

ПРИМЕНЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЕМЕНТА ОБОЛОЧКИ ДЛЯ РАСЧЕТА КОМПОЗИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ НАКЛАДКАМИ

С.В. Плотникова, М.Г. Куликов

*Кафедра «Прикладная математика и механика», ГОУ ВПО «ТГТУ»;
kulikov@apmath.tstu.ru*

Представлена членом редколлегии профессором Г.М. Куликовым

Ключевые слова и фразы: композитная оболочка; метод конечных элементов; пьезоэлектрические наклейки; 7-параметрическая модель оболочки.

Аннотация: Представлена математическая модель, описывающая электроупругое состояние многослойных анизотропных оболочек с пьезоэлектрическими наклейками, построенная на основе 7-параметрической теории оболочек и позволяющая использовать трехмерные уравнения состояния. Разработан смешанный геометрически точный четырехузловой пьезоэлектрический элемент оболочки. Приведены численные примеры, подтверждающие состоятельность предложенной модели.

Введение

Эффективным современным методом управления формой композитных тонкостенных конструкций является использование пьезоэлектрических наклеек, внедренных в основной материал или закрепленных на поверхностях. В настоящее время активно разрабатываются аналитические и численные методы расчета таких конструкций [1–3]. В работе [4] для этих целей был разработан геометрически точный элемент оболочки GEXP4, построенный на базе 6-параметрической теории оболочек с учетом поперечного обжатия. Эта модель позволяет построить конечный элемент, свободный от пуассоновского, мембранного и других видов заперения, и может являться базой для построения геометрически нелинейной модели. Однако в таком элементе приходится использовать упрощенное уравнение состояния пространственной теории упругости [5], что для пьезоэлектрического элемента также приводит к искажению уравнения электроупругого состояния.

Избавиться от этого недостатка позволяет использование 7-параметрической теории оболочек, в которой в качестве независимых переменных выбираются по три перемещения на лицевых поверхностях оболочки и поперечное перемещение срединной поверхности оболочки. Построенный в [6] на базе этой теории смешанный элемент GEX7P4 продемонстрировал высокую эффективность и точность при расчете упругого напряженного состояния. В работе [7] предложено обобщение элемента GEX7P4 для расчета электроупругого состояния конструкций с распределенными пьезоэлектрическими слоями. В настоящей работе предлагается модификация элемента GEX7P4, позволяющая рассчитывать композитные конструкции с пьезоэлектрическими наклейками.

Описание кинематики оболочки

Рассмотрим оболочку, состоящую из композитной основы и наклеенных на лицевых поверхностях накладок из пьезоэлектрического материала. На отсчетной поверхности S выбираем криволинейную ортогональную систему координат θ_1, θ_2 , оси которой совпадают с линиями главных кривизн поверхности; \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 – единичные векторы, направленные вдоль координатных осей. Пусть \mathbf{e}_3 – единичный вектор, направленный по нормали к отсчетной поверхности; θ_3 – координатная ось в направлении \mathbf{e}_3 ; δ_k – координаты поверхностей раздела k -го и $(k+1)$ -го слоев, h_b и h_t – толщины нижнего и верхнего пьезоэлектрических слоев (рис. 1).

Разобьем оболочку на два вида элементов: базовые, которые содержат только композитную основу, и пьезоэлектрические, которые наряду с композитной основой содержат пьезоэлектрические слои. Обозначим через N число слоев в базовом элементе. Для простоты изложения предполагаем, что пьезоэлектрические накладки расположены симметрично на обеих лицевых поверхностях основы, хотя это предположение не является принципиальным.

Пусть S^- и S^+ – лицевые поверхности композитной основы элемента; u_i^\pm – перемещения точек поверхностей S^- и S^+ в направлениях координатных осей отсчетной поверхности, где $i = 1, 2, 3$; u_3^M – перемещения точек серединной поверхности в направлении θ_3 . Для тангенциальных перемещений используем линейную аппроксимацию по толщине оболочки, а для поперечного – квадратичную аппроксимацию:

$$u_\alpha = N^- u_\alpha^- + N^+ u_\alpha^+, \quad u_3 = L^- u_3^- + L^M u_3^M + L^+ u_3^+, \quad (1)$$

$$N^- = \frac{1}{h} (\delta_N - \theta_3), \quad N^+ = \frac{1}{h} (\theta_3 - \delta_0), \quad (2)$$

$$L^- = N^- (N^- - N^+), \quad L^M = 4N^- N^+, \quad L^+ = N^+ (N^+ - N^-),$$

где h – толщина композитной основы, $\theta_3 \in [\delta_0 - h_b, \delta_N + h_t]$ для пьезоэлектрического элемента, $\theta_3 \in [\delta_0, \delta_N]$ для базового элемента, $\alpha = 1, 2$.

Согласно [6], для деформаций применяем аппроксимации:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= N^- \varepsilon_{\alpha\beta}^- + N^+ \varepsilon_{\alpha\beta}^+, & \varepsilon_{33} &= N^- \varepsilon_{33}^- + N^+ \varepsilon_{33}^+, \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \varepsilon_{\alpha 3}^M, & \varepsilon_{\alpha 3}^M &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{\alpha 3}^- + \varepsilon_{\alpha 3}^+), \end{aligned} \quad (3)$$

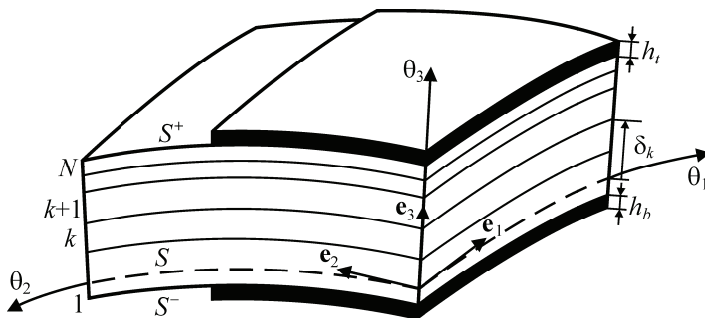


Рис. 1. Композитная оболочка с пьезоэлектрическими накладками

где $\varepsilon_{ij}^{\pm}(\theta_1, \theta_2)$ – деформации лицевых поверхностей оболочки:

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^{\pm} = c_{\alpha}^{\pm}\lambda_{\alpha\beta}^{\pm} + c_{\beta}^{\pm}\lambda_{\beta\alpha}^{\pm}, \quad \varepsilon_{33}^{\pm} = \beta_3^{\pm}, \quad (4)$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^{\pm} = c_{\alpha}^{\pm}\beta_{\alpha}^{\pm} + \lambda_{3\alpha}^{\pm},$$

где

$$\lambda_{\alpha\alpha}^{\pm} = \frac{1}{A_{\alpha}}u_{\alpha,\alpha}^{\pm} + B_{\alpha\beta}u_{\beta}^{\pm} + k_{\alpha}u_{3}^{\pm}, \quad \lambda_{\beta\alpha}^{\pm} = \frac{1}{A_{\alpha}}u_{\beta,\alpha}^{\pm} - B_{\alpha\beta}u_{\alpha}^{\pm} \quad (\beta \neq \alpha),$$

$$\lambda_{3\alpha}^{\pm} = \frac{1}{A_{\alpha}}u_{3,\alpha}^{\pm} - k_{\alpha}u_{\alpha}^{\pm}, \quad (5)$$

$$\beta_i^{-} = \frac{1}{h}(-3u_i^{-} + 4u_i^M - u_i^{+}), \quad \beta_i^{+} = \frac{1}{h}(u_i^{-} - 4u_i^M + 3u_i^{+}),$$

$$u_{\alpha}^M = \frac{1}{2}(u_{\alpha}^{-} + u_{\alpha}^{+}), \quad c_{\alpha}^A = 1 + k_{\alpha}\delta^A, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_{\alpha}A_{\beta}}A_{\alpha,\beta},$$

где A_{α} и k_{α} – коэффициенты Ламе и главные кривизны отсчетной поверхности; индексы α, β принимают значения 1, 2; $\delta^{-} = \delta_0, \delta^{+} = \delta_N$, индекс A характеризует принадлежность величины к внешним поверхностям и принимает значения «-» или «+».

Уравнения состояния и описание электрического поля

При построении матрицы жесткости пьезоэлектрических элементов используем уравнения состояния пьезоэластостатики [8]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{d}^T\mathbf{E}, \quad (6)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\zeta}\mathbf{E}, \quad (7)$$

$$\mathbf{D} = [D_1 \ D_2 \ D_3]^T, \quad \mathbf{E} = [E_1 \ E_2 \ E_3]^T,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{13} \ \sigma_{12}]^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{12}]^T,$$

где \mathbf{D} – вектор смещения электрического поля; \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля; $\boldsymbol{\sigma}$ – вектор напряжений; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор деформаций; $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}$ – матрица податливостей материала при постоянном электрическом поле, а \mathbf{C} – матрица упругих констант; \mathbf{d} – матрица пьезоэлектрических констант; $\boldsymbol{\zeta}$ – матрица диэлектрических констант. Рассматриваем пьезоэлектрический слой как моноклинный кристалл (класс 2), обладающий осью второго порядка параллельной оси θ_3 . В этом случае матрицы \mathbf{d} и $\boldsymbol{\zeta}$ могут быть записаны в виде

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & 0 \\ & \zeta_{22} & 0 \\ \text{sym.} & & \zeta_{33} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Разрешая уравнение (6) относительно вектора напряжений и введя его в (7), получим альтернативную форму уравнений электроупругого состояния:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T\mathbf{E}, \quad (9)$$

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad (10)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{d}\mathbf{C}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\zeta} - \mathbf{d}\mathbf{C}\mathbf{d}^T.$$

Предполагаем, что для пьезоэлектрических элементов электрический потенциал $\varphi_l(\theta_1, \theta_2)$, где $l = b, t$, имеет линейное распределение по толщине пьезоэлектрического слоя:

$$\varphi_l = N_l^- \varphi_l^- + N_l^+ \varphi_l^+, \quad (11)$$

$$N_b^- = \frac{1}{h_b}(\delta_0 - \theta_3), \quad N_b^+ = \frac{1}{h_b}(\theta_3 - \delta_0 + h_b), \quad (12)$$

$$N_t^- = \frac{1}{h_t}(\delta_N + h_t - \theta_3), \quad N_t^+ = \frac{1}{h_t}(\theta_3 - \delta_N),$$

где $\varphi_l^\pm(\theta_1, \theta_2)$ – значения электрического потенциала на верхней и нижней поверхностях l -го пьезоэлектрического слоя.

Вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} может быть выражен через потенциал φ как

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (13)$$

что приводит к аппроксимациям:

$$E_{l\alpha}^\pm = -\frac{1}{A_\alpha} \varphi_{l,\alpha}^\pm, \quad E_{l3} = -\frac{1}{h_l} (\varphi_l^+ - \varphi_l^-), \quad (14)$$

при этом компоненты вектора напряженности E_1, E_2 имеют линейное распределение по толщине пьезоэлектрического слоя, а компонента E_3 постоянна по толщине слоя.

Построение матрицы жесткости элемента

Используем билинейную конечноэлементную аппроксимацию перемещений и потенциала электрического поля

$$\mathbf{v} = \sum_r N_r \mathbf{v}_r, \quad \mathbf{v}_r = [u_{1r}^- \ u_{1r}^+ \ u_{2r}^- \ u_{2r}^+ \ u_{3r}^- \ u_{3r}^+ \ u_{3r}^M]^T, \quad (15)$$

$$\Phi_l = \sum_r N_r \Phi_{lr}, \quad \Phi_{lr} = [\varphi_{lr}^- \ \varphi_{lr}^+]^T, \quad (16)$$

где N_r – билинейные функции формы элемента; $r = \overline{1,4}$ – номер узла в элементе. Используя аппроксимации (15), (16), получим конечноэлементный аналог соотношений (4) и (13):

$$\mathbf{E} = \sum_{\eta_1, \eta_2} \xi_1^{\eta_1} \xi_2^{\eta_2} \mathbf{B}_M^{\eta_1 \eta_2} \mathbf{v}, \quad \Psi_l = \sum_{\eta_1, \eta_2} \xi_1^{\eta_1} \xi_2^{\eta_2} \mathbf{B}_E^{(l)\eta_1 \eta_2} \Phi_l, \quad (17)$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1^T \ \mathbf{v}_2^T \ \mathbf{v}_3^T \ \mathbf{v}_4^T]^T, \quad \Phi_l = [\Phi_{l1}^T \ \Phi_{l2}^T \ \Phi_{l3}^T \ \Phi_{l4}^T]^T, \quad \Psi_l = [E_{l1}^- \ E_{l1}^+ \ E_{l2}^- \ E_{l2}^+ \ E_{l3}]^T,$$

$$\mathbf{E} = [\varepsilon_{11}^- \ \varepsilon_{11}^+ \ \varepsilon_{22}^- \ \varepsilon_{22}^+ \ \varepsilon_{33}^- \ \varepsilon_{33}^+ \ 2\varepsilon_{12}^- \ 2\varepsilon_{12}^+ \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{23}]^T,$$

где $\mathbf{B}_M^{\eta_1 \eta_2}$ и $\mathbf{B}_E^{(l)\eta_1 \eta_2}$ – постоянные на элементе матрицы, индексы η_1, η_2 здесь и далее принимают значения 0 и 1, $\xi_\alpha \in [-1, 1]$ – нормализованные криволинейные координаты.

Используя смешанный функционал Ху-Васидзу, интегрируя по объему элемента и разрешая полученные при варьировании функционала уравнения относительно неизвестных векторов перемещений и потенциалов, получаем условия равновесия пьезоэлектрического элемента:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_M & \mathbf{K}_{ME}^{(t)} & \mathbf{K}_{ME}^{(b)} \\ \mathbf{K}_{ME}^{(t)\Gamma} & \mathbf{K}_E^{(t)} & \mathbf{O}_{8 \times 8} \\ \mathbf{K}_{ME}^{(b)\Gamma} & \mathbf{O}_{8 \times 8} & \mathbf{K}_E^{(b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \Phi_t \\ \Phi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S \\ \mathbf{O}_{8 \times 1} \\ \mathbf{O}_{8 \times 1} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где матрицы \mathbf{K}_M , $\mathbf{K}_{ME}^{(l)}$, $\mathbf{K}_E^{(l)}$ приведены в [4]; \mathbf{F}_B и \mathbf{F}_S – действующие на элементе объемные и поверхностные нагрузки. Определим материальные матрицы:

$$\mathbf{D}_M = \begin{bmatrix} D_{11}^{00} & D_{11}^{01} & D_{12}^{00} & D_{12}^{01} & D_{13}^{00} & D_{13}^{01} & D_{16}^{00} & D_{16}^{01} & 0 & 0 \\ & D_{11}^{11} & D_{12}^{01} & D_{12}^{11} & D_{13}^{01} & D_{13}^{11} & D_{16}^{01} & D_{16}^{11} & 0 & 0 \\ & & D_{22}^{00} & D_{22}^{01} & D_{23}^{00} & D_{23}^{01} & D_{26}^{00} & D_{26}^{01} & 0 & 0 \\ & & & D_{22}^{11} & D_{23}^{01} & D_{23}^{11} & D_{26}^{01} & D_{26}^{11} & 0 & 0 \\ & & & & D_{33}^{00} & D_{33}^{01} & D_{36}^{00} & D_{36}^{01} & 0 & 0 \\ & & & & & D_{33}^{11} & D_{36}^{01} & D_{36}^{11} & 0 & 0 \\ & & & & & & D_{66}^{00} & D_{66}^{01} & 0 & 0 \\ & & & & & & & D_{66}^{11} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & D_{55} & D_{45} \\ \text{sym.} & & & & & & & & & D_{44} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{D}_{ME}^{(l)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & n_l^0 e_{31}^{(l)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_l^1 e_{31}^{(l)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_l^0 e_{32}^{(l)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_l^1 e_{32}^{(l)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_l^0 e_{33}^{(l)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_l^1 e_{33}^{(l)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_l^0 e_{36}^{(l)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_l^1 e_{36}^{(l)} \\ m_l^0 e_{15}^{(l)} & m_l^1 e_{15}^{(l)} & m_l^0 e_{25}^{(l)} & m_l^1 e_{25}^{(l)} & 0 \\ m_l^0 e_{14}^{(l)} & m_l^1 e_{14}^{(l)} & m_l^0 e_{24}^{(l)} & m_l^1 e_{24}^{(l)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_E^{(l)} = \begin{bmatrix} k_l^{00} \in_{11}^{(l)} & k_l^{01} \in_{11}^{(l)} & k_l^{00} \in_{12}^{(l)} & k_l^{01} \in_{12}^{(l)} & 0 \\ & k_l^{11} \in_{11}^{(l)} & k_l^{01} \in_{12}^{(l)} & k_l^{11} \in_{12}^{(l)} & 0 \\ & & k_l^{11} \in_{22}^{(l)} & k_l^{01} \in_{22}^{(l)} & 0 \\ & & & k_l^{11} \in_{22}^{(l)} & 0 \\ \text{sym.} & & & & -h_l \in_{33}^{(l)} \end{bmatrix},$$

$$D_{ab}^{r_1 r_2} = \sum_{k=1}^N n_k^{r_1 r_2} C_{ab}^{(k)} + n_b^{r_1 r_2} C_{ab}^{(b)} + n_t^{r_1 r_2} C_{ab}^{(t)}, \quad D_{ab} = \sum_{k=1}^N h_k C_{ab}^{(k)} + h_b C_{ab}^{(b)} + h_t C_{ab}^{(t)},$$

$$m_b^{r1} = \int_{\delta_0 - h_b}^{\delta_0} (N_b^-)^{1-r1} (N_b^+)^{r1} d\theta_3, \quad m_t^{r1} = \int_{\delta_N}^{\delta_N + h_t} (N_t^-)^{1-r1} (N_t^+)^{r1} d\theta_3,$$

выражения для n_k^{r1r2} , n_b^{r1r2} , n_t^{r1r2} , n_b^{r1} , n_t^{r1} , k_b^{r1r2} , k_t^{r1r2} приведены в [4].

Рассмотренные примеры относятся к так называемым актуаторным проблемам, когда на электродах на внешних поверхностях пьезоэлектрических накладок подается заданное напряжение, а на поверхностях склейки композитной основы и пьезоэлектрических слоев напряжение принимается равным 0. Для таких задач конечноэлементное уравнение (18) упрощается:

$$\mathbf{K}_M \mathbf{V} = -\mathbf{K}_{ME}^{(t)} \Phi_t - \mathbf{K}_{ME}^{(b)} \Phi_b + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S. \quad (20)$$

Далее применяется стандартная процедура сборки элементов в ансамбль и решение полученной системы линейных уравнений методом Холецкого.

Численные результаты и их обсуждение

Рассмотрим задачу цилиндрического изгиба консольной пластины из углепластика с накладками из пьезокерамики PZT-5A, прикрепленными к нижней и верхней поверхностям пластины (рис. 2), где длина пластины $a = 100$ мм, толщина основы $h_C = 8$ мм, толщина накладок из пьезоэлектрика $h_{PZT} = 1$ мм. Актуаторы поляризованы в направлениях θ_3 и $-\theta_3$. К поверхностям $\theta_3 = -h/2$ и $\theta_3 = h/2$, где $h = h_C + 2h_{PZT}$, приложены равные электрические потенциалы φ_0 (задача растяжения) либо потенциалы $\pm \varphi_0$ (задача изгиба).

Ненулевые механические и пьезоэлектрические константы материалов приведены в [4], пьезоэлектрические константы PZT-5A: $e_{31} = e_{32} = -7,209$ Кл/м², $e_{33} = 15,118$ Кл/м². Задача моделировалась сеткой из 16 элементов. На рис. 3 показаны безразмерные перемещения $\tilde{u}_k = \frac{C_0 u_k}{e_0 \varphi_0}$, где $C_0 = 99,201 \cdot 10^9$ Па,

$e_0 = -7,209$ Кл/м² для задачи изгиба ($k = 3$) и растяжения ($k = 1$). Приведено сравнение с полученными трехмерным аналитическим решением [2] и с конечноэлементным решением на основе 6-параметрической теории оболочек [4]. Как видим, решение на основе 7-параметрической теории оболочек лучше согласуется с точным решением.

В следующем примере рассмотрена консольная прямоугольная композитная пластина с 30-ю накладками из пьезокерамики PZT G1195 (рис. 4). Основу пластины составляет 6-слойный углепластик AS4/3501 с различными направлениями укладки слоев, ненулевые механические и пьезоэлектрические константы материалов приведены в табл. 1. К внешним поверхностям пьезоэлектрических слоев

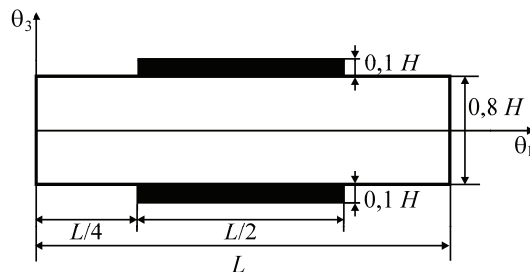


Рис. 2. Консольная пластина с пьезоэлектрическими накладками

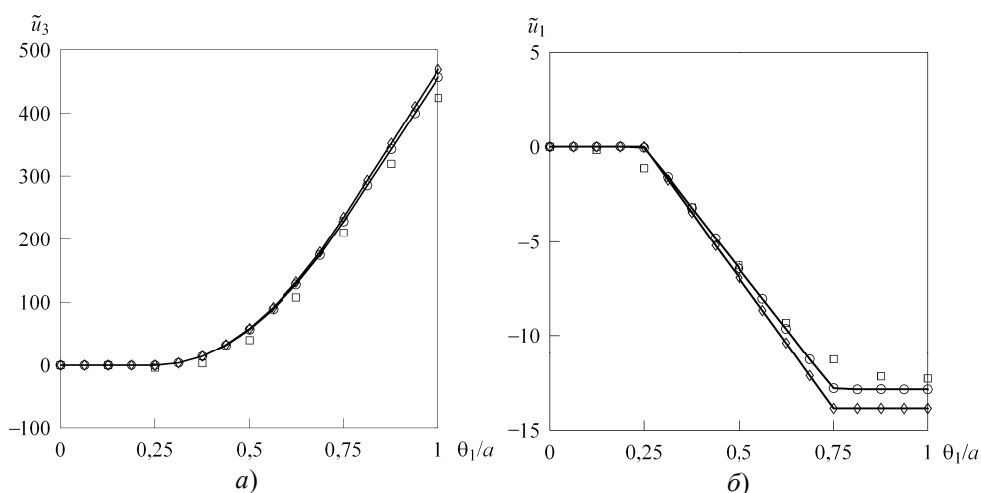


Рис. 3. Перемещения консольной пластины с пьезоэлектрическими накладками:

a – задача изгиба; *б* – задача растяжения;

○ – GEX7P4; ◇ – GEX6P4; □ – точное решение [3]

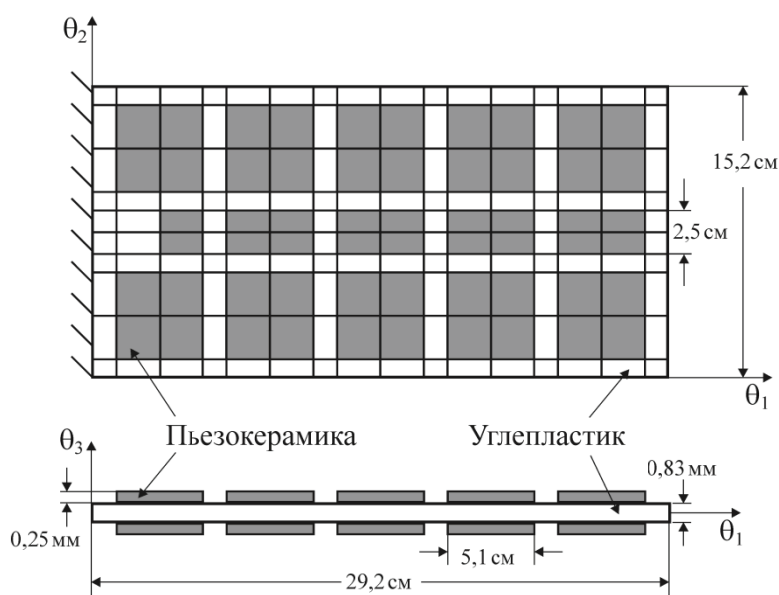


Рис. 4. Консольная пластина с 30-ю пьезоэлектрическими накладками (Геометрия и конечноэлементная сетка)

приложен электрический потенциал $\pm 157,6$ В для пластины с ориентацией слоев $[0/\pm 45]_s$ и $\pm 188,8$ В для пластины с ориентацией слоев $[30_2/0]_s$. Эта задача исследовалась экспериментально в [1], а также численно с помощью различных конечноэлементных моделей.

На рис. 5 приведены безразмерные перемещения $w_1 = u_3(\theta_1, b/2)/b$ и $w_2 = (u_3(\theta_1, b) - u_3(\theta_1, 0))/b$, где a – длина пластины, b – ее ширина (сетка 16×10). Приведено сравнение с результатами эксперимента из [1] и с результатами конечноэлементного расчета на основе послыпной теории оболочек [9]. Получено

**Механические и пьезоэлектрические константы
углепластиков и пьезоэлектриков**

Константа	Углепластик AS4/3501	Углепластик [2]	Пьезокерамика PZT G1195	Пьезокерамика PZT 4
E_{11} , Па	$143 \cdot 10^9$	$132,4 \cdot 10^9$	$63 \cdot 10^9$	$81,3 \cdot 10^9$
E_{22} , Па	$9,7 \cdot 10^9$	$10,8 \cdot 10^9$	$63 \cdot 10^9$	$81,3 \cdot 10^9$
E_{33} , Па	$9,7 \cdot 10^9$	$10,8 \cdot 10^9$	$63 \cdot 10^9$	$64,5 \cdot 10^9$
ν_{12}	0,3	0,24	0,3	0,33
ν_{13}	0,3	0,24	0,3	0,43
ν_{23}	0,3	0,49	0,3	0,43
G_{12} , Па	$6 \cdot 10^9$	$5,6 \cdot 10^9$	$24,2 \cdot 10^9$	$30,6 \cdot 10^9$
G_{13} , Па	$6 \cdot 10^9$	$5,6 \cdot 10^9$	$24,2 \cdot 10^9$	$25,6 \cdot 10^9$
G_{23} , Па	$2 \cdot 10^9$	$3,6 \cdot 10^9$	$24,2 \cdot 10^9$	$25,6 \cdot 10^9$
d_{31}, d_{32} , м/В	0	0	$254 \cdot 10^{-12}$	$-122 \cdot 10^{-12}$
d_{33} , м/В	0	0	$374 \cdot 10^{-12}$	$285 \cdot 10^{-12}$

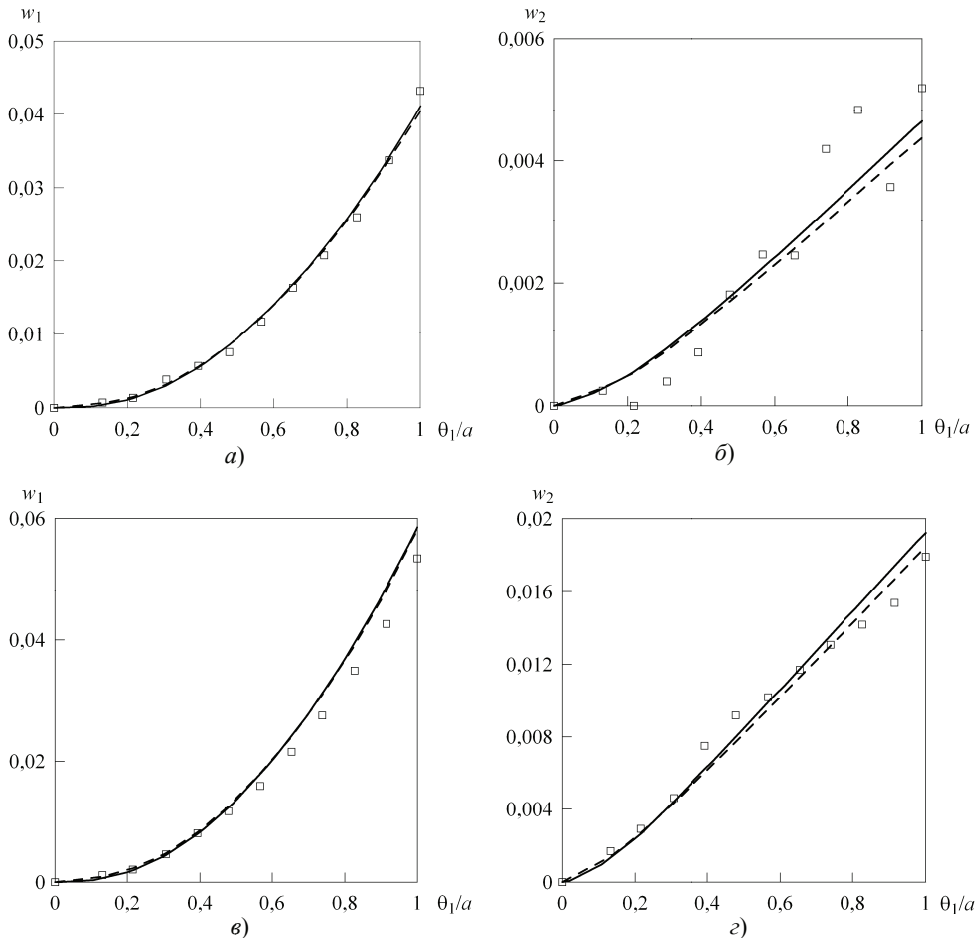


Рис. 5. Перемещения w_1 (а), w_2 (б) консольной пластины [0/45/-45]_s с 30-ю пьезоэлектрическими накладками и w_1 (в), w_2 (г) консольной пластины [30/0]_s с 30-ю пьезоэлектрическими накладками:

— — GEX7P4; - - - - Tan, Vu-Quoc [9]; □ — Crawley, Lazarus [1]

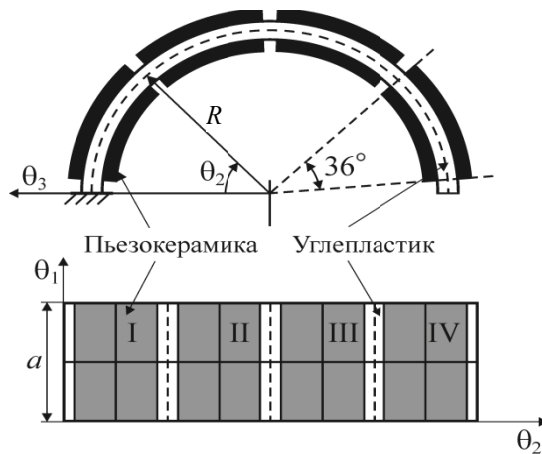


Рис. 6. Консольная цилиндрическая оболочка с пьезоэлектрическими накладками
(Геометрия и конечноэлементная сетка)

удовлетворительное совпадение с результатами эксперимента; практически полное совпадение с результатами расчета на такой же сетке указывает на то, что использование более сложных аппроксимаций для перемещений и деформаций, чем предложенные в данной работе, не приводит к улучшению результата.

В третьем примере рассматриваем оболочку, представляющую собой половину цилиндра ($R = 0,291$ м; $a = 0,1524$ м), жестко закрепленную по прямолинейной границе (рис. 6). Основу оболочки составляет 8-слойный углепластик с ориентацией слоев $[0/90/+45/-45]_s$ (углы отсчитываются от направления θ_2), толщина слоя 0,12 мм. На лицевых сторонах закреплены 8 накладок из пьезокерамики PZT4 толщиной 0,24 мм. Ненулевые механические и пьезоэлектрические константы материалов приведены в табл. 1. К внешним поверхностям накладок приложен электрический потенциал ± 50 В. На рис. 7 показаны перемещения серединной

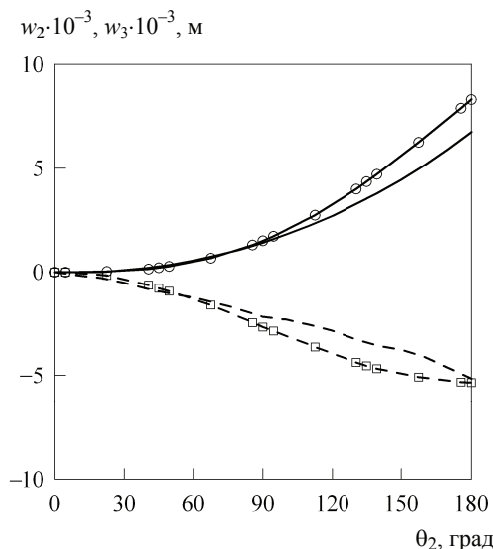


Рис. 7. Перемещения цилиндрической оболочки с 8 пьезоэлектрическими накладками:
—○— w_2 (GEX7P4); —□— w_3 (GEX7P4); — w_2 [10]; --- w_3 [10]

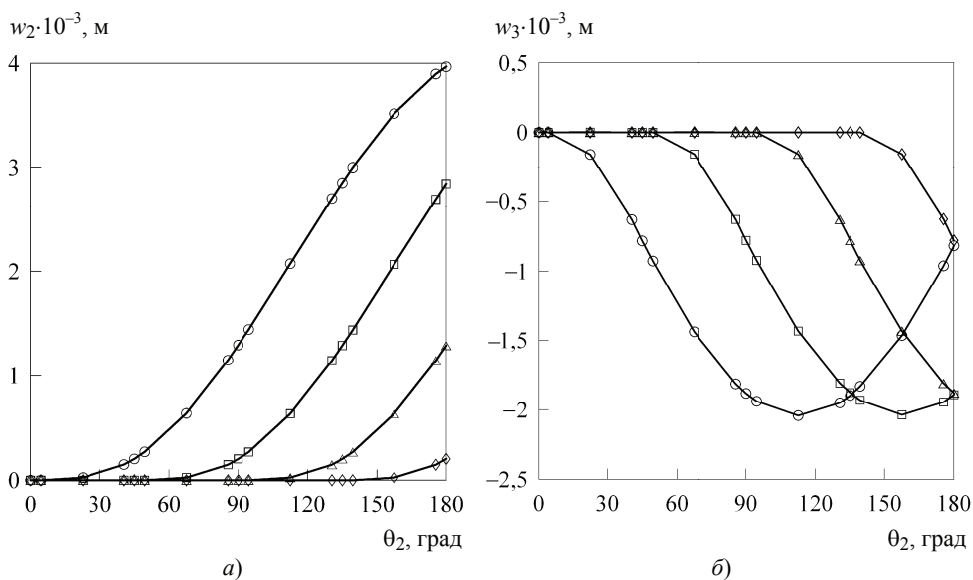


Рис. 8. Вклад накладок в перемещения w_2 (а) и w_3 (б) цилиндрической оболочки:
 —○— I; —□— II; —△— III; —◇— IV

линии оболочки $w_3 = u_3(a/2, \theta_2)$ и $w_2 = u_2(a/2, \theta_2)$. Приведено сравнение с результатами из [10], полученными на аналогичной сетке методом конечных элементов, построенным на основе теории оболочек без учета поперечного обжатия. Незначительное расхождение результатов может быть объяснено использованием различных теоретических моделей.

Далее для этой оболочки исследовался вклад каждой пары накладок на перемещения срединной линии в окружном и поперечном направлениях. Рассматриваются следующие четыре задачи: к углепластиковой основе прикрепляется одна пара накладок (I, II, III или IV), то есть накладки занимают 20 % поверхности оболочки. На рис. 8 приведены перемещения, соответствующие такому расположению накладок. Как видим, на перемещения на свободном конце в окружном направлении наибольшее влияние оказывает накладка I, а на перемещения на свободном конце в поперечном направлении – накладки II и III. Таким образом, варьируя расположение пьезоэлектрических накладок, можно управлять формой конструкции.

Заключение

Построенная конечноэлементная модель для расчета электроупругого состояния оболочек переменной толщины позволяет решать задачи для пластин и оболочек с пьезоэлектрическими накладками. Использование уравнений состояния пространственной теории электроупругости позволяет получать решения, достаточно близкие к точным. Данная модель может служить основой для построения алгоритма управления формой адаптивных конструкций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 2.1.1/660).

Список литературы

1. Crawley, E.F. Induced strain actuation of isotropic and anisotropic plates / E.F. Crawley, K.B. Lazarus // AIAA Journal. – 1991. – Vol. 29. – P. 944–951.

2. Vel, S.S. Analysis of piezoelectric bimorphs and plates with segmented actuators / S.S. Vel, R.S. Batra // *Thin-Walled Structures*. – 2001. – Vol. 39. – P. 23–44.
3. Analysis of laminated composite beams and plates with piezoelectric patches using the element-free Galerkin method / K.M. Liew [and others] // *Computational Mechanics*. – 2002. – Vol. 29. – P. 486–497.
4. Плотникова, С.В. Расчет композитных оболочек с пьезоэлектрическими накладками / С.В. Плотникова, М.Г. Куликов // *Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та*. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 380–390.
5. Kulikov, G.M. On the use of 6-parameter multilayered shell models in structural mechanics / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // *Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та*. – 2004. – Т. 10, № 4А. – С. 1042–1052.
6. Kulikov, G.M. Finite rotation geometrically exact four-node solid-shell element with seven displacement degrees of freedom / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. – 2008. – Vol. 28, No. 1. – P. 15–38.
7. Kulikov, G.M. Effective geometrically exact piezoelectric solid-shell element based on 3D analytical integration / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // *Proceedings of the 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference, Portugal, Lisbon, 7–11 September, 2009*. – Lisbon, 2009. – P. 351–352.
8. Новацкий, В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий. – М. : Мир, 1986. – 160 с.
9. Tan, X.G. Optimal solid shell element for large-deformable composite structures with piezoelectric layers and active vibration control / X.G. Tan, L. Vu-Quoc // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2005. – Vol. 64. – P. 1981–2013.
10. Coupled mixed-field laminate theory and finite element for smart piezoelectric composite shell structures : NASA Contractor Report / D.A. Saravanos. – Cleveland, 2009. – 38 p. – № 198490.

Application of Three-Dimension Shell Element for Analysis of Composite Structures with Piezoelectric Patches

S.V. Plotnikova, M.G. Kulikov

*Department “Applied Mathematics and Mechanics”, TSTU;
kulikov@apmath.tstu.ru*

Key words and phrases: composite shell; finite element method; piezoelectric patches; 7-parameter shell model.

Abstract: Mathematical model of electroelasticity for multilayered anisotropic shells with piezoelectric patches, based on 7-parameter shell theory and used 3D constitutive equations is presented in this paper. Mixed geometrically exact four-node piezoelectric shell element is developed. Numerical examples demonstrated the validity of the proposed model are reported.

Anwendung des dreidimensionalen Umhüllengelementes für die Berechnung der Kompositenkonstruktionen mit den piezoelektrischen Belägen

Zusammenfassung: Im Artikel wird das mathematische Modell für die Beschreibung des elektroelastischen Zustandes der vielschichtigen anisotropen Umhüllungen mit den piezoelektrischen Belägen vorgelegt. Es ist auf Grund der

7-Parametertheorie der Umhüllungen gebaut und erlaubt, die dreidimensionalen Gleichungen des Zustandes zu benutzen. Es ist den gemischten geometrisch feinen piezoelektrischen Element der Umhüllung erarbeitet. Es sind die die Stichhaltigkeit des vorgeschlagenen Modells bestätigenden zahlenmäßigen Beispiele angeführt.

Usage de l'élément de l'enveloppe à trois dimensions pour le calcul des constructions composites avec les appliques piézoélectriques

Résumé: Dans l'article est présenté le modèle mathématique, décrivant l'état électrique et élastique des enveloppes anisotropes multicouches avec les appliques piézoélectriques, construit à la base de la théorie 7-paramétrique des enveloppes et permettant d'utiliser des équations à trois dimensions de l'état. Est élaboré un élément mixte géométriquement exacte piézoélectrique à quatre noeuds. Sont cités les exemples numériques confirmant la validité du modèle proposé.

Авторы: *Плотникова Светлана Валерьевна* – кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и механика»; *Куликов Михаил Геннадьевич* – аспирант кафедры «Прикладная математика и механика», ГОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: *Ярцев Виктор Петрович* – доктор технических наук, профессор кафедры «Конструкции зданий и сооружений», ГОУ ВПО «ТГТУ».
