УДК 539.3

НАХОЖДЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПУТЕМ ОСРЕДНЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

А.В. Леонов

Кафедра «Механика композитов», ГОУ ВПО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»; anton.v.leonov@gmail.com

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: композитные материалы; несимметричная теория упругости; определяющие соотношения; осреднение; среда Коссера.

Аннотация: Получены упругие константы, входящие в определяющие соотношения несимметричной теории упругости, отражающие связь напряжений и деформаций неоднородного упругого материала.

Введение

Многочисленные исследования и эксперименты [3] подтверждают, что среда Коссера, описываемая несимметричной теорией упругости [4], предоставляет широкие возможности для достаточно точного и не чрезмерно усложненного моделирования пористых, волокнистых и клеточных материалов (например, костей). Среда Коссера характеризуется тем, что в дополнение к вектору перемещений для каждой частицы среды вводится еще один кинематический параметр – независимый вектор поворота. Такое предположение приводит к возникновению в среде моментных напряжений. Использование среды Коссера для моделирования пористых и зернистых материалов позволяет естественным образом описать разрушения в диагональных сечениях, дислокации и масштабные эффекты (образцы меньшего размера имеют большую жесткость, чем образцы большего размера из того же материала). Эти эффекты не проявляют себя в классических «безмоментных» теориях. Чтобы учитывать при использовании классической теории упругости, например, масштабные эффекты, наблюдаемые в композитных материалах с металлической матрицей, пришлось бы задавать различные упругие модули для различных размеров образцов материала. Таким образом, несимметричная теория упругости для ряда перечисленных случаев имеет существенные преимущества и предпочтительна в использовании.

Основная сложность в применении несимметричной теории упругости заключается в трудностях, возникающих при определении упругих констант, связывающих обобщенные напряжения и моментные напряжения с кинематическими параметрами для получения определяющих соотношений материалов. Описано и проведено небольшое число экспериментов [3], позволяющих идентифицировать шесть упругих констант среды Коссера лишь в самом простом изотропном случае за счет масштабного эффекта. Для таких экспериментов весьма сложно обеспечить достаточную точность измерений в силу того, что при уменьшении характерной длины образца существенно падает точность измерения градиентов деформаций. При этом экспериментально полученные упругие модули среды Коссера имеют ценность только если позволяют предсказать напряжения и деформации для условий, отличных от тех, при которых проводился эксперимент, что не всегда имеет место. В связи с указанными ограничениями наиболее распространенным подходом к определению материальных констант для среды Коссера представляется их аналитическое или численное нахождение, исходя из известной структуры композитного материала и известных свойств компонентов, составляющих этот материал.

Методы представления неоднородной периодической среды в виде макроскопически однородной среды (в частности среды Коссера) основаны на технике осреднения (гомогенизации). Исторически, самым ранним и естественным методом осреднения был метод прямого осреднения, разрабатывавшийся в том числе Хашиным и Штрикманом и заключающийся в нахождении средних напряжений и деформаций для представительного объема образца. Такой метод подходит для осреднения любой неоднородной среды, но требует проведения дополнительных экспериментов и не использует знание о микроструктуре композита. Асимптотический метод осреднения, предложенный Бахваловым и Панасенко, и примененный для упругих композитов в работе [2], специально предназначен для осреднения композитных материалов с известной структурой. Метод заключается в асимптотическом разложении перемещений, напряжений и моментных напряжений по малому параметру, характеризующему размер ячейки периодичности композита. Преимущество этого метода, помимо строгости математической постановки, заключается и в возможности оценки погрешности аппроксимации. Существуют и более сложные методы осреднения, например метод интегральных преобразований Кунина, основанный на задании нелокальных интегральных определяющих соотношений. Подход Кунина позволяет уйти от определения напряжений и деформаций и осуществлять процедуру осреднения непосредственно для определяющих соотношений.

Проведем исследование способа нахождения определяющих соотношений несимметричной теории упругости с использованием методов осреднения композитов с периодической структурой. Рассмотрим композит с жесткой упругой матрицей и регулярными упругими включениями меньшей жесткости, для которого численными методами определяются материальные константы среды Коссера и найдем подтверждение существенности эффектов моментной упругости.

Процедура определения модулей среды Коссера

Традиционным методом упрощения моделей сред, описывающих неоднородные материалы с периодической структурой, является ее замена однородной средой с эквивалентными свойствами. Альтернативный подход, который и будет использоваться в дальнейшем, заключается в рассмотрении обобщенного однородного континуума вместо неоднородной среды. Такой обобщенный континуум характеризуется бóльшим числом степеней свободы, как, например, континуум Коссера, для описания которого помимо вектора перемещений необходим также вектор независимого вращения, привносящий в трехмерном случае три дополнительных кинематических степени свободы по отношению к обычной упругой среде.

Для упрощения выкладок подход к нахождению эффективных модулей среды Коссера будет показан для двухмерного случая. В качестве тела будем рассматривать квадрат V со стороной l. Введем вектор перемещения для неоднородного материала: $\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$. Соответствующая эквивалентная среда Коссера будет описываться двумя параметрами: вектором перемещения $\vec{U} = (U_1, U_2, 0)$ и вектором вращения $\vec{\Phi} = (0, 0, \Phi)$.

Формальная связь между $\vec{u}$ и парой $(\vec{U}, \vec{\Phi})$ получается непосредственно из осреднения по объему V (обозначенному далее угловыми скобками):

$$\vec{U}(\vec{X}) = \langle \vec{u} \rangle; \tag{1}$$

$$\vec{\Phi}(\vec{X}) = \frac{6}{l} \left\langle (\vec{x} - \vec{X}) \times \vec{u} \right\rangle. \tag{2}$$

Перемещение $\vec{u}$ разложим на полиномиальную часть $\vec{u}^*$ и возмущение $\vec{u}^p$: $\vec{u} = \vec{u}^* + \vec{u}^p$. Порядок членов, удерживаемый в полиномиальной части, продиктован числом степеней свободы в обобщенном континууме. Для среды Коссера будем использовать многочлены третьего порядка [5], предварительно введя безразмерные координаты $\tilde{x}_i = \frac{x_i}{l}$:

$$u_1^* = B_{11}\tilde{x}_1 + B_{12}\tilde{x}_2 - C_{23}\tilde{x}_2^2 + 2C_{13}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + D_{12}\left(\tilde{x}_2^3 - 3\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2\right); \tag{3}$$

$$u_2^* = B_{12}\tilde{x}_1 + B_{22}\tilde{x}_2 - C_{13}\tilde{x}_1^2 + 2C_{23}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + D_{12}\left(\tilde{x}_1^3 - 3\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2\right). \tag{4}$$

Эффективные модули для упругой среды определяются путем минимизации упругой энергии деформации для отдельно взятой ячейки периодичности. Упругая энергия деформации для среды Коссера является квадратичной формой от параметров $\left(\underset{\sim}{\varepsilon}, \vec{\Omega} - \vec{\Phi}, \vec{K}\right)$, где

$$\varepsilon_{ij}(\vec{X}) = \frac{1}{2}\left(U_{i,j} + U_{j,i}\right); \tag{5}$$

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0; \quad \Omega_3 = \frac{1}{2}\left(U_{2,1} - U_{1,2}\right); \tag{6}$$

$$K_i = \Phi_{,i}\,. \tag{7}$$

Учитывая соотношение (2), получаем из (7)

$$\vec{K} = \frac{6}{l^2}\left\langle \vec{\nabla}(\vec{x} \times \vec{u})\vec{e}_3 \right\rangle - \frac{6}{l^2}\vec{\nabla}\left((\vec{X} \times \vec{U})\vec{e}_3\right). \tag{8}$$

Используя полиномиальные выражения (3) и (4) для перемещений, получим зависимость описанных параметров от полиномиальных коэффициентов:

$$B_{ij} = l\varepsilon_{ij}^*; \tag{9}$$

$$\frac{D_{12}}{10l} + \frac{6}{l}\left\langle \vec{x} \times \vec{u}^p \right\rangle = \Theta^*; \tag{10}$$

$$-\frac{2C_{13}}{l^2} + \frac{6}{l^2}\left\langle x_1 u_{2,1}^p \right\rangle = K_1^*; \tag{11}$$

$$\frac{2C_{23}}{l^2} - \frac{6}{l^2}\left\langle x_2\, u_{1,2}^p \right\rangle = K_2^*. \tag{12}$$

Пусть C_{ijkl} – локальный тензор модулей упругости неоднородной среды. Упругая энергия эквивалентной однородной среды Коссера будет достигать минимума на функционале

$$W(\vec{u}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(\vec{u})\sigma_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(\vec{u})\,C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}(\vec{u}). \qquad (13)$$

Процедура минимизации функционала (13) проводится для всех периодических полей перемещений $\vec{u}^{\,p}$. Полученное решение для $\vec{u}^{\,p}$ линейно зависит от коэффициентов, входящих в многочлены (3) и (4). Эти коэффициенты определяются из решения линейной системы уравнений (9) – (12).

Обобщенные напряжения и моментные напряжения получаются путем дифференцирования функционала

$$\Psi\left(\underset{\sim}{\varepsilon}^*, \Theta^*, K^*\right) = \min_{\vec{u}}\langle W(\vec{u})\rangle, \qquad (14)$$

по параметрам $\underset{\sim}{\varepsilon}^*, \Theta^*, K^*$.

Изложенный подход можно распространить и на трехмерный случай. Полиномиальное разложения вектора перемещения в трехмерном случае принимает вид

$$u_i^* = B_{i1}\tilde{x}_1 + B_{i2}\tilde{x}_2 + B_{i3}\tilde{x}_3 + C_{i1}\tilde{x}_1^2 + C_{i2}\tilde{x}_2^2 + C_{i3}\tilde{x}_3^2 + 2C_{i4}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + 2C_{i5}\tilde{x}_2\tilde{x}_3 +$$
$$+ 2C_{i6}\tilde{x}_3\tilde{x}_1 + D_{i1}\tilde{x}_1^3 + D_{i2}\tilde{x}_2^3 + D_{i3}\tilde{x}_3^3 + 3D_{i4}\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2 + 3D_{i5}\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2 + 3D_{i6}\tilde{x}_2^2\tilde{x}_3 +$$
$$+ 3D_{i7}\tilde{x}_2\tilde{x}_3^3 + 3D_{i8}\tilde{x}_3^2\tilde{x}_1 + 3D_{i9}\tilde{x}_3\tilde{x}_1^2 + \varepsilon_i\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3. \qquad (15)$$

Выражения для диагональных компонент тензора искривлений получаются по аналогии с (8):

$$K_{11} = C_{34} - C_{26} + 3(D_{34} - D_{29})x_1 + \left(3D_{25} - \frac{\varepsilon_1}{2}\right)x_2 + \left(\frac{\varepsilon_3}{2} - 3D_{28}\right)x_3;$$

$$K_{22} = C_{15} - C_{34} + \left(\frac{\varepsilon_1}{2} - 3D_{34}\right)x_1 + 3(D_{16} - D_{35})x_2 + \left(3D_{17} - \frac{\varepsilon_3}{2}\right)x_3;$$

$$K_{33} = C_{26} - C_{15} + \left(3D_{29} - \frac{\varepsilon_1}{2}\right)x_1 + \left(\frac{\varepsilon_2}{2} - 3D_{16}\right)x_2 + 3(D_{28} - D_{17})x_3.$$

Поскольку тензор искривлений должен иметь нулевой след, приведенный вид полиномов не позволяет описать сферическую кривизну единичной ячейки. Это становится возможным только при выборе полиномов четвертого порядка:

$$u_1 = \varepsilon_{11}x_1 + \varepsilon_{12}x_2 + \varepsilon_{13}x_3 - K_{31}x_1x_2 - \frac{K_{32}}{2}x_2^2 + K_{21}x_1x_3 + \frac{K_{23}}{2}x_3^2 +$$
$$+ 2(S_{22} - S_{33})x_2x_3 + 10\Theta_3\left(x_2^3 - 3x_1^2x_2\right) - 10\Theta_2\left(x_3^3 - 3x_1^2x_3\right) + \frac{10\,\mathrm{tr}\left(\underset{\sim}{S}\right)}{3}\left(x_2^2 - x_3^2\right)x_2x_3;$$

$$u_2 = \varepsilon_{12}x_1 + \varepsilon_{22}x_2 + \varepsilon_{23}x_3 + K_{32}x_1x_2 + \frac{K_{31}}{2}x_1^2 - K_{12}x_2x_3 - \frac{K_{13}}{2}x_3^2 -$$
$$- 2(S_{11} - S_{33})x_1x_3 - 10\Theta_3\left(x_1^3 - 3x_1x_2^2\right) + 10\Theta_1\left(x_3^3 - 3x_2^2x_3\right) + \frac{10\,\mathrm{tr}\left(\underset{\sim}{S}\right)}{3}\left(x_3^2 - x_1^2\right)x_1x_3;$$

$$u_3 = \varepsilon_{31}x_1 + \varepsilon_{23}x_2 + \varepsilon_{33}x_3 - K_{23}x_1x_3 - \frac{K_{21}}{2}x_1^2 + K_{13}x_2x_3 + \frac{K_{12}}{2}x_2^2 +$$

$$+ 2(S_{11} - S_{22})x_1x_2 + 10\Theta_2\left(x_1^3 - 3x_1^2x_3\right) - 10\Theta_1\left(x_2^3 - 3x_1x_3^2\right) + \frac{10\,\mathrm{tr}\left(\underset{\sim}{S}\right)}{3}\left(x_1^2 - x_2^2\right)x_1x_2 .$$

Здесь тензор $\underset{\sim}{S}$ обозначает девиаторную часть тензора $\underset{\sim}{K}$.

Пример численного расчета модулей среды Коссера

В качестве примера выбран неоднородный материал со слоистой структурой, для которого будут найдены материальные модули эквивалентного однородного материала, представляющего собой континуум Коссера. Описанная выше процедура осреднения реализуется посредством метода конечных элементов. Связь между тензорами напряжений и моментных напряжений с одной стороны и деформациями и искривлениями с другой показана далее

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{1111} & Y_{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{1122} & Y_{1111} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{1212} & Y_{1221} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{1221} & Y_{2121} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{3131} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{11} + \Theta \\ \varepsilon_{11} + \Theta \\ \mathrm{K}_1 \\ \mathrm{K}_2 \end{bmatrix}. \qquad (16)$$

Ненулевые компоненты обобщенного тензора упругости $\underset{\sim}{Y}$ находятся из уравнений (1), (2) и (8) путем подстановки выражений (3), (4) и дифференцировании (14) с поочередным заданием невырожденных коэффициентов.

На границы ячейки со сторонами единичной длины накладываются условия периодичности. Коэффициенты в выражениях (3), (4) задаются как глобальные степени свободы для всех элементов. Используемый численный метод осреднения периодических структур изложен в [2].

Для данного примера модули среды Коссера выявляются у неоднородного упругого композитного материала, составленного из жесткого материала (модуль Юнга $E = 212$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$) и мягких включений ($E = 10$ ГПа, $\nu = 0{,}5$).

В работе [6] дается теоретическое обоснование того факта, что именно в материалах с мягкими включениями явно проявляются моментные свойства среды. На примере упругого композитного материала с регулярными сферическими включениями показано, что упругая энергия деформации эффективного упругого материала никогда не превышает упругую энергию деформации эффективного материала Коссера. Таким образом, учет моментных эффектов может лишь увеличить упругую энергию деформации эффективного материала, и будет полезен только при осреднении материалов с включениями менее жесткими, чем матрица.

В результате проведения описанной процедуры осреднения для рассматриваемого примера получаются следующие обобщенные модули упругости:

$$Y_{1111} = 132 \text{ ГПа}; \quad Y_{1122} = 63 \text{ ГПа};$$

$$Y_{2222} = 80 \text{ ГПа}; \quad Y_{1212} = 642 \text{ ГПа};$$

$$Y_{1221} = -728 \text{ ГПа}; \quad Y_{2222} = 825 \text{ ГПа};$$

$$Y_{3131} = 2{,}6 \text{ ГПа}; \quad Y_{3232} = 3 \text{ ГПа}.$$

Результаты рассматриваемого примера согласуются с теоретическим результатом, подтверждая существенность моментных эффектов для тела с мягкими включениями.

Заключение

В работе продемонстрирована реализация метода нахождения материальных констант среды Коссера, являющихся эффективными характеристиками для неоднородного упругого тела. Таким образом, указан один из подходов к получению определяющих соотношений моментной теории упругости, необходимых для построения моделей однородных тел, поведение которых совпадает с исследуемыми неоднородными телами с мягкими включениями, и для последующего решения соответствующих краевых задач несимметричной теории упругости для однородной среды [1].

Список литературы

1. Победря, Б.Е. Статическая задача несимметричной теории упругости для изотропной среды / Б.Е. Победря // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. – 2005. – № 1. – С. 54–59.

2. Бахвалов, Н.С. Осреднение процессов в периодических средах / Н.С. Бахвалов, Г.П. Панасенко. – М. : Наука, 1984. – 352 с.

3. Roderic, Lakes. Experimental Methods for Study of Cosserat Elastic Solids and other Generalized Elastic Continua / Roderic Lakes : ed. H. Mühlhaus, J. Wiley // Continuum Models for Materials with Micro-Structure. – 1995. – No. 1. – P. 1–22.

4. Nowacki, W. Teoria Niesymetrycznej Sprężystości / W. Nowacki. – Warsawa : PWN, 1971. – 246 c.

5. Forest, S. Homogenization Methods and the Mechanics of Generalized Continua. Part 2 / S. Forest // Theoretical and Applied Mechanics. – 2002. – Vol. 28–29. – P. 113–143.

6. Bigoni, D. Analytical Derivation of Cosserat Moduli via Homogenization of Heterogeneous Elastic Materials / D. Bigoni, W.J. Drugan // Journal of Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 74. – P. 741–753.

Detection of Defining Relationships of Non-Symmetric Theory of Elasticity via Averaging of Heterogeneous Elastic Material

A.V. Leonov

Department "Composite Mechanics", Lomonosov Moscow State University; anton.v.leonov@gmail.com

Key words and phrases: non-symmetric theory of elasticity; Kosser continuum; defining relationships; composite materials; averaging.

Abstract: The elastic constants included in the defining relationships of the non-symmetric theory of elasticity are produced; they reflect the connection between the tension and deformation of heterogeneous elastic material.

Auffinden der Bestimmungsverhältnissen der unsymmetrischen Theorie der Elastizität durch die Mittlerung des ungleichartigen elastischen Stoffes

Zusammenfassung: Es sind die elastischen Konstanten, die in die bestimmenden Verhältnisse der unsymmetrischen Theorie der Elastizität einkommen und die Verbindung der Spannungen und die Deformation des ungleichartigen elastischen Stoffes wiedergeben, erhalten.

Recherche des relations déterminantes de la théorie de l'élasticité par la voie de la régularisation du matériel élastique hétérogène

Résumé: Sont obtenues les constantes élastiques qui entrent dans les relations déterminantes de la théorie de l'élasticité asymétrique reflétant le lien des tensions et des déformations du matériel élastique hétérogène.

Автор: ***Леонов Антон Владимирович*** **–** аспирант кафедры «Механика композитов», ГОУ ВПО «МГУ им. М.В. Ломоносова».

Рецензент: ***Куликов Геннадий Михайлович*** **–** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и механика», ГОУ ВПО «ТГТУ».
