

УДК 539.3

СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОИСТОЙ КОМПОЗИТНОЙ ОБОЛОЧКИ

Г.М. Куликов, С.В. Плотникова, М.Г. Куликов

*Кафедра «Прикладная математика и механика», ГОУ ВПО «ТГТУ»;
kulikov@apmath.tstu.ru*

Ключевые слова и фразы: геометрически точный элемент оболочки; пьезоэлектричество; слоистая композитная оболочка.

Аннотация: Разработан алгоритм численного решения связанной задачи пьезоэлектричества для слоистой композитной оболочки, подверженной электро-механическому нагружению, на основе 7-параметрической модели. Построен новый геометрически точный билинейный трехмерный элемент оболочки с распределенными пьезоэлектрическими сенсорами и актюаторами путем использования нетрадиционного аналитического интегрирования. С помощью этого конечного элемента получено решение связанных задач электроупругости для пьезоэлектрической спиральной оболочки и композитной пластины с пьезоэлектрическими накладками.

Введение

В последнее время большое внимание уделяется разработке *изопараметрических* трехмерных конечных элементов композитных оболочек с распределенными сенсорами и актюаторами [1–5]. Их особенностью является то, что начальная и деформированная конфигурации оболочки интерполируются единообразно в глобальной декартовой системе координат, что дает возможность корректно описать перемещения оболочки как жесткого тела. Однако изопараметрический элемент оболочки является неэффективным при расчете адаптивных композитных конструкций, для которых важное значение имеет быстрое реагирование на нежелательные внешние силовые воздействия.

Альтернативными являются *геометрически точные* конечные элементы оболочки на основе деформационных соотношений 6-, 7- и 9-параметрических пространственных моделей оболочки [6–9], которые точно представляют произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела в криволинейных координатах отсчетной поверхности. Термин «геометрически точный» означает, что отсчетная поверхность оболочки описывается аналитически заданными функциями, в частности сплайнами, которые составляют основу современных САД-систем. При этом векторы перемещений внешних и срединной поверхностей представляются в локальном базисе, связанном с отсчетной поверхностью оболочки. Именно это обстоятельство позволяет повысить производительность конечноэлементного кода и эффективно использовать его в контроллерах «умных» конструкций.

В настоящей статье разработан новый геометрически точный 7-параметрический билинейный элемент оболочки для расчета тонкостенных композитных конструкций с распределенными сенсорами и актюаторами под действием электромеханического нагружения. Для борьбы с известным в методе конечных элементов (МКЭ) явлением запирания как сдвигового, так и мембранного использована гибридная модель МКЭ [8]. Согласно этой модели, деформации и результирующие напряжения внутри элемента оболочки аппроксимируются самостоятельно, отдельно от перемещений. Необходимо отметить, что 6-параметрическая модель [10, 11], постулирующая равномерное распределение поперечных нормальных деформаций по толщине пакета слоев, приводит к пуассоновскому запиранию элемента оболочки в поперечном направлении, в то время как 7-параметрическая модель свободна от указанного недостатка. В работе [12] недавно построен геометрически точный 7-параметрический элемент оболочки для решения актюаторной задачи в случае, когда на электроды, расположенные на внешних поверхностях пьезоэлектрических слоев, подается заданное напряжение.

Кинематика оболочки и деформационные соотношения

Рассмотрим оболочку, состоящую из N тонких слоев постоянной толщины $h_n = z_n - z_{n-1}$, включая ℓ -й пьезоэлектрический слой PZT толщиной h_ℓ , где z_n – поперечная координата поверхности Ω_n (рис. 1). Криволинейные ортогональные координаты θ_1, θ_2 отсчитываются вдоль линий главных кривизн, а координата θ_3 направлена в поперечном направлении. Здесь и ниже индекс n обозначает принадлежность величины к n -му слою и изменяется в пределах от 1 до N ; индекс пьезоэлектрического слоя $\ell = i_1, i_2, \dots, i_L$, где L – число пьезоэлектрических слоев, прикрепленных к внешним поверхностям или внедренных в тело оболочки; греческие индексы α, β принимают значения 1, 2; индексы i, j принимают значения 1, 2, 3; греческий индекс A определяет принадлежность величины к верхней или нижней поверхностям и принимает значения $-, +$.

Поле перемещений аппроксимируется по толщине оболочки согласно следующему закону [8]:

$$u_\alpha = N^- u_\alpha^- + N^+ u_\alpha^+, \quad u_3 = L^- u_3^- + L^M u_3^M + L^+ u_3^+, \quad (1)$$

$$N^- = \frac{1}{h} (z^+ - \theta_3), \quad N^+ = \frac{1}{h} (\theta_3 - z^-), \quad (2)$$

$$L^- = N^- (N^- - N^+), \quad L^M = 4N^- N^+, \quad L^+ = N^+ (N^+ - N^-), \quad (3)$$

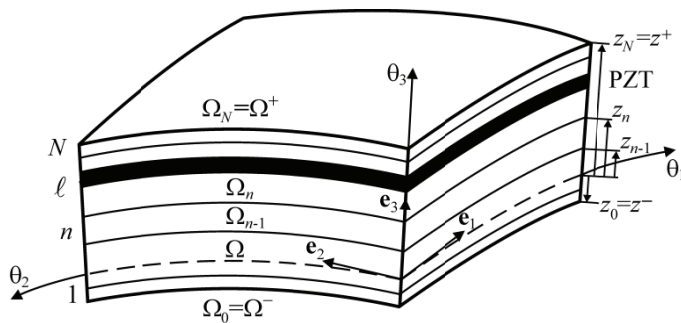


Рис. 1. Слоистая оболочка с внедренным пьезоэлектрическим слоем (PZT)

где $N^A(\theta_3)$ и $L^A(\theta_3)$, $L^M(\theta_3)$ – полиномы Лагранжа первого и второго порядков соответственно; $h = z^+ - z^-$ – толщина оболочки; $z^- = z_0$ и $z^+ = z_N$ – поперечные координаты лицевых поверхностей оболочки Ω^- и Ω^+ ; $u_i^A(\theta_1, \theta_2)$ – тангенциальные и поперечное перемещения лицевых поверхностей; $u_3^M(\theta_1, \theta_2)$ – поперечное перемещение срединной поверхности Ω^M .

Представим векторы перемещений лицевых поверхностей оболочки в базисе отсчетной поверхности

$$\mathbf{u}^A = \sum_i u_i^A \mathbf{e}_i. \quad (4)$$

В этом случае деформационные соотношения 7-параметрической теории оболочек первого порядка [8] могут быть записаны в виде:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = N^- \varepsilon_{\alpha\beta}^- + N^+ \varepsilon_{\alpha\beta}^+, \quad \varepsilon_{33} = N^- \varepsilon_{33}^- + N^+ \varepsilon_{33}^+, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \varepsilon_{\alpha 3}^M, \quad \varepsilon_{\alpha 3}^M = \frac{1}{2} (\varepsilon_{\alpha 3}^- + \varepsilon_{\alpha 3}^+),$$

где $\varepsilon_{ij}^A(\theta_1, \theta_2)$ – компоненты тензора деформаций лицевых поверхностей оболочки:

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^A = c_\alpha^A \lambda_{\alpha\beta}^A + c_\beta^A \lambda_{\beta\alpha}^A, \quad \varepsilon_{33}^A = \beta_3^A, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3}^A = c_\alpha^A \beta_\alpha^A + \lambda_{3\alpha}^A, \quad (6)$$

$$\lambda_{\alpha\alpha}^A = \frac{1}{A_\alpha} u_{\alpha,\alpha}^A + B_\beta u_\beta^A + k_\alpha u_3^A, \quad \lambda_{\beta\alpha}^A = \frac{1}{A_\alpha} u_{\beta,\alpha}^A - B_\beta u_\alpha^A \quad \text{для } \beta \neq \alpha, \quad (7)$$

$$\lambda_{3\alpha}^A = \frac{1}{A_\alpha} u_{3,\alpha}^A - k_\alpha u_\alpha^A, \quad \beta_\alpha^A = \frac{1}{h} (u_\alpha^+ - u_\alpha^-),$$

$$\beta_3^- = \frac{1}{h} (-3u_3^- + 4u_3^M - u_3^+), \quad \beta_3^+ = \frac{1}{h} (u_3^- - 4u_3^M + 3u_3^+),$$

$$c_\alpha^A = 1 + k_\alpha z^A, \quad B_\alpha = \frac{1}{A_\alpha A_\beta} A_{\beta,\alpha} \quad \text{для } \beta \neq \alpha,$$

где A_α и k_α – параметры Ламе и главные кривизны отсчетной поверхности; c_α^A – компоненты тензора сдвига на лицевых поверхностях оболочки; символ $(\)_{,\alpha}$ означает частную производную по координате θ_α . Можно показать, что деформационные соотношения (5), (6) точно представляют перемещения оболочки как твердого целого в криволинейных конвективных координатах отсчетной поверхности [8].

Описание электрического поля

Полагаем, что электрический потенциал распределен по толщине пакета слов согласно гипотезе ломаной линии [13]:

$$\varphi = \sum_n (\bar{N}_n^- \varphi_{n-1} + \bar{N}_n^+ \varphi_n), \quad (8)$$

$$\bar{N}_n^A = \begin{cases} N_n^A, & \theta_3 \in [z_{n-1}, z_n], \\ 0, & \theta_3 \notin [z_{n-1}, z_n] \end{cases} \quad (9)$$

$$N_n^- = \frac{1}{h_n}(z_n - \theta_3), \quad N_n^+ = \frac{1}{h_n}(\theta_3 - z_{n-1}), \quad \theta_3 \in [z_{n-1}, z_n],$$

где $\varphi_{n-1}(\theta_1, \theta_2)$, $\varphi_n(\theta_1, \theta_2)$ – значения электрического потенциала на нижней и верхней поверхностях n -го слоя.

Связь между вектором напряженности электрического поля \mathbf{E} и электрическим потенциалом φ имеет вид

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (10)$$

Таким образом, вектор напряженности электрического поля имеет следующее распределение по толщине n -го слоя:

$$E_\alpha^{(n)} = N_n^- E_\alpha^{(n)-} + N_n^+ E_\alpha^{(n)+}, \quad E_3^{(n)} = -\frac{1}{h_n}(\varphi_n - \varphi_{n-1}), \quad (11)$$

$$E_\alpha^{(n)-} = -\frac{1}{A_\alpha}\varphi_{n-1,\alpha}, \quad E_\alpha^{(n)+} = -\frac{1}{A_\alpha}\varphi_{n,\alpha},$$

где $E_\alpha^{(n)}$ – тангенциальные компоненты вектора напряженности электрического поля n -го слоя. Как видим, поперечная компонента электрического поля $E_3^{(n)}$ постоянна по толщине пьезоэлектрического слоя.

Уравнения состояния линейной теории электроупругости

Уравнения состояния линейной электроупругости для пьезоэлектрического ℓ -го слоя с зеркальной симметрией на поверхности, параллельной отсчетной, могут быть записаны в форме [14]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^{(\ell)}\boldsymbol{\sigma}^{(\ell)} + (\mathbf{d}^{(\ell)})^T \mathbf{E}^{(\ell)}, \quad (12)$$

$$\mathbf{D}^{(\ell)} = \mathbf{d}^{(\ell)}\boldsymbol{\sigma}^{(\ell)} + \boldsymbol{\zeta}^{(\ell)}\mathbf{E}^{(\ell)}, \quad (13)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор деформаций; $\boldsymbol{\sigma}^{(\ell)}$ – вектор напряжений; $\mathbf{E}^{(\ell)}$ – вектор напряженности электрического поля; $\mathbf{D}^{(\ell)}$ – вектор смещения электрического поля; $\mathbf{A}^{(\ell)}$ – матрица податливостей; $\mathbf{d}^{(\ell)}$ – матрица пьезоэлектрических постоянных; $\boldsymbol{\zeta}^{(\ell)}$ – матрица диэлектрических постоянных:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{12}]^T, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(\ell)} = [\sigma_{11}^{(\ell)} \ \sigma_{22}^{(\ell)} \ \sigma_{33}^{(\ell)} \ \sigma_{23}^{(\ell)} \ \sigma_{13}^{(\ell)} \ \sigma_{12}^{(\ell)}]^T, \quad (14)$$

$$\mathbf{E}^{(\ell)} = [E_1^{(\ell)} \ E_2^{(\ell)} \ E_3^{(\ell)}]^T, \quad \mathbf{D}^{(\ell)} = [D_1^{(\ell)} \ D_2^{(\ell)} \ D_3^{(\ell)}]^T,$$

$$\mathbf{A}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(\ell)} & A_{12}^{(\ell)} & A_{13}^{(\ell)} & 0 & 0 & A_{16}^{(\ell)} \\ & A_{22}^{(\ell)} & A_{23}^{(\ell)} & 0 & 0 & A_{26}^{(\ell)} \\ & & A_{33}^{(\ell)} & 0 & 0 & A_{36}^{(\ell)} \\ & & & A_{44}^{(\ell)} & A_{45}^{(\ell)} & 0 \\ & & & & A_{55}^{(\ell)} & 0 \\ \text{sym.} & & & & & A_{66}^{(\ell)} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{d}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14}^{(\ell)} & d_{15}^{(\ell)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24}^{(\ell)} & d_{25}^{(\ell)} & 0 \\ d_{31}^{(\ell)} & d_{32}^{(\ell)} & d_{33}^{(\ell)} & 0 & 0 & d_{36}^{(\ell)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\zeta}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} \zeta_{11}^{(\ell)} & \zeta_{12}^{(\ell)} & 0 \\ & \zeta_{22}^{(\ell)} & 0 \\ \text{sym.} & & \zeta_{33}^{(\ell)} \end{bmatrix}.$$

Разрешая уравнение (12) относительно вектора напряжений, и подставляя вектор напряжений в уравнение состояния (13), получим:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\ell)} = \mathbf{C}^{(\ell)} \boldsymbol{\varepsilon} - \left(\mathbf{e}^{(\ell)} \right)^T \mathbf{E}^{(\ell)}, \quad (16)$$

$$\mathbf{D}^{(\ell)} = \mathbf{e}^{(\ell)} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(\ell)} \mathbf{E}^{(\ell)}, \quad (17)$$

где $\mathbf{C}^{(\ell)}$ – матрица материальных жесткостей; $\mathbf{e}^{(\ell)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\ell)}$ – пьезоэлектрическая и диэлектрическая матрицы:

$$\mathbf{C}^{(\ell)} = \left(\mathbf{A}^{(\ell)} \right)^{-1}, \quad \mathbf{e}^{(\ell)} = \mathbf{d}^{(\ell)} \mathbf{C}^{(\ell)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(\ell)} = \boldsymbol{\zeta}^{(\ell)} - \mathbf{d}^{(\ell)} \mathbf{C}^{(\ell)} \left(\mathbf{d}^{(\ell)} \right)^T. \quad (18)$$

Смешанное вариационное уравнение для расчета слоистой электроупругой оболочки

Предлагаемая 7-параметрическая теория пьезоэлектрических оболочек первого порядка основывается на аппроксимациях в поперечном направлении перемещений (1), деформаций (5), электрического потенциала (8) и вектора напряженности электрического поля (11). Введем также согласованные с (5) аппроксимации для независимых от перемещений деформаций:

$$\widehat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = N^- \widehat{\varepsilon}_{\alpha\beta}^- + N^+ \widehat{\varepsilon}_{\alpha\beta}^+, \quad \widehat{\varepsilon}_{33} = N^- \widehat{\varepsilon}_{33}^- + N^+ \widehat{\varepsilon}_{33}^+, \quad \widehat{\varepsilon}_{\alpha 3} = \widehat{\varepsilon}_{\alpha 3}^M, \quad (19)$$

где $\widehat{\varepsilon}_{\alpha\beta}^A(\theta_1, \theta_2)$, $\widehat{\varepsilon}_{33}^A(\theta_1, \theta_2)$ – независимо введенные тангенциальные и поперечные нормальные деформации лицевых поверхностей; $\widehat{\varepsilon}_{\alpha 3}^M(\theta_1, \theta_2)$ – независимо введенные деформации поперечного сдвига срединной поверхности.

Подставляя аппроксимации (1), (5), (8), (11) и (19) в смешанное вариационное уравнение пространственной теории пьезоэлектричества [15], полагая метрики поверхностей, параллельных отсчетной равными метрике срединной поверхности и вводя результирующие напряжений:

$$H_{\alpha\beta}^A = \sum_n \int_{z_{n-1}}^{z_n} \sigma_{\alpha\beta}^{(n)} N^A d\theta_3, \quad H_{33}^A = \sum_n \int_{z_{n-1}}^{z_n} \sigma_{33}^{(n)} N^A d\theta_3, \quad (20)$$

$$H_{\alpha 3} = \sum_n \int_{z_{n-1}}^{z_n} \sigma_{\alpha 3}^{(n)} d\theta_3,$$

получим вариационное уравнение Ху-Васидзу для 7-параметрического слоистого пьезоэлектрического элемента оболочки

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\delta \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \left(\mathbf{H} - \mathbf{D}_{uu} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{D}_{u\varphi} \boldsymbol{\varepsilon} \right) + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \left(\mathbf{D}_{\varphi u} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{D}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\varepsilon} \right) + \right. \quad (21)$$

$$\left. + \delta \mathbf{H}^T \left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon} \right) - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{H} + \delta \mathbf{v}^T \mathbf{p} + \delta \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{q} \right] A_1 A_2 c_1^M c_2^M \ell_1 \ell_2 d\xi_1 d\xi_2 = 0,$$

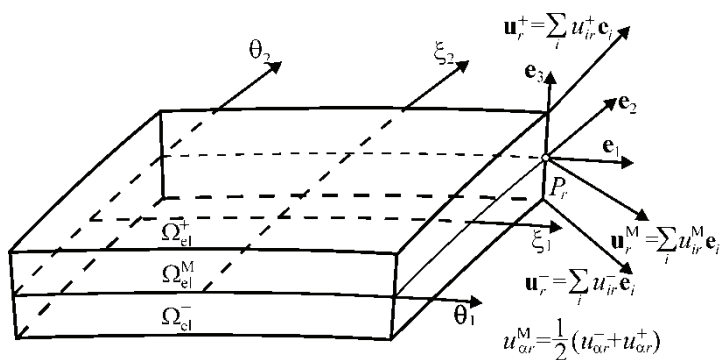


Рис. 2. Геометрически точный 7-параметрический элемент оболочки, где P_r – узловая точка ($r = \overline{1, 4}$)

где $\xi_\alpha = (\theta_\alpha - d_\alpha)/\ell_\alpha$ – нормализованные криволинейные координаты элемента (рис. 2); d_α – координаты центра элемента; $2\ell_\alpha$ – длина элемента в направлении θ_α ; $c_\alpha^M = 1 + k_\alpha z^M$ – компоненты тензора сдвига на срединной поверхности оболочки; $z^M = (z^- + z^+)/2$ – поперечная координата срединной поверхности Ω^M ; \mathbf{v} – вектор перемещений внешних поверхностей; $\mathfrak{E}, \widehat{\mathfrak{E}}$ – векторы зависимых и независимых от поля перемещений деформаций внешних поверхностей соответственно; \mathbf{H} – вектор результирующих напряжений (20); $\boldsymbol{\chi}$ – вектор электрических потенциалов на внешних поверхностях оболочки и поверхностях раздела слоев; $\boldsymbol{\mathfrak{E}}$ – вектор напряженности электрического поля в слоях оболочки; \mathbf{p} – вектор поверхностных нагрузок; \mathbf{q} – вектор поверхностных зарядов на внешних поверхностях оболочки и поверхностях раздела слоев; $\mathbf{D}_{мш}, \mathbf{D}_{иф}, \mathbf{D}_{фр}$ – механическая, пьезоэлектрическая и диэлектрическая матрицы, определяемые по формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [u_1^- \ u_2^- \ u_3^- \ u_1^+ \ u_2^+ \ u_3^+ \ u_3^M]^T, \quad \boldsymbol{\chi} = [\varphi_0 \ \varphi_1 \ \dots \ \varphi_N]^T, \quad (22) \\ \mathfrak{E} &= [\varepsilon_{11}^- \ \varepsilon_{11}^+ \ \varepsilon_{22}^- \ \varepsilon_{22}^+ \ \varepsilon_{33}^- \ \varepsilon_{33}^+ \ 2\varepsilon_{12}^- \ 2\varepsilon_{12}^+ \ 2\varepsilon_{13}^M \ 2\varepsilon_{23}^M]^T, \\ \widehat{\mathfrak{E}} &= [\widehat{\varepsilon}_{11}^- \ \widehat{\varepsilon}_{11}^+ \ \widehat{\varepsilon}_{22}^- \ \widehat{\varepsilon}_{22}^+ \ \widehat{\varepsilon}_{33}^- \ \widehat{\varepsilon}_{33}^+ \ 2\widehat{\varepsilon}_{12}^- \ 2\widehat{\varepsilon}_{12}^+ \ 2\widehat{\varepsilon}_{13}^M \ 2\widehat{\varepsilon}_{23}^M]^T, \\ \mathbf{H} &= [H_{11}^- \ H_{11}^+ \ H_{22}^- \ H_{22}^+ \ H_{33}^- \ H_{33}^+ \ H_{12}^- \ H_{12}^+ \ H_{13} \ H_{23}]^T, \\ \boldsymbol{\mathfrak{E}} &= [(\boldsymbol{\mathfrak{E}}^{(1)})^T \ (\boldsymbol{\mathfrak{E}}^{(2)})^T \ \dots \ (\boldsymbol{\mathfrak{E}}^{(N)})^T]^T, \\ \boldsymbol{\mathfrak{E}}^{(n)} &= [E_1^{(n)-} \ E_1^{(n)+} \ E_2^{(n)-} \ E_2^{(n)+} \ E_3^{(n)}]^T, \\ \mathbf{p} &= [-p_1^- \ -p_2^- \ -p_3^- \ p_1^+ \ p_2^+ \ p_3^+ \ 0]^T, \\ \mathbf{q} &= [q_s^{(0)} \ q_s^{(1)} \ \dots \ q_s^{(N)}]^T, \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_{uu} = \begin{bmatrix} D_{11}^{00} & D_{11}^{01} & D_{12}^{00} & D_{12}^{01} & D_{13}^{00} & D_{13}^{01} & D_{16}^{00} & D_{16}^{01} & 0 & 0 \\ & D_{11}^{11} & D_{12}^{01} & D_{12}^{11} & D_{13}^{01} & D_{13}^{11} & D_{16}^{01} & D_{16}^{11} & 0 & 0 \\ & & D_{22}^{00} & D_{22}^{01} & D_{23}^{00} & D_{23}^{01} & D_{26}^{00} & D_{26}^{01} & 0 & 0 \\ & & & D_{22}^{11} & D_{23}^{01} & D_{23}^{11} & D_{26}^{01} & D_{26}^{11} & 0 & 0 \\ & & & & D_{33}^{00} & D_{33}^{01} & D_{36}^{00} & D_{36}^{01} & 0 & 0 \\ & & & & & D_{33}^{11} & D_{36}^{01} & D_{36}^{11} & 0 & 0 \\ & & & & & & D_{66}^{00} & D_{66}^{01} & 0 & 0 \\ & & & & & & & D_{66}^{11} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & D_{55} & D_{45} \\ \text{sym.} & & & & & & & & & D_{44} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{u\varphi} = [\mathbf{D}_{u\varphi}^{(1)} \mathbf{D}_{u\varphi}^{(2)} \dots \mathbf{D}_{u\varphi}^{(N)}], \quad \mathbf{D}_{\varphi u} = \mathbf{D}_{u\varphi}^T,$$

$$\mathbf{D}_{u\varphi}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & m_n^0 e_{31}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n^1 e_{31}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n^0 e_{32}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n^1 e_{32}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n^0 e_{33}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n^1 e_{33}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n^0 e_{36}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n^1 e_{36}^{(n)} \\ k_n^0 e_{15}^{(n)} & k_n^1 e_{15}^{(n)} & k_n^0 e_{25}^{(n)} & k_n^1 e_{25}^{(n)} & 0 \\ k_n^0 e_{14}^{(n)} & k_n^1 e_{14}^{(n)} & k_n^0 e_{24}^{(n)} & k_n^1 e_{24}^{(n)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{\varphi\varphi} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\varphi\varphi}^{(1)} & \mathbf{0}_{5 \times 5} & \dots & \mathbf{0}_{5 \times 5} \\ \mathbf{0}_{5 \times 5} & \mathbf{D}_{\varphi\varphi}^{(2)} & \dots & \mathbf{0}_{5 \times 5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{5 \times 5} & \mathbf{0}_{5 \times 5} & \dots & \mathbf{D}_{\varphi\varphi}^{(N)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{\varphi\varphi}^{(n)} = \begin{bmatrix} k_n^{00} \in_{11}^{(n)} & k_n^{01} \in_{11}^{(n)} & k_n^{00} \in_{12}^{(n)} & k_n^{01} \in_{12}^{(n)} & 0 \\ & k_n^{11} \in_{11}^{(n)} & k_n^{01} \in_{12}^{(n)} & k_n^{11} \in_{12}^{(n)} & 0 \\ & & k_n^{00} \in_{22}^{(n)} & k_n^{01} \in_{22}^{(n)} & 0 \\ & & & k_n^{11} \in_{22}^{(n)} & 0 \\ \text{sym.} & & & & h_n \in_{33}^{(n)} \end{bmatrix},$$

где p_i^A – поверхностные нагрузки, действующие на внешних поверхностях в направлениях θ_i ; $q_s^{(n-1)}$, $q_s^{(n)}$ – плотности поверхностного заряда на поверхностях Ω_{n-1} и Ω_n . Кроме того, введены дополнительные обозначения:

$$D_{ab}^{pq} = \sum_n m_n^{pq} C_{ab}^{(n)}, \quad D_{cd} = \sum_n h_n C_{cd}^{(n)}, \quad (23)$$

$$m_n^{pq} = \int_{z_{n-1}}^{z_n} (N^-)^{2-p-q} (N^+)^{p+q} d\theta_3, \quad m_n^p = \int_{z_{n-1}}^{z_n} (N^-)^{1-p} (N^+)^p d\theta_3,$$

$$k_n^{pq} = \int_{z_{n-1}}^{z_n} (N_n^-)^{2-p-q} (N_n^+)^{p+q} d\theta_3, \quad k_n^p = \int_{z_{n-1}}^{z_n} (N_n^-)^{1-p} (N_n^+)^p d\theta_3 = \frac{1}{2} h_n,$$

где $a, b = 1, 2, 3, 6$; $c, d = 4, 5$; $p, q = 0, 1$.

Геометрически точный элемент пьезоэлектрической оболочки

Конечноэлементная формулировка для четырехузлового пьезоэлектрического элемента оболочки основывается на простой и эффективной билинейной аппроксимации перемещений и электрического потенциала:

$$\mathbf{v} = \sum_r N_r \mathbf{v}_r, \quad \mathbf{v}_r = [u_{1r}^- \ u_{2r}^- \ u_{3r}^- \ u_{1r}^+ \ u_{2r}^+ \ u_{3r}^+ \ u_{3r}^M]^T, \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \sum_r N_r \boldsymbol{\chi}_r, \quad \boldsymbol{\chi}_r = [\varphi_{0r} \ \varphi_{1r} \ \dots \ \varphi_{Nr}]^T, \quad (25)$$

где $N_r(\xi_1, \xi_2)$ – билинейные функции формы элемента; \mathbf{v}_r и $\boldsymbol{\chi}_r$ – векторы перемещений и электрического потенциала в узлах элемента; индекс r обозначает номер узла и изменяется от 1 до 4.

Чтобы применить аналитическое интегрирование на элементе, используем введенные билинейные интерполяции для деформаций и вектора напряженности электрического поля [8, 10]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_r N_r \boldsymbol{\varepsilon}_r, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_r = \boldsymbol{\varepsilon}(P_r) = \mathbf{B}_r^u \mathbf{U}, \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_r N_r \boldsymbol{\varepsilon}_r, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_r = \boldsymbol{\varepsilon}(P_r) = -\mathbf{B}_r^{\varphi} \boldsymbol{\Phi}, \quad (27)$$

где \mathbf{B}_r^u , \mathbf{B}_r^{φ} – постоянные на элементе матрицы размера 10×28 и $5N \times 4(N+1)$; \mathbf{U} – столбец размера 28×1 ; $\boldsymbol{\Phi}$ – столбец размера $4(N+1) \times 1$, определяемые по формулам:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{v}_1^T \ \mathbf{v}_2^T \ \mathbf{v}_3^T \ \mathbf{v}_4^T]^T, \quad \boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\chi}_1^T \ \boldsymbol{\chi}_2^T \ \boldsymbol{\chi}_3^T \ \boldsymbol{\chi}_4^T]^T. \quad (28)$$

Для упрощения вычислительного процесса соотношения (26), (27) удобно записать в виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{\eta, \nu} (\xi_1)^\eta (\xi_2)^\nu \boldsymbol{\varepsilon}^{\eta\nu}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\eta\nu} = \mathbf{B}_u^{\eta\nu} \mathbf{U}, \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{\eta, \nu} (\xi_1)^\eta (\xi_2)^\nu \boldsymbol{\varepsilon}^{\eta\nu}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\eta\nu} = -\mathbf{B}_\varphi^{\eta\nu} \boldsymbol{\Phi}, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_u^{00} &= \frac{1}{4}(\mathbf{B}_1^u + \mathbf{B}_2^u + \mathbf{B}_3^u + \mathbf{B}_4^u), & \mathbf{B}_u^{01} &= \frac{1}{4}(\mathbf{B}_1^u + \mathbf{B}_2^u - \mathbf{B}_3^u - \mathbf{B}_4^u), \\ \mathbf{B}_u^{10} &= \frac{1}{4}(\mathbf{B}_1^u - \mathbf{B}_2^u - \mathbf{B}_3^u + \mathbf{B}_4^u), & \mathbf{B}_u^{11} &= \frac{1}{4}(\mathbf{B}_1^u - \mathbf{B}_2^u + \mathbf{B}_3^u - \mathbf{B}_4^u). \end{aligned} \quad (31)$$

Матрицы $\mathbf{B}_r^{\eta_1 \eta_2}$ вычисляются аналогичным образом путем использования матриц \mathbf{B}_r^0 ; индексы η_1, η_2 здесь и далее принимают значения 0 и 1.

Для того чтобы избежать сдвигового и мембранного запираания элемента оболочки и при этом не получить ложных энергетических мод, для независимо введенных деформаций и результирующих напряжений используем следующие аппроксимации [8, 16]:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \sum_{\eta_1, \eta_2} (\xi_1)^{\eta_1} (\xi_2)^{\eta_2} \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\eta_1 \eta_2}, \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{00} &= \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{11}^{-00} & \hat{\varepsilon}_{11}^{+00} & \hat{\varepsilon}_{22}^{-00} & \hat{\varepsilon}_{22}^{+00} & \hat{\varepsilon}_{33}^{-00} & \hat{\varepsilon}_{33}^{+00} & 2\hat{\varepsilon}_{12}^{-00} & 2\hat{\varepsilon}_{12}^{+00} & 2\hat{\varepsilon}_{13}^{M00} & 2\hat{\varepsilon}_{23}^{M00} \end{bmatrix}^T, \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{01} &= \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{11}^{-01} & \hat{\varepsilon}_{11}^{+01} & \hat{\varepsilon}_{33}^{-01} & \hat{\varepsilon}_{33}^{+01} & 2\hat{\varepsilon}_{13}^{M01} \end{bmatrix}^T, & \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{10} &= \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{22}^{-10} & \hat{\varepsilon}_{22}^{+10} & \hat{\varepsilon}_{33}^{-10} & \hat{\varepsilon}_{33}^{+10} & 2\hat{\varepsilon}_{23}^{M10} \end{bmatrix}^T, \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{11} &= \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{33}^{-11} & \hat{\varepsilon}_{33}^{+11} \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{H} &= \sum_{\eta_1, \eta_2} (\xi_1)^{\eta_1} (\xi_2)^{\eta_2} \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} \mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2}, \\ \mathbf{H}^{00} &= \begin{bmatrix} H_{11}^{-00} & H_{11}^{+00} & H_{22}^{-00} & H_{22}^{+00} & H_{33}^{-00} & H_{33}^{+00} & H_{12}^{-00} & H_{12}^{+00} & H_{13}^{00} & H_{23}^{00} \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{H}^{01} &= \begin{bmatrix} H_{11}^{-01} & H_{11}^{+01} & H_{33}^{-01} & H_{33}^{+01} & H_{13}^{01} \end{bmatrix}^T, & \mathbf{H}^{10} &= \begin{bmatrix} H_{22}^{-10} & H_{22}^{+10} & H_{33}^{-10} & H_{33}^{+10} & H_{23}^{10} \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{H}^{11} &= \begin{bmatrix} H_{33}^{-11} & H_{33}^{+11} \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (33)$$

где \mathbf{Q}^{00} – единичная матрица размера 10×10 ; $\mathbf{Q}^{01}, \mathbf{Q}^{10}, \mathbf{Q}^{11}$ – проективные матрицы:

$$\mathbf{Q}^{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Подставляя интерполяции (24), (25), (29), (30), (32), (33) в смешанное вариационное уравнение (21), применяя аналитическое интегрирование в пределах элемента и исключая независимо введенные деформации $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\eta_1 \eta_2}$ и результирующие напряжения $\mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2}$, получим уравнения равновесия элемента

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{\varphi u} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{F}_q \end{bmatrix}, \quad (35)$$

где \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{u\varphi}$, $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$ – механическая, электрическая и диэлектрическая матрицы жесткости; \mathbf{F}_p – вектор поверхностных нагрузок; \mathbf{F}_q – вектор электрического нагружения:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu} &= \sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} (\mathbf{B}_u^{\eta_1 \eta_2})^T \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} (\mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2})^T \mathbf{D}_{uu} \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} (\mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2})^T \mathbf{B}_u^{\eta_1 \eta_2}, \\ \mathbf{K}_{u\varphi} &= \sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} (\mathbf{B}_u^{\eta_1 \eta_2})^T \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} (\mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2})^T \mathbf{D}_{u\varphi} \mathbf{B}_\varphi^{\eta_1 \eta_2}, \quad \mathbf{K}_{\varphi u} = (\mathbf{K}_{u\varphi})^T, \\ \mathbf{K}_{\varphi\varphi} &= - \sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} (\mathbf{B}_\varphi^{\eta_1 \eta_2})^T \mathbf{D}_{\varphi\varphi} \mathbf{B}_\varphi^{\eta_1 \eta_2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Каждую поверхность раздела слоев можно рассматривать как активную (на которой известен электрический потенциал) или сенсорную (на которой электрический потенциал неизвестен). В соответствии с этим столбец $\mathbf{\Phi}$ разделяется на активную $\mathbf{\Phi}^a$ и сенсорную (свободную) $\mathbf{\Phi}^s$ части, так что систему (35) можно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi}^s & \mathbf{K}_{u\varphi}^a \\ \mathbf{K}_{\varphi u}^s & \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{ss} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{sa} \\ \mathbf{K}_{\varphi u}^a & \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{as} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{\Phi}^s \\ \mathbf{\Phi}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_q^a \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$\mathbf{K}_{\varphi u}^s = (\mathbf{K}_{u\varphi}^s)^T, \quad \mathbf{K}_{\varphi u}^a = (\mathbf{K}_{u\varphi}^a)^T, \quad \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{as} = (\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{sa})^T,$$

где индексы s и a означают сенсорную и активную части соответствующих матриц. Чтобы не усложнять численный анализ [1, 3, 4], дополнительно принято $\mathbf{F}_q^s = \mathbf{0}$.

Далее используется стандартная процедура сборки элементов в ансамбль. В результате получим глобальную систему линейных алгебраических уравнений, описывающую электроупругое состояние слоистой композитной оболочки:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{uu} \tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{K}}_{u\varphi}^s \tilde{\mathbf{\Phi}}^s = \tilde{\mathbf{F}}_p - \tilde{\mathbf{K}}_{u\varphi}^a \tilde{\mathbf{\Phi}}^a, \quad (38)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi u}^s \tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{K}}_{\varphi\varphi}^{ss} \tilde{\mathbf{\Phi}}^s = -\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi\varphi}^{sa} \tilde{\mathbf{\Phi}}^a, \quad (39)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_q^a = \tilde{\mathbf{K}}_{\varphi u}^a \tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{K}}_{\varphi\varphi}^{as} \tilde{\mathbf{\Phi}}^s + \tilde{\mathbf{K}}_{\varphi\varphi}^{aa} \tilde{\mathbf{\Phi}}^a. \quad (40)$$

Из уравнения (39) выражаем столбец

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}^s = -(\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi\varphi}^{ss})^{-1} (\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi u}^s \tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{K}}_{\varphi\varphi}^{sa} \tilde{\mathbf{\Phi}}^a). \quad (41)$$

Подставляя столбец (41) в уравнение (38), получим разрешающее уравнение для нахождения глобального вектора перемещений

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_{uu} - \tilde{\mathbf{K}}_{u\varphi}^s (\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi\varphi}^{ss})^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{\varphi u}^s \right] \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{F}}_p + \left[\tilde{\mathbf{K}}_{u\varphi}^a (\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi\varphi}^{ss})^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{\varphi\varphi}^{sa} - \tilde{\mathbf{K}}_{u\varphi}^a \right] \tilde{\mathbf{\Phi}}^a. \quad (42)$$

На основе описанного численного алгоритма был разработан геометрически точный пространственный билинейный конечный элемент EG7P4, позволяющий решать связанные актюаторные и сенсорные задачи электроупругости для тонкостенных конструкций из слоистых композитов.

Численные результаты и их обсуждение

1. Рассмотрим спиральную оболочку (рис. 3, а), изготовленную из пьезокерамики PZT-5Н. Спиральная оболочка, выполняющая функции актюатора, состоит из четырех полных витков и имеет минимальный радиус $r_{\min} = 1,875$ мм, максимальный радиус $r_{\max} = 15,2$ мм, длину $L = 215$ мм, ширину $b = 3,75$ мм и толщину $h = 0,2$ мм. Актюатор поляризован в поперечном направлении θ_3 и подвергается действию постоянного напряжения $V = 100$ В. Механические характеристики пьезокерамики следующие [17]: $C_{11} = C_{22} = 127,205$ ГПа, $C_{12} = 80,212$ ГПа, $C_{13} = C_{23} = 84,670$ ГПа, $C_{33} = 117,436$ ГПа, $C_{44} = C_{55} = 22,988$ ГПа, $C_{66} = 23,474$ ГПа, $e_{31} = e_{32} = -6,62$ Кл/м², $e_{33} = 23,24$ Кл/м², $e_{24} = e_{15} = 17,03$ Кл/м², $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 15,05$ нФ/м, $\epsilon_{33} = 13,01$ нФ/м. Геометрические параметры срединной поверхности вычисляем по формулам:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = \sqrt{a^2 + r^2}, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{1}{A_2^3} (2a^2 + r^2),$$

$$r = r_{\min} + a\theta_2, \quad \theta_2 \in [0, 8\pi],$$

где r – полярный радиус; a – параметр, характеризующий расстояние между двумя соседними витками.

Оболочка моделировалась с помощью равномерных конечноэлементных сеток. В табл. 1 дан анализ сходимости предложенного геометрически точного элемента оболочки EG7P4. Приведено сравнение с результатами, полученными в [17] путем использования трехмерного изопараметрического элемента C3D8E из коммерческого пакета программ ABAQUS и изопараметрического пьезоэлектрического элемента оболочки Q4TSF без учета поперечного обжатия. Как видим, значения поперечного перемещения на свободном крае хорошо согласуются друг с другом. Отметим также, что учет поперечного обжатия является важным для рас-

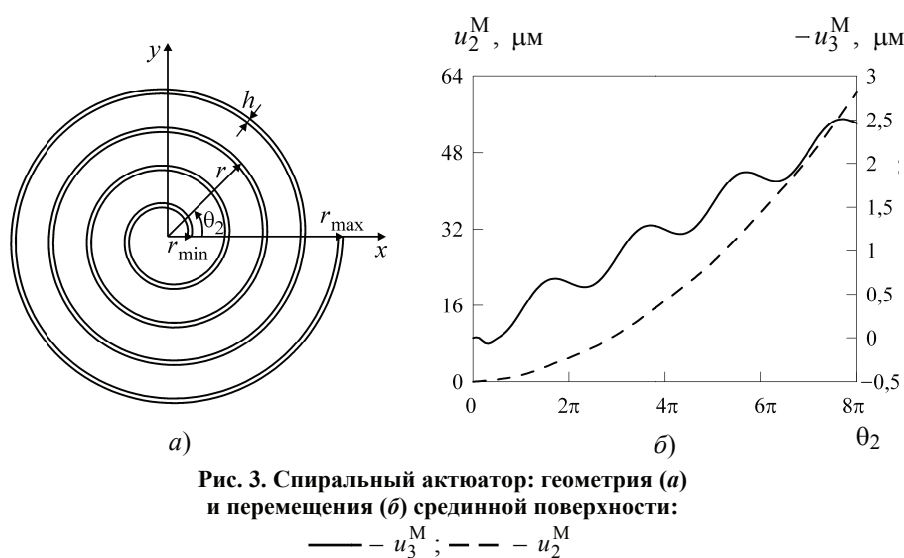


Рис. 3. Спиральный актюатор: геометрия (а) и перемещения (б) срединной поверхности:

— — u_3^M ; - - - u_2^M

чета спирального актюатора, так как изопараметрический элемент Q₄TSF приводит к неприемлемым для окружного перемещения u_2^M результатам. Дополнительно на рис. 3, б показана зависимость перемещений срединной поверхности оболочки от окружной координаты θ_2 , полученная с использованием конечно-элементной сетки 1×128.

2. Исследуем задачу цилиндрического изгиба шарнирно опертой углепластиковой пластины с полимерными PVDF накладками, имеющими следующие характеристики: $E = 2$ ГПа, $\nu = 0,29$, $e_{31} = 0,046$ Кл/м², $\epsilon_{11} = \epsilon_{33} = 0,1062$ нФ/м. Геометрические параметры пластины соответствуют [18]: $a = 10$ мм и $a = 100$ мм, $h_{PVDF} = 0,04$ мм, $h_C = 0,92$ мм, $h = 1$ мм (рис. 4). Механические характеристики углепластика следующие: $E_1 = 172,5$ ГПа, $E_2 = E_3 = 6,9$ ГПа, $G_{12} = G_{13} = 3,45$ ГПа, $G_{23} = 2,76$ ГПа, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,25$. Верхний пьезоэлектрический слой выполняет функции актюатора, а нижний слой – сенсора. На поверхностях раздела пластины и пьезоэлектрических накладок поддерживается заданное нулевое напряжение. К верхней поверхности актюатора прикладываются одновременно механическая и электрическая нагрузки:

$$p_3^+ = p_0 \sin(\pi x/a) \quad \text{и} \quad \varphi^a = \varphi_0 \sin(\pi x/a).$$

Вследствие симметрии задачи рассмотрена половина пластины, которая моделировалась десятью конечными элементами. На рис. 5 приведена зависимость напряжения, возникающего на нижней поверхности сенсора, от координаты x для тонкой пластины ($a/h = 100$) при $p_0 = 10$ Па и $\varphi_0 = 0$ В, и толстой пластины ($a/h = 10$) при $p_0 = 10$ Па и $\varphi_0 = 100$ В. Представлено сравнение с точными решениями на основе теории пластин третьего порядка [18] и пространственной

Таблица 1

Перемещения срединной поверхности спирального актюатора на свободном крае

Элемент	EG7P4								Q ₄ TSF [17]	C3D8E [17]
	1×16	2×16	4×16	1×32	2×32	4×32	1×64	1×128		
$-u_3^M$, мкм	2,109	2,102	2,100	2,625	2,620	2,619	2,503	2,460	2,00	2,59
u_2^M , мкм	58,18	58,16	58,15	59,95	59,88	59,87	60,55	60,72	-0,62	41,47

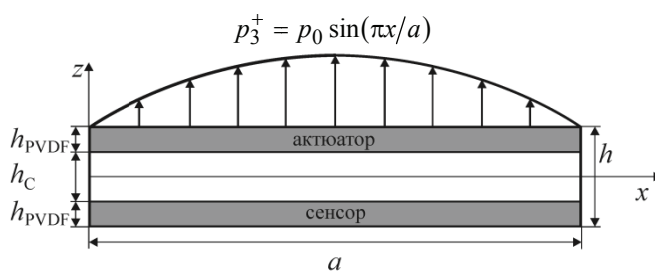


Рис. 4. Цилиндрический изгиб шарнирно опертой углепластиковой пластины с полимерными PVDF накладками

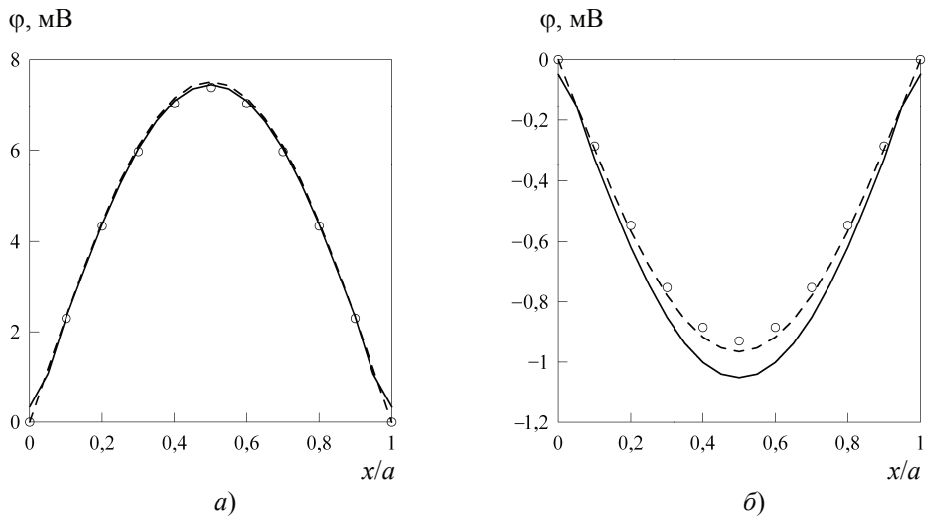


Рис. 5. Зависимость напряжения на нижней поверхности сенсора от координаты x :
 $a - a/h = 100$; $b - a/h = 10$; — — — EG7P4; - - - Kant [18]; ○ — Ray [19]

теории пьезоэлектричества [19]. Как видим, для тонкой пластины получено практически полное совпадение с известными результатами. Для толстой пластины решение в большей степени зависит от вида используемой модели.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ по программе «Проведение фундаментальных исследований в области естественных наук» (проект № 2.1.1/660) и РФФИ (проект № 08-01-00373).

Список литературы

1. Sze, K.Y. A hybrid stress ANS solid-shell element and its generalization for smart structure modelling. Part II – Smart structure modelling / K.Y. Sze, L.Q. Yao, S. Yi // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2000. – Vol. 48, No. 4. – P. 565–582.
2. Lee, S. A nine-node assumed strain shell element for analysis of a coupled electro-mechanical system // S. Lee, N.S. Goo, H.C. Park, K.J. Yoon, C. Cho // Smart Materials and Structures. – 2003. – Vol. 12, No. 3. – P. 355–362.
3. Zheng S. The formulation of a refined hybrid enhanced assumed strain solid shell element and its application to model smart structures containing distributed piezoelectric sensors/actuators / S. Zheng, X. Wang, W. Chen // Smart Materials and Structures. – 2004. – Vol. 13, No. 4. – P. N43–N50.
4. Tan, X.G. Optimal solid shell element for large-deformable composite structures with piezoelectric layers and active vibration control / X.G. Tan, L. Vu-Quoc // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2005. – Vol. 64, No. 15. – P. 1981–2013.
5. Klinkel, S. A geometrically non-linear piezoelectric solid shell element based on a mixed multi-field variational formulation / S. Klinkel, W. Wagner // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2006. – Vol. 65, No. 3. – P. 349–382.
6. Куликов, Г.М. Деформационные соотношения, точно представляющие большие перемещения оболочки как жесткого тела / Г.М. Куликов // Механика твердого тела. – 2004. – Т. 39, № 5. – С. 130–140.

7. Kulikov, G.M. Non-linear strain-displacement equations exactly representing large rigid-body motions. Part II. Enhanced finite element technique / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2006. – Vol. 195, No. 19–22. – P. 2209–2230.
8. Kulikov, G.M. Finite rotation geometrically exact four-node solid-shell element with seven displacement degrees of freedom / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. – 2008. – Vol. 28, No. 1. – P. 15–38.
9. Kulikov, G.M. Finite deformation higher-order shell models and rigid-body motions / G.M. Kulikov, E. Carrera // *International Journal of Solids and Structures*. – 2008. – Vol. 45, No. 11–12. – P. 3153–3172.
10. Kulikov, G.M. Geometrically exact four-node piezoelectric solid-shell element / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2008. – Vol. 15, No. 3–4. – P. 199–207.
11. Плотникова, С.В. Расчет композитных оболочек с пьезоэлектрическими накладками / С.В. Плотникова, М.Г. Куликов // *Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та*. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 380–391.
12. Плотникова, С.В. Применение трехмерного элемента оболочки для расчета композитных конструкций с пьезоэлектрическими накладками / С.В. Плотникова, М.Г. Куликов // *Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та*. – 2010. – Т. 16, № 2. – С. 375–386.
13. Saravanos, D.A. Mixed laminate theory and finite element for smart piezoelectric composite shell structures / D.A. Saravanos // *AIAA Journal*. – 1997. – Vol. 35, No. 8. – P. 1327–1333.
14. Новацкий, В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий. – М.: Мир, 1986. – 160 с.
15. Куликов, Г.М. Вариационные уравнения термоэлектроупругости для многослойной композитной оболочки / Г.М. Куликов, С.В. Плотникова, В.П. Ярцев // *Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та*. – 2009. – Т. 15, № 3. – С. 628–637.
16. Куликов, Г.М. Расчет композитных конструкций под действием следящих нагрузок с использованием геометрически точного элемента оболочки / Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // *Механика композит. материалов*. – 2009. – Т. 45, № 6. – С. 789–804.
17. Zouari, W. A FSDT-MITC piezoelectric shell finite element with ferroelectric non-linearity / W. Zouari, T. Ben Zineb, A. Benjeddou // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2009. – Vol. 20, No. 17. – P. 2055–2075.
18. Kant, T. Cylindrical bending of piezoelectric laminates with a higher order shear and normal deformation theory / T. Kant, S.M. Shiyekar // *Computers & Structures*. – 2008. – Vol. 86, No. 15–16. – P. 1594–1603.
19. Ray, M.C. Exact solution for static analysis of an intelligent structure under cylindrical bending / M.C. Ray, K.M. Rao, B. Samanta // *Computers & Structures*. – 1993. – Vol. 47, No. 6. – P. 1031–1042.

Coupled Problem of Electroelasticity for Laminated Composite Shell

G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova, M.G. Kulikov

*Department “Applied Mathematics and Mechanics”, TSTU;
kulikov@apmath.tstu.ru*

Key words and phrases: geometrically exact shell element; laminated composite shell; piezoelectricity.

Abstract: Based on the 7-parameter shell model, a numerical algorithm has been developed for solving the coupled problem of piezoelectricity for a laminated composite shell subjected to electromechanical loading. A new geometrically exact bilinear solid-shell element with distributed piezoelectric sensors and actuators has been formulated by using non-conventional analytical integration. With the help of this finite element, solutions of coupled problems of electroelasticity for a piezoelectric spiral shell and a composite plate with piezoelectric patches have been obtained.

Gebundene Aufgabe der Elektroelastizität für die geschichteten Kompositenhülle

Zusammenfassung: Es ist den Algorithmus der numeralischen Lösung der gebundenen Aufgabe der Piezoelektrizität für die der elektromechanischen Belastung untergezogenen geschichteten Kompositenhülle auf Grund des 7-parametrischen Modells erarbeitet. Es ist das neue geometrisch feine bilinearische dreidimensionale Element der Hülle durch die Benutzung des untraditionellen analytischen Integrierens gebaut. Mit Hilfe dieses Endelementes ist die Lösung der gebundenen Aufgaben der Elektroelastizität für die piezoelektrischen Spiralhülle und die Kompositplatte mit den piezoelektrischen Belägen erhalten.

Problème couplé d'électroélasticité pour une enveloppe composite feuilletée

Résumé: Est élaboré l'algorithme de la solution numérique du problème couplé de la piézo-électricité pour une enveloppe composite feuilletée soumise au chargement électromécanique à la base du modèle paramétrique. Est construit un nouvel élément bilinéaire à trois dimensions exacte du point de vue géométrique aux sensors et actuators piézo-électriques de distribution par la voie de l'usage de l'intégration analytique non traditionnelle. A l'aide de cet élément final est obtenu la solution des problèmes couplés d'électroélasticité pour une enveloppe spirale piézo-électrique et pour une plaque composite aux éclisses piézo-électriques.

Авторы: *Куликов Геннадий Михайлович* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и механика»; *Плотникова Светлана Валерьевна* – кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и механика»; *Куликов Михаил Геннадьевич* – аспирант кафедры «Прикладная математика и механика», ГОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: *Коновалов Виктор Иванович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Химическая инженерия», ГОУ ВПО «ТГТУ».
