

УДК 532.517.2

**ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ЦЕНТРОБЕЖНОМ ПОЛЕ
МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМСЯ ПЕРФОРИРОВАННЫМ
И НЕПОДВИЖНЫМ НЕПРОНИЦАЕМЫМ ДИСКАМИ
ПРИ ПОСТОЯНСТВЕ ДАВЛЕНИЯ ВДОЛЬ РАДИУСА ДИСКОВ**

А.А. Коптев, В.Б. Коптева

*Кафедра «Техника и технологии производства нанопродуктов»,
ГБОУ ВПО «ТГТУ»; postmaster@kma.tstu.ru*

Представлена профессором А.Г. Ткачевым

Ключевые слова и фразы: безразмерные переменные; обыкновенные нелинейные дифференциальные уравнения; подстановка Кармана, коэффициент радиального давления; уравнение Навье–Стокса.

Аннотация: Рассмотрено решение уравнений Навье–Стокса в цилиндрической системе координат в случае течения жидкости между вращающимися перфорированным и неподвижным сплошным дисками. Показана неоднозначность решений при радиальном градиенте давления, равном нулю. При решении используется замена переменных по уравнениям Кармана.

Обозначения

A, B – постоянные интегрирования;	u – радиальная скорость, м/с;
a, b – постоянные в конце интервала интегрирования;	w – осевая скорость, м/с;
C – коэффициент давления;	z – осевая координата;
G – безразмерная окружная скорость;	z_0 – расстояние между дисками, м;
G', G'' – производные окружной скорости;	ε – безразмерная осевая координата;
H – безразмерная осевая скорость;	ε_0 – безразмерное расстояние между дисками;
H' – безразмерная радиальная скорость;	ϑ – окружная скорость, м/с;
H'', H''' – производные осевой (радиальной) скорости;	ρ – плотность жидкости, кг/м ³ ;
P – безразмерное давление;	ν – кинематическая вязкость жидкости, м ² /с;
P' – производная безразмерного давления;	φ – окружная координата, рад;
p – давление, Н/м ² ;	ω – угловая скорость диска, с ⁻¹ .
r – радиальная координата, м;	
R – радиус дисков, м;	

Рассматриваем течение жидкости в зазоре между вращающимися с угловой скоростью ω перфорированным (проницаемым) и сплошным неподвижным дисками. Диски погружены в жидкость. Считаем, что жидкость вязкая, несжимаемая, движение жидкости в зазоре между дисками ламинарное, так как расстояние между дисками $z_0 < 4$ мм, стационарное. На рис. 1 показано расположение осей и схема движения жидкости.

При данных условиях можно использовать уравнения Навье–Стокса в цилиндрической системе координат r, φ, z . В связи с осесимметричностью задачи производные по окружной координате $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$. Тогда уравнения Навье–Стокса принимает вид:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\vartheta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u^2}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]; \\ u \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{u\vartheta}{r} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \nu \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\vartheta}{r^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right]; \\ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \end{cases} \quad (1)$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Приведем систему дифференциальных уравнений (1) к безразмерному виду подстановкой, аналогичной подстановке Т. Кармана [1],

$$\begin{cases} u = \omega r H'(\varepsilon); \\ \vartheta = \omega r G(\varepsilon); \\ w = -2\sqrt{\omega \nu} H(\varepsilon); \\ p = C \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - 2\rho \omega \nu P(\varepsilon), \end{cases} \quad (3)$$

$$\varepsilon = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}, \quad \varepsilon_0 = z_0 \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}.$$

Таким образом, мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} H''' = C + (H')^2 - G^2 - 2HH''; \\ G'' = 2(H'G - HG'); \\ P' = H'' + 2HH', \end{cases} \quad (4)$$

где штрихами обозначены производные по ε . Уравнение неразрывности (2) удовлетворяется тождественно. Решив совместно первые два уравнения системы (4), из третьего уравнения находим функцию распределения безразмерного давления по толщине слоя жидкости в зазоре. Третье уравнение системы (4) можно проинтегрировать

$$P - P(0) = H' + H^2 \quad (5)$$

где $P(0)$ – давление на поверхности диска при $\varepsilon = 0$.

Граничные условия для решения системы уравнений (1):

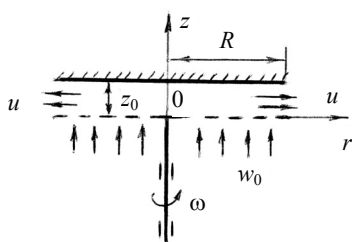


Рис. 1. Схема движения жидкости

$$\begin{aligned} u = 0, \quad \vartheta = \omega r, \quad w = w_0 & \quad \text{при } z = 0; \\ u = 0, \quad \vartheta = 0, \quad w = 0 & \quad \text{при } z = z_0 \end{aligned} \quad (6)$$

и для системы уравнений (4):

$$\begin{aligned} H' = 0, \quad G = 1, \quad H = H(0) & \quad \text{при } \varepsilon = 0; \\ H' = 0, \quad G = 0, \quad H = 0 & \quad \text{при } \varepsilon = \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Если начало координат расположить на неподвижной поверхности и интегрировать в направлении вращающегося

перфорированного диска, то граничные условия будут:

$$\begin{aligned} H' = 0, G = 0, H = 0 \text{ при } \varepsilon = 0; \\ H' = 0, G = 1, \quad \text{при } \varepsilon = \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (8)$$

На каком диске расположить начало координат для численного интегрирования зависит от скорости сходимости решения.

Совместное численное решение первых двух уравнений системы (4) при градиенте давления $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$, или, что то же $C = 0$, привело к нескольким вариантам решения. Причиной, что решение не единственное, является нелинейность системы дифференциальных уравнений (4).

Первое решение. Для нахождения соотношений параметров, при которых коэффициент радиального давления $C = 0$ проводим разрез поверхности $F(H(\varepsilon_0), \varepsilon_0, C) = 0$ при $\varepsilon_0 = \text{const}$, например $\varepsilon_0 = 6$. В итоге найдены значения параметров при $C = 0, \varepsilon_0 = 6$:

$$\begin{aligned} H(\varepsilon_0) = 1,521830; H''(0) = 0,155270; G(0) = 0,109299; \\ H''(\varepsilon_0) = -0,305742; G'(\varepsilon_0) = 0,058261. \end{aligned}$$

Разрез поверхности $F(H(\varepsilon_0), \varepsilon_0, C) = 0$ при $C = 0 = \text{const}$ в виде функции $H(\varepsilon_0) = f(\varepsilon_0)$ показан на рис. 2 и представлен в табл. 1. Интегрирование проведено на достаточно большом интервале изменения $\varepsilon_0, 0 < \varepsilon_0 \leq 200$. Отметим при этом, что при $\varepsilon_0 > 10$ зависимость $H(\varepsilon_0) = f(\varepsilon_0)$ близка к линейной.

Эпюры безразмерных скоростей осевой H , радиальной H' и окружной G представлены в табл. 2 и на рис. 3 при $C = 0, \varepsilon_0 = 6$.

Дополнительно исследовано при коэффициенте радиального давления $C = 0$ и безразмерном расстоянии между дисками $\varepsilon_0 = 6$ поведение функции безразмерной подачи жидкости $H(\varepsilon_0)$ через перфорацию вращающегося диска и других начальных параметров от безразмерной окружной скорости $G(\varepsilon_0)$. Найдено, что при $G(\varepsilon_0) = 0$ все параметры равны нулю, то есть имеем статическое состояние дисков и всех других параметров.

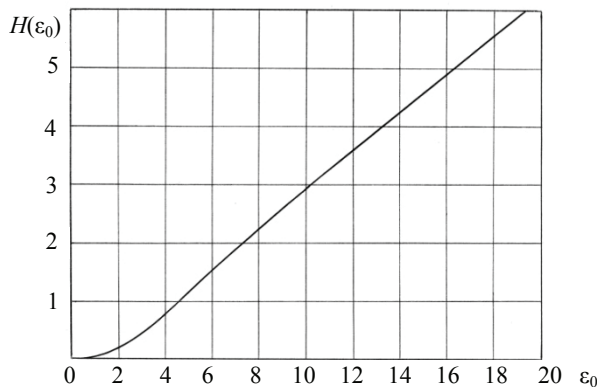


Рис. 2. Зависимость безразмерной скорости подачи жидкости $H(\varepsilon_0)$ через перфорацию вращающегося диска для обеспечения коэффициента радиального давления $C = 0$ от величины безразмерного расстояния между дисками ε_0 при $H(0) = 0, G(0) = 0, G(\varepsilon_0) = 1$

Таблица 1

Начальные параметры при $H(0) = 0$, $H'(0) = 0$, $G(0) = 0$,
 $H'(\varepsilon_0) = 0$, $G(\varepsilon_0) = 1$, $C = 0$ (первое решение)

ε_0	$H(\varepsilon_0)$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
0,1	0,000025	0,008333	9,999995	-0,025000	10,000000
0,6	0,005394	0,049944	1,665854	-0,149806	1,667049
1,0	0,024781	0,082628	0,996294	-0,247546	1,001689
2,0	0,177801	0,148805	0,476062	-0,437791	0,505366
3,0	0,461331	0,173705	0,285990	-0,483139	0,315649
4,0	0,800325	0,173118	0,192149	-0,436983	0,187486
5,0	1,159434	0,165105	0,140667	-0,368237	0,104452
6,0	1,521830	0,155270	0,109299	-0,305741	0,058261
7,0	1,879257	0,145177	0,088328	-0,256837	0,034193
8,0	2,229987	0,135493	0,073332	-0,220022	0,021405
9,0	2,574869	0,126521	0,062107	-0,192073	0,014211
10,0	2,915163	0,118356	0,053424	-0,170362	0,009906
12,0	3,585967	0,104355	0,040978	-0,139016	0,005377
14,0	4,248031	0,093002	0,032598	-0,117522	0,003248
16,0	4,904441	0,083719	0,026654	-0,101861	0,002114
18,0	5,556969	0,076035	0,022269	-0,089930	0,001455
20,0	6,206707	0,069592	0,018993	-0,080531	0,001045
30,0	9,431939	0,048671	0,010014	-0,053008	0,000298
40,0	12,638300	0,037321	0,006318	-0,039562	0,000124
50,0	15,836385	0,030233	0,004403	-0,031573	0,000063
60,0	19,030035	0,025395	0,003272	-0,026274	0,000036
100,0	31,785380	0,015461	0,001415	-0,015730	0,000008
200,0	63,636110	0,007803	0,000450	-0,007857	0,000001

Таблица 2

Решение при $H(0) = 0$, $H'(0) = 0$, $G(0) = 0$, $H'(\varepsilon_0) = 0$,
 $G(\varepsilon_0) = 1$, $\varepsilon_0 = 6$, $C = 0$ (первое решение)

ε	H	H'	H''	G	G'	P
0,0	0,000000	0,000000	0,155270	0,000000	0,109299	0,000000
0,4	0,012420	0,062082	0,155015	0,043756	0,109660	0,062237
0,8	0,049621	0,123808	0,153234	0,088015	0,112168	0,126271
1,2	0,111300	0,184265	0,148419	0,134039	0,118775	0,196652
1,6	0,196665	0,241946	0,139128	0,183767	0,130835	0,280623
2,0	0,304214	0,294794	0,124046	0,239474	0,148590	0,387340
2,4	0,431518	0,340263	0,102074	0,303237	0,170776	0,526471
2,8	0,575052	0,375430	0,072447	0,376322	0,194635	0,706115
3,2	0,730071	0,397160	0,034895	0,458665	0,216393	0,930164
3,6	0,890573	0,402345	-0,010140	0,548616	0,232013	1,195464
4,0	1,049369	0,388223	-0,061333	0,642972	0,237884	1,489399
4,4	1,198300	0,352757	-0,116410	0,737248	0,231226	1,788680
4,8	1,328595	0,294989	-0,172262	0,826037	0,210233	2,060154
5,2	1,431137	0,215334	-0,225162	0,903411	0,174097	2,264150
5,6	1,498206	0,115796	-0,271037	0,963319	0,123024	2,360419
6,0	1,521829	0,000000	-0,305741	1,000000	0,058261	2,315964

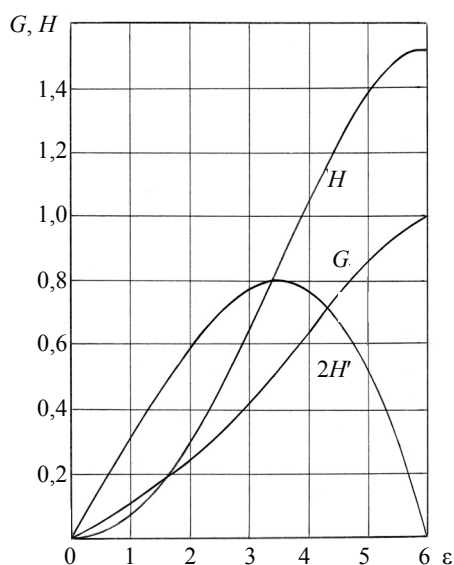


Рис. 3. Зависимость безразмерных скоростей, осевой H радиальной H' и окружной G от безразмерной осевой координаты ε при коэффициенте радиального давления $C = 0$ и $\varepsilon_0 = 6$ при $H(0) = 0, G(0) = 0, G(\varepsilon_0) = 1$

Второе и третье решения. Исследуемые решения имеют более сложный характер. Для нахождения соотношений параметров, при которых коэффициент радиального давления $C = 0$, проводим разрез поверхности $F(H(\varepsilon_0), \varepsilon_0, C) = 0$ при $\varepsilon_0 = \text{const}$, например $\varepsilon_0 = 6$.

Минимальное значение безразмерной скорости подачи жидкости $H(0) = 0,827093$ через перфорацию вращающегося диска при $C = 0,108$. Другие параметры при этом

$$H'' = -0,231238; G'(0) = -2,304808;$$

$$H''(\varepsilon_0) = 0,181041; G'(\varepsilon_0) = 0,158081.$$

Разрез поверхности $F(H(\varepsilon_0), \varepsilon_0, C) = 0$ при $C = 0 = \text{const}$ в виде функции $H(\varepsilon_0) = f(\varepsilon_0)$ показан на рис. 4 и представлен в табл. 3. Отметим два экстремума: $H(0)_{\min} = 7,034210$ при $\varepsilon_0 = 5,5$ и $H(0)_{\max} = 7,905098$ при $\varepsilon_0 = 4,8$. Функция $H(0) = f(\varepsilon_0)$ при $\varepsilon_0 > 10$ близка к линейной зависимости. При $\varepsilon_0 < 4,51$ решение системы дифференциальных уравнений (4) затруднено.

Поведение функции безразмерной скорости подачи жидкости $H(0)$ через перфорацию вращающегося диска от изменения безразмерной окружной скорости вращения $G(0)$ этого диска в пределах $1 \geq G(0) \geq -1$ показано на рис. 5. Исследования показали, что при $G(0) = G(\varepsilon_0) = 0$, то есть диски неподвижны и $\varepsilon_0 = 6$ скорость подачи жидкости через перфорированный диск $H(0) = 7,140795$. В этом есть отличие от первого решения статики, когда $H(0) = 0$.

Эпюры безразмерных осевой H и радиальной H' скоростей, при $\varepsilon_0 = 6, C = 0, G(0) = G(\varepsilon_0) = 0$, представлены в табл. 4 и на рис. 6. Окружная скорость отсутствует.

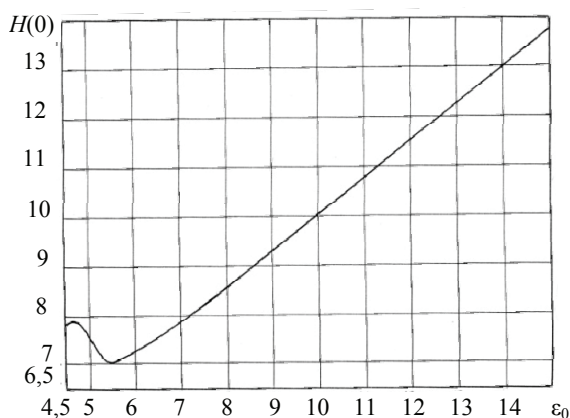


Рис. 4. Зависимость безразмерной скорости подачи жидкости $H(0)$ через перфорацию вращающегося диска для обеспечения коэффициента радиального давления $C = 0$ от величины безразмерного расстояния между дисками ε_0 при $H(\varepsilon_0) = 0, G(0) = 1, G(\varepsilon_0) = 0$

Таблица 3

**Начальные параметры при $H'(0) = 0, G(0) = 1, H(\varepsilon_0) = 0,$
 $H'(\varepsilon_0) = 0, G(\varepsilon_0) = 0, C = 0$ (второе и третье решения)**

ε_0	$H(0)$	$H''(0) = A$	$G'(0) = B$	$H''(\varepsilon_0) = a$	$G'(\varepsilon_0) = b$
16,0	14,580044	- 52,954929	- 29,033775	0,114402	0,000000
15,0	13,805023	- 50,616999	- 27,475132	0,123313	
14,0	13,064907	- 48,547754	- 25,985027	0,134057	
13,0	12,320395	- 46,463991	- 24,484558	0,146732	
12,0	11,573083	- 44,379167	- 22,976494	0,161922	
11,0	10,814757	- 42,234676	- 21,443842	0,180301	
10,0	10,049612	- 40,065350	- 19,894154	0,203059	
9,0	9,328486	- 37,821250	- 18,407905	0,232940	
8,0	8,601505	- 36,548440	- 16,943450	0,272898	
7,6	8,311036	- 35,878279	- 16,347845	0,292583	
7,2	8,018550	- 35,208432	- 15,746005	0,315039	
6,8	7,744895	- 34,729280	- 15,180484	0,341772	
6,4	7,498715	- 34,804527	- 14,664193	0,380332	
6,0	7,299998	- 34,853998	- 14,245322	0,415577	
5,8	7,201287	- 35,054124	- 14,034383	0,439280	
5,6	7,098127	- 35,236500	- 13,813422	0,465124	
$H_{\min} 5,5$	7,034210	- 35,212769	- 13,677751	0,478236	
5,4	7,039294	- 35,903295	- 13,680081	0,496739	
5,3	7,188196	- 38,149680	- 13,970432	0,526531	
5,2	7,325097	- 40,381163	- 14,236412	0,557397	
5,1	7,468145	- 42,799484	- 14,514382	0,590787	
5,0	7,606892	- 45,293896	- 14,783377	0,626101	

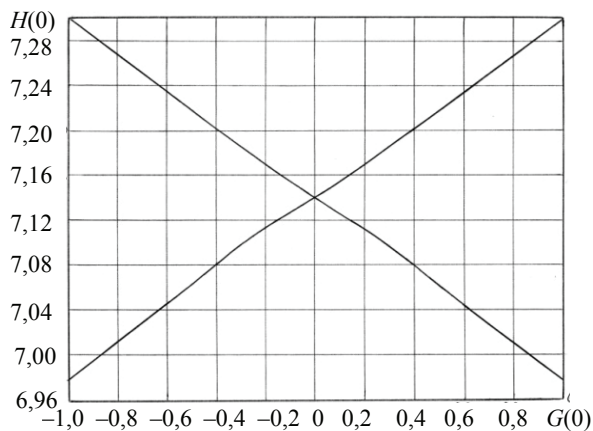


Рис. 5. Зависимость безразмерной скорости подачи жидкости $H(0)$ через перфорацию вращающегося диска от безразмерной скорости его вращения $G(0)$ для обеспечения коэффициента радиального давления $C = 0$ при безразмерном расстоянии между дисками $\varepsilon_0 = 6$ и $H(\varepsilon_0) = 0, G(\varepsilon_0) = 0$

Таблица 4

**Решение при $H'(0) = 0, H(\varepsilon_0) = 0, H'(\varepsilon_0) = 0, G(\varepsilon_0) = 0,$
 $\varepsilon_0 = 6, C = 0$ (второе и третье решения)**

ε	H	H'	H''	G	G'	P
0,0	7,140795	0,000000	- 33,370068	0,000000	0,000000	50,991025
0,1	7,031537	- 1,775521	- 7,966386			47,666994
0,2	6,828149	- 2,191985	- 1,756065			44,443163
0,4	6,376585	- 2,263954	0,241037			38,396879
0,6	5,930229	- 2,195048	0,391479			32,972567
0,8	5,499191	- 2,114914	0,405064			28,126188
1,0	5,084324	- 2,033707	0,406526			23,816648
1,2	4,685715	- 1,952378	0,406712			20,003551
1,4	4,303374	- 1,871032	0,406740			16,647999
1,6	3,937303	- 1,789683	0,406745			13,712671
1,8	3,587501	- 1,708334				11,161831
2,0	3,253969	- 1,626985				8,961332
2,4	2,635715	- 1,464286	0,405746			5,482708
2,8	2,082540	- 1,301588				3,035387
3,2	1,594445	- 1,138889	0,406746			1,603366
3,6	1,171429	- 0,976191				0,396055
4,0	0,813492	- 0,813492				- 0,151723
4,4	0,520635	- 0,650794	0,404746	- 0,379733		
4,8	0,292857	- 0,488095	0,406746	- 0,402330		
5,2	0,130359	- 0,325397		- 0,308456		
5,6	0,032540	- 0,162698		- 0,161640		
6,0	0,000000	0,000000		0,000000		

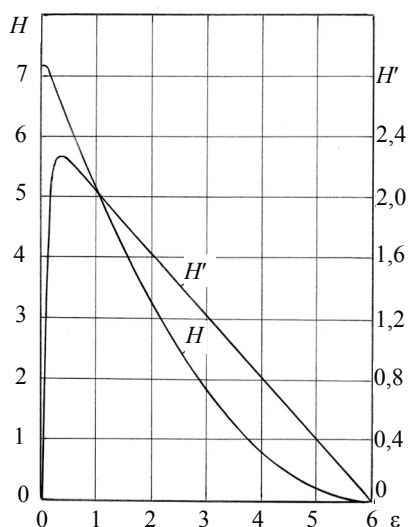


Рис. 6. Зависимость безразмерных скоростей, осевой H и радиальной H' от безразмерной осевой координаты ε при коэффициенте радиального давления $C = 0$ и $\varepsilon_0 = 6$ при $H(\varepsilon_0) = 0, G(0) = G(\varepsilon_0) = 0$

Первое дифференциальное уравнение системы (4) при $C = 0, G(\varepsilon) = 0$ принимает вид

$$H''' = (H')^2 - 2HH'', \quad (9)$$

второе уравнение превращается в тождественный нуль.

Используя свойство дифференциальных уравнений (4), следует, что при различных безразмерных расстояниях ε_0 справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 H(0) &= \text{const}_1; \\ \varepsilon_0^3 H''(0) &= \text{const}_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Для нашего случая будет:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 6H(0) = 7,140795; \\ H''(0) &= -33,370068. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \text{const}_1 &= 6 \cdot 7,140795 = 42,844770; \\ \text{const}_2 &= 216(-33,370068), \end{aligned}$$

или для различных значений ε_0 :

$$H(0) = \frac{42,844770}{\varepsilon_0}; \quad H''(0) = \frac{216(-33,370068)}{\varepsilon_0^3}.$$

Например, для $\varepsilon_0 = 12$:

$$\begin{aligned} H(0) &= \frac{42,844770}{12} = 3,5703975; \\ H''(0) &= \frac{216(-33,370068)}{12^3} = -4,1712585. \end{aligned}$$

Численное интегрирование дифференциального уравнения (9) при $\varepsilon_0 = 12$ и граничных условиях $H(0) = 3,5703975$, $H'(0) = 0$, $H''(0) = -4,1712585$ подтвердило справедливость равенства (10).

В заключение отметим, что еще раз подтвердилась многозначность решений нелинейных уравнений Навье–Стокса. Найдены варианты течения жидкости в центробежных полях в отсутствии радиального градиента давления. Кроме представленных случаев первого, второго и третьего решений найдено еще четвертое и пятое решения, рассмотрение которых осталось за рамками данной статьи. Условия, при которых давление вдоль радиуса остается постоянным не гарантирует постоянства давления в осевом направлении, то есть $\frac{\partial p}{\partial z} \neq 0$.

Список литературы

1. Karman, Th. Über laminare und turbulente Reibung / Th. Karman // ZAMM. – 1921. – Vol. 1. – P. 233–252.
2. Cochran, W.G. The flow due to a rotating disk / W.G. Cochran // Proc. Cambr. Phil. – 1934. – Vol. 30. – P. 365–375.
3. Koptev, A.A. Die Flüssigkeitsströmung in den Zentrifugalfeldern unter der Wirkung der sich drehenden Scheiben / A.A. Koptev // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 1995. – Т. 1, № 1–2. – С. 65–74.
4. Koptev, A.A. Die Flüssigkeitsströmung in den Zentrifugalfeldern unter der Wirkung der sich drehenden Scheiben. Blick auf das Karmanproblem aus der Urendlichkeit / A.A. Koptev // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 1996. – Т. 2, № 3. – С. 271–280.
5. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг ; пер. с нем. Г.А. Вольперта под ред. Л.Г. Лойцанского. – М. : Наука, 1969. – 742 с.
6. Коптев, А.А. Движение жидкости в центробежных полях. В 2 ч. Ч. 1. Течение жидкости вблизи вращающегося диска / А.А. Коптев. – М. : Машиностроение-1, 2005. – 240 с.
7. Коптев, А.А. Движение жидкости в центробежных полях. В 2 ч. Ч. 2. Течение жидкости в ограниченном пространстве / А.А. Коптев. – М. : Машиностроение-1, 2006. – 300 с.
8. Червяков, В.М. Определение энергозатрат в роторных аппаратах / В.М. Червяков, А.А. Коптев // Хим. и нефтегаз. машиностроение. – 2005. – № 4. – С. 10–12.
9. Коптев, А.А. Течение жидкости в зазоре между однонаправленными вращающимися перфорированными дисками при отсутствии радиального градиента давления / А.А. Коптев, В.М. Червяков // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 2009. – Т. 15, № 3. – С. 540–551.

Liquid Flow in the Centrifugal Field between Rotating Perforated and Stationary Impermeable Disks under Pressure Constancy along the Disk Radius

A.A. Koptev, V.B. Kopteva

*Department “Engineering and Technology of Nanoproduction”,
TSTU; postmaster@kma.tstu.ru*

Key words and phrases: dimensionless variables; Karman substitution; Navier–Stokes equation; ordinary nonlinear differential equations; radial thrust coefficient.

Abstract: The article examines the solution of Navier-Stokes equations in the cylindrical system of coordinates in case of the liquid flow between rotating perforated and stationary solid disks. The ambiguity of solutions under the vanishing radial thrust gradient is shown. The substitution of the transformation of variables in Karman equations is used in the solution.

Flüssigkeitsströmung im zentrifugalen Feld zwischen drehbaren gelochten und regungslosen undurchdringlichen Scheiben unter Druckbeständigkeit längs Scheibenradius

Zusammenfassung: Die Lösung der Gleichung von Navier–Stokes im zylindrischen Koordinatensystem im Fall von Flüssigkeitsströmen zwischen drehbaren gelochten und regungslosen undurchdringlichen Scheiben wurde geprüft. Die Mehrdeutigkeit der Gleichungen unter radialen Druckgradient, der gleich Null ist, wurde gezeigt. In der Lösung wurde die Permutation von Variablensatz in den Karman Gleichungen genutzt.

Flux du liquide dans un champ centrifuge entre les disques perforés tournants et ceux opaques et fixes lors de la constance de la pression le long du rayon des disques

Résumé: Est examinée la solution de l'équation de Navier–Stokes dans un système de coordonnées cylindriques dans le cas de l'écoulement du liquide entre les disques perforés tournants et ceux opaques et fixes. Est montrée la non-unicité des solutions avec le gradient de pression radial égal à zéro. Lors de la solution est employé le changement des constantes selon l'équation de Karman.

Авторы: *Коптев Андрей Алексеевич* – кандидат технических наук, профессор кафедры «Техника и технологии производства нанопроductов»; *Коптева Вера Борисовна* – старший преподаватель кафедры «Техника и технологии производства нанопроductов», ГОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: *Коновалов Виктор Иванович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Химическая инженерия», ГОУ ВПО «ТГТУ».
