix; positive eigenvalue; type of positive matrix.

Abstract: A classical result of Perron existence of a dominant positive eigenvalue of a positive matrix is generalized to a wider class of matrices that admit the existence of negative elements.

Eine Verallgemeinerung des Theorems von Perron

Zusammenfassung: Klassisches Resultat von Perron über dem Existenz der dominierenden positiven eigenen Bedeutung bei dem positiven Matrix wird auf breitere Klass der das Existenz der negativen Elemente gestattenden Matrizen, verallgemeinert.

Une généralisation du théorème de Perron

Résumé: Le résultat classique de Perron sur l'existence de la propre valeur dominante de la matrice positive est généralisé sur une classe plus large des matrices qui admettent la présence des éléments négatifs.

Автор: ***Фомин Василий Ильич*** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и механика», ГОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: ***Коновалов Виктор Иванович*** – доктор технических наук, профессор кафедры «Химическая инженерия», ГОУ ВПО «ТГТУ».
