УДК 536.629, 681.325.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СРЕДСТВ ПРИ ОЦЕНКЕ ИХ МЕТРОЛОГИЧЕСКОЙ НАДЕЖНОСТИ

Т.И. Чернышова, М.А. Каменская

Кафедра «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем», ГОУ ВПО «ТГТУ»; art_mari@rambler.ru

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: межповерочный интервал; метрологическая характеристика; электронное измерительное средство.

Аннотация: Рассмотрены различные виды математических моделей изменения во времени метрологических характеристик, проведен выбор оптимального вида моделей с применением рациональной интерполяции. Экстраполяция построенных при этом аналитических зависимостей на область будущих значений времени эксплуатации позволяет определить показатели метрологической надежности, а также определить межповерочные интервалы.

Метрологическая надежность (**МН**) является основной характеристикой качества электронных измерительных средств (**ЭИС**). К числу показателей метрологической надежности относятся метрологическая исправность и метрологический ресурс, которые можно определить путем решения прямой и обратной задач прогнозирования состояния метрологических характеристик (**МХ**).

Прогнозирование состояния метрологических характеристик проектируемых ЭИС производится с использованием аппарата аналитико-вероятностного прогнозирования на основе моделирования нестационарного случайного процесса изменения во времени исследуемых МХ с монотонно изменяющимися математическим ожиданием $M_s(t)$ и среднеквадратическим отклонением (дисперсией) $\sigma_s(t)$. Точность и достоверность результатов прогноза определяется адекватностью принятой математической модели. Как правило, наиболее приемлемыми являются нелинейные математические модели процессов изменения во времени МХ:

– экспоненциальные
$$S(t) = a_0 \exp(a_1 t); \tag{1}$$
– логарифмические
$$S(t) = \ln(a_0 + a_1 t); \tag{2}$$
– полиномиальные
$$S(t) = \sum_{i=0}^{\rho} a_i t^{\rho}, \tag{3}$$
где a_i – коэффициенты математической модели, $i = 0, 1, ..., \rho$; t – время эксплуатации; показано [1], что наиболее приемлемой степенью полинома является величина $\rho \le 3$.

Исследования показали, что из представленных моделей старения, использующихся при прогнозировании, полиномиальные зависимости имеют меньшую погрешность аппроксимации по сравнению с экспоненциальными и логарифмическими зависимостями [1].

Однако основным недостатком полиномиальной интерполяции является то, что она неустойчива на сетке с равноудаленными точками контроля.

Альтернативу полиномиальным зависимостям составляет интерполяция рациональными функциями вида

$$S(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} b_i t^n}{1 + \sum_{j=1}^{m} c_j t^m}, \tag{4}$$

где b_i, c_j – коэффициенты математической модели; t – время эксплуатации; n, m – степень полинома. Достоинствами рациональной интерполяции является высокая точность и неподверженность свойственным полиномиальной интерполяции проблемам. Рациональная интерполяция не требовательна к выбору точек контроля.

Прогнозирование изменения во времени МХ с помощью рациональной интерполяции осуществляется в следующей последовательности. Производится выбор рациональной функции в соответствии с выражением (4). Как правило, выбираются степени полиномов числителя и знаменателя такие, что $n + m = N$, где N – индекс рациональной функции [2]. Степени полиномов целесообразно выбирать, исходя из требований к точности интерполяции, учитывая соотношение трудоемкости вычислений с минимизацией погрешности интерполяции. Для нахождения коэффициентов полиномов составляется система $(N+1)$ линейных уравнений. Решая систему линейных уравнений, находим коэффициенты математической модели b_i, c_j, $i = 0, ..., n$, $j = 1, ..., m$.

Исследование возможностей использования зависимостей (1) – (4) для построения математической модели изменения во времени МХ рассматривается на примере оценки метрологических свойств нормирующего преобразователя, который является типовым блоком измерительного канала информационно-измерительной системы (**ИИС**) неразрушающего контроля теплофизических свойств объектов. Электрическая схема этого блока представлена на рис. 1. Как известно [1], матема-

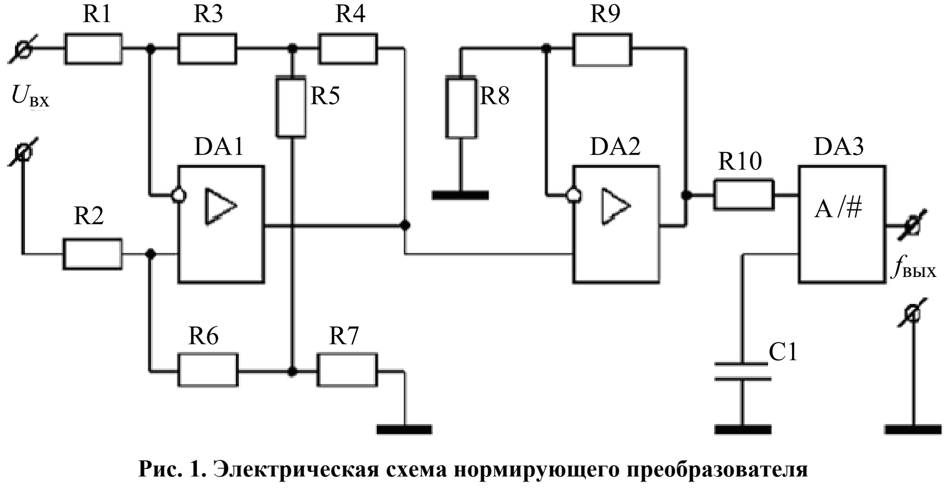

Рис. 1. Электрическая схема нормирующего преобразователя

тическая модель процесса изменения во времени МХ представляет совокупность аналитических зависимостей, полученных для функций изменения во времени математического ожидания $M_s(t)$ и функций, характеризующих изменение во времени границ отклонения возможных значений МХ от ее математического ожидания $\psi_{\pm\sigma}(t) = M_s(t) \pm 3\sigma_s(t)$, где $\sigma_s(t)$ – изменение во времени среднеквадратического отклонения исследуемой метрологической характеристики.

Нормируемой метрологической характеристикой является основная относительная погрешность δ. Математическая модель исследуемого нормирующего преобразователя, построенная на основе анализа электрической принципиальной схемы, имеет вид:

$$\begin{cases} \delta = \dfrac{K^{\text{р}} - K^{\text{н}}}{K^{\text{н}}}; \\ K = \dfrac{\left(\dfrac{R_3 + R_4}{R_1} + \dfrac{R_3 R_4}{R_1 R_5}\right)\left(1 + \dfrac{R_9}{R_8}\right)}{7{,}5 R_{10} C_1}, \end{cases} \tag{5}$$

где $K^{\text{н}}$, $K^{\text{р}}$ – номинальное и расчетное значения коэффициента преобразования напряжение–частота соответственно; $R_1 - R_{10}$, C_1 – параметры элементной базы нормирующего преобразователя.

Математическая модель изменения во времени математического ожидания основной относительной погрешности нормирующего преобразователя, построенная с помощью полиномиальных зависимостей второго и третьего порядков, имеет следующий вид:

$$M_s(t) = 1{,}70 \cdot 10^{-12} t^2 + 1{,}0 \cdot 10^{-4} t - 0{,}0023;$$

$$M_s(t) = 3{,}94 \cdot 10^{-16} t^3 - 1{,}70 \cdot 10^{-11} t^2 + 1{,}0 \cdot 10^{-4} t - 0{,}0026.$$

Рациональная функция (4) изменения во времени математического ожидания МХ со степенями числителя и знаменателя соответственно $n = 3$, $m = 3$ выражается зависимостью:

$$M_s(t) = \frac{-1{,}9 \cdot 10^{-3} + 9{,}5 \cdot 10^{-4} t + 2{,}2 \cdot 10^{-5} t^2 - 0{,}2 \cdot 10^{-7} t^3}{1 + 2{,}2 \cdot 10^{-2} t - 2{,}3 \cdot 10^{-5} t^2 - 0{,}20 \cdot 10^{-10} t^3};$$

– при $n = 3$, $m = 1$

$$M_s(t) = \frac{-0{,}2 \cdot 10^{-2} + 0{,}03t + 9{,}9 \cdot 10^{-4} t^2 - 0{,}89 \cdot 10^{-9} t^3}{1 - t};$$

– при $n = 2$, $m = 2$

$$M_s(t) = \frac{7{,}0 \cdot 10^{-3} + 3{,}0 \cdot 10^{-3} t - 1{,}0 \cdot 10^{-3} t^2}{1 + 0{,}99t - 0{,}9 \cdot 10^{-6} t^2}.$$

Погрешности аппроксимации, полученные с помощью полиномиальных моделей, а также рациональных моделей для функции $M_s(t)$, сведены в таблицу.

Сравнивая полученные результаты можно утверждать, что погрешность аппроксимации, рассчитанная с помощью рациональной интерполяции, дает большую точность аппроксимации, чем при интерполяции полиномами. Проведенное

Погрешности аппроксимации, %

Вид модели \ t, ч	1000	15000	20000	25000	30000
Полином:					
3-й степени	1,5	2,3	3,2	4,04	4,9
2-й степени	1,6	2,7	3,6	4,63	5,1
Рациональная функция:					
$n=3,\ m=3$	0,8	1,2	1,65	2,04	2,46
$n=3,\ m=1$	0,9	1,3	1,8	2,24	2,66
$n=2,\ m=2$	0,9	1,4	1,85	2,32	2,8

аналогичное исследование для других аналоговых блоков также убеждает в более высокой точности оценки МН при использовании математических моделей вида (4).

Соответственно погрешности прогнозирования метрологического ресурса как основного показателя метрологической надежности при использовании указанных выше моделей составляют: 5,1 % – для полиномиальной зависимости 3-й степени; 5,4 % – для полиномиальной зависимости 2-й степени; 2,58 % – для рациональной зависимости при степенях $n=3,\ m=3$; 2,87 % – при степенях $n=3,\ m=1$; 3,0 % – при степенях $n=2,\ m=2$.

Экстраполяция полученных аналитических зависимостей на область будущих значений времени эксплуатации позволяет не только оценить показатели метрологической надежности, но и разработать практические рекомендации для их использования на этапе эксплуатации, в частности рассчитать величину межповерочных интервалов (**МПИ**), учитывая разрешающую способность используемого при поверке измерительного прибора Ω согласно [1]. Ниже приведены расчетные зависимости определения времени последующей поверки, полученные с помощью рациональных моделей.

При описании процесса изменения во времени МХ математической моделью вида (4) время предстоящей поверки рассчитывается по выражению

$$t_{i+1}=\sqrt[3]{-h+\sqrt{r^3+h^2}}+\sqrt[3]{-h-\sqrt{r^3+h^2}}-\frac{f}{3g}, \qquad (6)$$

где

$$f=b_2(1+c_1t_i);\ g=b_3(1+c_1t_i);$$

$$h=\frac{b_2^3(1+c_1t_i)^3}{27b_3^3(1+c_1t_i)^3}-\frac{b_2(1+c_1t_i)\left(b_1+c_1\left(b_0+b_2t_i^2+b_3t_i^3+\Omega+c_1\Omega\right)\right)}{6b_3^2(1+c_1t_i)^2}+$$

$$+\frac{\left(b_0c_1t_i-b_1t_i-\mathrm{b}_2t_i^2-b_3t_i^3-\Omega-c_1\Omega t_i\right)}{2b_3(1+\mathrm{c}_1t_i)};$$

$$r=\frac{\left(b_1+c_1\left(b_0+b_2t_i^2+b_3t_i^3+\Omega+c_1\Omega\right)\right)}{3b_3\left(1+c_1t_\text{i}\right)}-\frac{b_2^2\left(1+c_1t_\text{i}\right)^2}{9b_3^2\left(1+c_1t_\text{i}\right)^2}.$$

При использовании математической модели вида (4) при $n=3$, $m=3$ время последующей поверки рассчитывается по формуле

$$t_{i+1}=\sqrt[3]{-\frac{f^3}{27g^3}+\frac{fe}{6g^2}-\frac{d}{2g}+\sqrt{\left(\frac{e}{3g}-\frac{f^2}{9g^2}\right)^3+\left(\frac{f^3}{27g^3}-\frac{fe}{6g^2}+\frac{d}{2g}\right)^2}}+$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{f^3}{27g^3}+\frac{fe}{6g^2}-\frac{d}{2g}-\sqrt{\left(\frac{e}{3g}-\frac{f^2}{9g^2}\right)^3+\left(\frac{f^3}{27g^3}-\frac{fe}{6g^2}+\frac{\mathrm{d}}{2g}\right)^2}}-\frac{f}{3g}, \qquad (7)$$

где

$$g=b_3\left(1+c_1t_i+c_2t_i^2\right)-c_3\left(b_0+b_1t_i+b_2t_i^2+\Omega+c_3t_i^3\Omega+c_1t_i\Omega+c_2t_i^2\Omega\right);$$

$$f=b_2\left(1+c_1t_i+c_3t_i^3\right)-c_2\left(b_0+b_1t_i+b_3t_i^3+\Omega+c_2t_i^2\Omega+c_3t_i^3\Omega+c_1t_i^2\Omega\right);$$

$$e=b_1\left(1+c_2t_i^2+c_3t_i^3\right)-c_1\left(b_0t_i+b_2t_i^2+b_3t_i^3+\Omega+c_1t_i\Omega+c_2t_i^2\Omega+c_2t_i^3\Omega\right);$$

$$d=b_0\left(c_1t_i+c_2t_i^2+c_3t_i^3\right)-\left(b_1t_i+b_2t_i^2+b_3t_i^3+\Omega+c_1t_i\Omega+c_2t_i^2\Omega+c_3t_i^3\right).$$

Производя аппроксимацию рациональной функцией вида (4) при $n=2$, $m=2$, время предстоящей поверки рассчитывается по формуле

$$t_{i+1}=\frac{\left[c_1\left(b_0+b_2t_i^2+\Omega+c_2\Omega t_i^2+c_1\Omega\right)-b_1\left(1+c_2t_i^2\right)\right]\pm\sqrt{D}}{2[b_2(1+c_1t_i)-c_2(b_1t_i+b_0+\Omega+c_1t_i\Omega+c_2\Omega)]}, \qquad (8)$$

где

$$D=\left[b_1(1+c_2t_i^2)\text{-}c_1\left(b_0+b_2t_i^2+\mathit{\Omega}+c\Omega t_i^2+c_1\Omega\right)\right]^2-4\left[\left(b_2(1+c_1t_i)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-c_2(b_1t_i+b_0+\mathit{\Omega}+c_1t_i\mathit{\Omega}+c_2\mathit{\Omega})\right)\left(b_0t_i\left((c_1+c_2t_i)-\left(b_1t_i+b_2t_i^2+\Omega+c_1t_i\Omega+c_2t_i^2\Omega\right)\right)\right)\right].$$

Таким образом, выбор адекватного математического описания процесса изменения во времени МХ проектируемых ЭИС, дает возможность не только оценить показатели МН с достаточной для практики точностью, но и дать рекомендации для оценки величины МПИ с учетом изменения метрологических свойств при эксплуатации ЭИС.

Список литературы

1. Метрологическая надежность измерительных средств / С.В. Мищенко [и др.]. – М. : Машиностроение-1, 2001. – 96 с.
2. Floater, Michael S. Barycentric rational interpolation with no poles and high rates of approximation / Michael S. Floater, Kai Hormann // Numerische Mathematik. – 2007. – Vol. 107, No. 2. – P. 315–331.

Mathematical Modeling of Electronic Measuring Equipment at the Estimation of their Metrological Reliability

T.I. Chernyshova, M.A. Kamenskaya

Department «Designing of Radio-Electronic and Microprocessor Systems», TSTU; art_mari@rambler.ru

Key words and phrases: electronic measurement equipment; intertesting interval; metrological characteristic.

Abstract: The paper examines various kinds of mathematical models of temporal variation of metrological characteristics; the optimum kind of models with the application of rational interpolation is selected. Extrapolation of the constructed analytical dependences on the area of the future values of the operating time allows defining indicators of metrological reliability as well as intertesting intervals.

Matematische Modellierung der elektronischen Meßmitteln bei der Einschätzung ihrer metrologischen Sicherheit

Zusammenfassung: Es sind verschiedene Arten der matematischen Meßmodelle in der Zeit der metrologischen Charakteristiken betrachtet, ist die Auswahl der optimalen Form der Modelle mit Benutzung der rationalen Interpolation durchgeführt. Die Extrapolation bei diesem gebauten analytischen Abhängigkeiten auf das Gebiet der zukunftigen Werte der Zeit der Expluatation erlaubt, die Kennwerte der metrologischen Sicherheit zu bestimmen.

Modélage mathématique des moyens de mesure électroniques lors de l'estimation de leur réliabilité métrologique

Résumé: Sont examinés de différents types des modèles mathématiques mesurant dans le temps les caractéristiques métrologiques, est effectuée la selection des types optimaux des modèles avec une application de l'interpolation rationnelle. L'extrapolation des dépendances analytiques construites sur le domaine de futures valeurs de temps d'exploitation permet de définir les indices de la réliabilité métrologique ainsi que les intervalles d'intertest.

Авторы: ***Чернышова Татьяна Ивановна*** – доктор технических наук, профессор кафедры «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем»; ***Каменская Мария Анатольевна*** – аспирант, ассистент кафедры «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем», ГОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: ***Беляев Павел Серафимович*** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Переработка полимеров и упаковочное производство», проректор по учебно-инновационной деятельности, ГОУ ВПО «ТГТУ».