УДК 519.6

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ОДНИМ КЛАССОМ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ

А.П. Афанасьев [1], С.М. Дзюба[2], А.Н. Пчелинцев[2], С.М. Лобанов[3]

Институт системного анализа РАН (1);
Кафедры: «Распределенные вычислительные системы» (2),
«Информационные системы и защита информации» (3),
ГОУ ВПО «ТГТУ»; sdzyuba@mail.tambov.ru

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: закон управления с обратной связью; нелинейная система; метод последовательных приближений.

Анотация: Приведена теорема существования решений общей задачи стабилизации для одного класса нелинейных систем. Показано, что решение этой задачи дается законом управления с обратной связью. Установлена схема последовательных приближений, позволяющая получить этот закон.

---

1. Введение

Рассмотрим управляемую нелинейную динамическую систему, характеризуемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x,u), \tag{1}$$

в котором $x = (x^1,\ldots,x^n)$ – n-мерный действительный вектор состояния, $u = (u^1,\ldots,u^m)$ – m-мерный действительный вектор управления; A и B – действительные $(n\times n)$- и $(n\times m)$-матрицы; $f = (f^1,\ldots,f^n)$ – векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i,j = 1,\ldots,n,$$

и

$$\frac{\partial f^i}{\partial u^j}, \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m,$$

в пространстве R^{n+m}.

Предположим, что начальное состояние

$$x(t_0) = c \tag{2}$$

задано, а задача управления системой (1) заключается в минимизации функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \big[\langle e(t), Qe(t)\rangle + \langle u(t), Ru(t)\rangle\big] dt + \frac{1}{2}\langle e(T), Pe(T)\rangle, \tag{3}$$

в котором T – фиксированное конечное время; Q и P – положительные полуопределенные $(n{\times}n)$-матрицы; R – положительно определенная $(m{\times}m)$-матрица; $e(t)$ – ошибка системы, то есть

$$e(t) = x(t) - z(t)$$

для всех значений $t_0 \le t \le T$, где $z = (z^1, \ldots, z^n)$ – n-мерный действительный вектор, характеризующий заданный режим функционирования системы (1).

Легко видеть, что непосредственное применение принципа максимума Л.С. Понтрягина к рассматриваемой задаче приводит к достаточно сложной краевой задаче, если только (1) – (3) не сводится к линейно-квадратичной задаче слежения [1, с. 657]. Однако во многих практических ситуациях режим $z(t)$ устроен достаточно плохо и указанное сведение становится невозможным. В этом случае, если влиянием функции f на систему (1) по каким-либо причинам можно пренебречь, то задача (1) – (3) оказывается достаточно простой и ее, видимо, можно считать полностью решенной [1, 2]. Кроме того, весьма важным представляется то обстоятельство, что здесь решение удается получить в виде закона управления с обратной связью. Поэтому в общем случае для получения оценок решения задачи (1) – (3) рассматривают различные методы, которые в той или иной форме используют линеаризацию и последовательные приближения, позволяющие свести ее (задачу) к некоторой последовательности линейно-квадратичных задач слежения [3–5].

В работе [6] намечено дальнейшее развитие упомянутых выше результатов. Существенным недостатком основной теоремы статьи [6] является то, что закон управления дается только на некотором достаточно малом промежутке времени. Устраним этот недостаток.

2. Вспомогательные задачи

Прежде всего, опишем первую (теперь уже классическую) процедуру построения оценок решения нелинейно-квадратичных задач оптимального управления, фактически лежащую в основе последующих построений.

Следуя [3], рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \big[\langle e(t), Qe(t)\rangle + \langle u(t), Ru(t)\rangle\big] dt + \frac{1}{2}\langle e(T), Pe(T)\rangle \tag{4}$$

с ограничением

$$\dot{x} = g(x, u), \quad x(t_0) = c, \tag{5}$$

где $g=(g^1,\ldots,g^n)$ – нелинейная векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными:

$$\frac{\partial g^i}{\partial x^j},\quad i,j=1,\ldots,n$$

и

$$\frac{\partial g^i}{\partial u^j},\quad i=1,\ldots,n,\quad j=1,\ldots,m$$

в пространстве R^{n+m}.

Пусть $u_N(t),x_N(t)$ – некоторое *N*-е приближение к оптимальному управлению и состоянию в задаче (4), (5). Тогда $(N+1)$-е приближение $u_{N+1}(t),x_{N+1}(t)$ может быть получено как решение вспомогательной задачи о минимизации функционала

$$I_{N+1}(u)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[\langle e(t),Qe(t)\rangle+\langle u(t),Ru(t)\rangle\right]dt+\frac{1}{2}\langle e(T),Pe(T)\rangle \tag{6}$$

с ограничением

$$\dot{x}=g(x_N,u_N)+A_N(t)(x-x_N)+B_N(t)(u-u_N),\quad x(t_0)=c, \tag{7}$$

в котором $A_N(t)$ и $B_N(t)$ – действительные ($n\times n$)- и ($n\times m$)-матрицы, задаваемые равенствами

$$A_N(t)=\left.\left(\frac{\partial g^i}{\partial x^j}\right)\right|_{\substack{x=x_N(t)\\ u=u_N(t)}} \tag{8}$$

и

$$B_N(t)=\left.\left(\frac{\partial g^i}{\partial u^j}\right)\right|_{\substack{x=x_N(t)\\ u=u_N(t)}} \tag{9}$$

соответственно.

Задача (6), (7) представляет собой вариант задачи слежения для линейной системы и ее решение, как известно, дается законом управления с обратной связью

$$u_{N+1}(t)=R^{-1}B_{N'}(t)[h_{N+1}(t)-K_{N+1}(t)x_{N+1}(t)], \tag{10}$$

в котором $K_{N+1}(t)$ – решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\begin{gathered}\dot{K}_{N+1}(t)=-K_{N+1}(t)A_N(t)-A_{N'}(t)K_{N+1}(t)+\\+K_{N+1}(t)B_N(t)R^{-1}B_{N'}(t)K_{N+1}(t)-Q\end{gathered} \tag{11}$$

с граничным условием

$$K_{N+1}(T) = P, \tag{12}$$

а $h_{N+1}(t)$ – решение линейного дифференциального уравнения

$$\begin{gathered}\dot{h}_{N+1}(t) = -[A_N(t) - B_N(t)R^{-1}B_{N'}(t)K_{N+1}(t)]'h_{N+1}(t) - \\ - Qz(t) + K_{N+1}(t)[g(x_N(t), u_N(t)) - A_N(t)x_N(t) - B_N(t)u_N(t)]\end{gathered} \tag{13}$$

с граничным условием [1, с. 699][1].

$$h_{N+1}(T) = Pz(T)\,. \tag{14}$$

Если построенные выше последовательности

$$x_1, x_2, \ldots, x_N, \ldots \tag{15}$$

и

$$u_1, u_2, \ldots, u_N, \ldots \tag{16}$$

равностепенно непрерывны и равномерно ограничены на отрезке $[t_0, T]$, то из (15) и (16) можно выбрать подпоследовательности

$$x_{N_1}, x_{N_2}, \ldots, x_{N_k}, \ldots \tag{17}$$

и

$$u_{N_1}, u_{N_2}, \ldots, u_{N_k}, \ldots, \tag{18}$$

равномерно на $[t_0, T]$ сходящиеся к некоторым непрерывным функциям x^* и u^* соответственно, где

$$\lim_{k\to\infty} N_k = \infty.$$

Тогда, если окажется, что последовательность (17) совпадает с последовательностью (15), а последовательность (18) – с последовательностью (16), то, используя соотношения (8) – (14), можно рассмотреть и вопрос о том, будет ли $u^*(t)$ оптимальным управлением в задаче (4), (5).

Заметим теперь, что показать эквивалентность последовательностей (15), (17) и (16), (18) в общем случае совсем непросто. Поэтому в работе [4] была предложена иная вспомогательная задача, более полно учитывающая конкретные особенности задачи (1) – (3).

Следуя [4], для всех значений $N = 0, 1, 2, \ldots$ рассмотрим вспомогательную задачу о минимизации функционала

$$J_{N+1}(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[\langle e(t), Qe(t)\rangle + \langle u(t), Ru(t)\rangle\right]dt + \frac{1}{2}\langle e(T), Pe(T)\rangle \tag{19}$$

с ограничением

[1] Здесь в книге [1] имеет место очевидная опечатка.

$$\dot{x}_{N+1} = Ax_{N+1} + Bu_{N+1} + f(x_N, u_N), \quad x_{N+1}(t_0) = c. \tag{20}$$

Для заданных функций x_N и u_N оптимальное управление $u_{N+1}(t)$ в задаче (19), (20) дается законом управления с обратной связью

$$u_{N+1}(t) = R^{-1}B'[h_{N+1}(t) - K(t)x_{N+1}(t)], \tag{21}$$

в котором $x_{N+1}(t)$ – решение уравнения (20), соответствующее $u_{N+1}(t)$ и удовлетворяющее начальному условию

$$x_{N+1}(t_0) = c,$$

$K(t)$ – решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{K}(t) = -K(t)A - A'K(t) + K(t)BR^{-1}B'K(t) - Q \tag{22}$$

с граничным условием

$$K(T) = P, \tag{23}$$

а $h_{N+1}(t)$ – решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{h}_{N+1}(t) = -[A - BR^{-1}B'K(t)]'h_{N+1}(t) - Qz(t) + K(t)f(x_N(t), u_N(t)) \tag{24}$$

с граничным условием

$$h_{N+1}(T) = Pz(T). \tag{25}$$

Таким образом, если начальное приближение $x_0(t)$, $u_0(t)$ задано, то соотношения (19) – (25) определяют схему последовательных приближений, которая, как будет показано ниже, при всех достаточно малых значениях T позволяет установить существование решений задачи (1) – (3) и дает эффективную процедуру построения этих решений. Отметим также, что для простоты начальное приближение здесь будет определено соотношениями

$$x_0(t) \equiv c \tag{26}$$

и

$$u_0(t) \equiv R^{-1}B'[Pz(T) - K(t)c]. \tag{27}$$

3. Основная теорема

Несколько ослабим требования, предъявляемые у функции *f*. Будем считать, что эта функция липшицева в пространстве R^{n+m} с константой λ.

Пусть L_2 – множество функций, определенных на отрезке $[t_0, T]$, принимающих значения в пространстве R^m и суммируемых с квадратом по Лебегу на $[t_0, T]$. Далее, пусть L_2^T – часть множества L_2, такая, что для каждой функции $u \in L_2^T$ уравнение (1) имеет абсолютно непрерывное решение $x(t)$, определенное для всех значений $t_0 \le t \le T$ и удовлетворяющее начальному условию (2). В этих обозначениях имеет место следующая основная теорема 1.

Теорема 1. *Для каждой точки* (t_0, c) *пространства* R^{1+n} *найдется такое действительное число* λ_0, *что для всех значений* $0 < \lambda \le \lambda_0$ *задача* (1) – (3) *имеет решение* $x^*(t), u^*(t)$. *Более того, оказывается, что при* $t_0 \le t \le T$

$$u^*(t) = R^{-1}B'[h^*(t) - K(t)x^*(t)], \tag{28}$$

где $h^*(t)$ *– решение дифференциального уравнения*

$$\dot{h}^*(t) = -[A - BR^{-1}B'K(t)]'h^*(t) - Qz(t) + K(t)f(x^*(t), u^*(t)) \tag{29}$$

с граничным условием

$$h^*(T) = Pz(T). \tag{30}$$

Доказательство. Пусть $X(t)$ и $H(t)$ – решения линейных матричных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = [A - BR^{-1}B'K(t)]X, \quad X(t_0) = E$$

и, соответственно,

$$\dot{H} = -[A - BR^{-1}B'K(t)]'H, \quad H(T) = E,$$

где E – единичная $(n \times n)$-матрица. Тогда при использовании управления (21) уравнение (20) эквивалентно уравнению

$$x_{N+1}(t) = X(t)c + \int_{t_0}^{t} X(t-\tau)\Big[BR^{-1}B'h_{N+1}(\tau) + f(x_N(\tau), u_N(\tau))\Big]\, d\tau, \tag{31}$$

а уравнение (24) с граничным условием (25) – уравнению

$$h_{N+1}(t) = H(t)Pz(T) + \int_{T}^{t} H(t-\tau)\big(K(\tau)f(x_N(\tau), u_N(\tau)) - Qz(\tau)\big)d\tau, \tag{32}$$

Принимая во внимание (32), перепишем уравнение (31) в следующем эквивалентном виде

$$x_{N+1}(t) = X(t)c + \int_{t_0}^{t} X(t-\tau)\Bigg\{ f(x_N(\tau), u_N(\tau)) + BR^{-1}B'\Bigg[H(\tau)Pz(T) +$$

$$+ \int_{T}^{t} H(\tau - s)(K(s)f(x_N(s), u_N(s)) - Qz(s))ds \Bigg]\Bigg\} d\tau.$$

Тогда с учетом (21) система (31), (32) может быть представлена в символической форме

$$x_{N+1}(t) = X(t)c + \int_{t_0}^{t}\left[f_1(t, \tau, x_N(\tau), h_N(\tau)) + \int_{t}^{T} f_2(\tau, s, x_N(s), h_N(s))ds \right] d\tau, \tag{33}$$

$$h_{N+1}(t) = H(t)h_0 + \int_{t}^{T} f_3(t, \tau, x_N(\tau), h_N(\tau))d\tau, \tag{34}$$

где

$$h_0 = Pz(T),$$

а $f_1 = (f_1^1, \dots, f_1^n)$, $f_2 = (f_2^1, \dots, f_2^n)$ и $f_3 = (f_3^1, \dots, f_3^n)$ – соответствующие векторные функции липшицевы.

Пусть теперь a – некоторое положительное число. Обозначим через Σ – множество точек $(t, x, h) \in R^{1+2n}$, для которых выполнены неравенства

$$t_0 \le t \le T, \quad | x - c | \le a, \quad | h - h_0 | \le a, \tag{35}$$

где $| x |$ – евклидова длина вектора x. Так как Σ – компактное множество, то найдется такое положительное число M, что для всех значений t, x и h, удовлетворяющих условиям (35), при $t_0 \le \tau \le T$ выполняется неравенство

$$| f_l(t, \tau, x, h) | \le M, \quad l = 1, 2, 3. \tag{36}$$

Обозначим через Ω множество всех непрерывных пар (x, h) функций, определенных на отрезке $[t_0, T]$, принимающих значения в пространстве R^n и при $t_0 \le t \le T$ удовлетворяющих условиям

$$| x(t) - c | \le a, \quad | h(t) - h_0 | \le a, \tag{37}$$

то есть Ω – множество непрерывных пар (x, h) функций, графики которых лежат в Σ. При этом будем рассматривать часть Ω_T множества Ω такую, что наряду с неравенствами (37) при $(x, h) \in \Omega_T$ выполнялись бы также неравенства:

$$| X(t)c - c | \le \frac{a}{2}, \quad | H(t)h_0 - h_0 | \le \frac{a}{2} \tag{38}$$

и

$$| x(t) - X(t)c | \le \frac{a}{2}, \quad | h(t) - H(t)h_0 | \le \frac{a}{2}. \tag{39}$$

Тогда в силу неравенств

$$| x(t) - c | \le | x(t) - X(t)c | + | X(t)c - c |$$

и

$$| h(t) - h_0 | \le | h(t) - H(t)h_0 | + | H(t)h_0 - h_0 |$$

из условий (38) и (39) следуют неравенства (37) и, таким образом, принадлежность пары (x, h) к множеству Ω обусловлена.

Для всех значений $t_0 \le t \le T$ положим

$$\varphi(t) = (x(t), h(t))$$

и будем говорить, что $\varphi \in \Omega_T$, если $(x, h) \in \Omega_T$. Обозначим через F оператор, задаваемый правыми частями системы (33), (34). Тогда, как легко видеть, если число T достаточно мало, то из принадлежности φ к Ω_T следует принадлежность к Ω_T и функции

$$\varphi^* = F\varphi, \tag{40}$$

где $\varphi^* = (x^*, h^*)$.

В самом деле, для того чтобы функция φ^*, задаваемая соотношением (40), принадлежала к множеству Ω_T, достаточно, чтобы при выполнении условия (38) для всех значений $t_0 \le t \le T$ были выполнены также и неравенства

$$|x^*(t) - X(t)c| \le \frac{a}{2}, \quad |h^*(t) - H(t)h_0| \le \frac{a}{2}.$$

Но в силу (33), (34) и (36) имеем

$$|h^*(t) - H(t)h_0| = \left|\int_t^T f_3(t, \tau, x(\tau), h(\tau))d\tau\right| \le M(T - t_0)$$

и

$$|x^*(t) - X(t)c| = \left|\int_{t_0}^t [f_1(t, \tau, x(\tau), h(\tau)) + \right.$$

$$\left. + \int_t^T f_2(\tau, s, x(s), h(s))ds]d\tau\right| \le M((T - t_0) + 1)(T - t_0).$$

Отсюда следует, что при

$$M((T - t_0) + 1)(T - t_0) \le \frac{a}{2} \tag{41}$$

условие, предъявляемое к оператору F в (40), выполнено.

Пусть теперь $\varphi = (x, h)$ и $\psi = (y, g)$ – некоторые две функции, принадлежащие к множеству Ω_T. Тогда при выполнении неравенства (41) функции

$$\varphi^* = F\varphi$$

и

$$\psi^* = F\psi$$

также принадлежат к Ω_T, где $\varphi^* = (x^*, h^*)$ и $\psi^* = (y^*, g^*)$. При этом оказывается, что

$$\|\varphi^* - \psi^*\| = \|F\varphi - F\psi\| \le k\|\varphi - \psi\|, \tag{42}$$

где $\|\varphi\| = \max\limits_{t_0 \le t \le T} |\varphi(t)|$ и k – некоторое положительное число, не зависящее от φ и ψ и при всех достаточно малых значениях $T > t_0$ удовлетворяющее условию

$$k < 1. \tag{43}$$

В самом деле, в силу липшецевости функции *f* для всех значений $t_0 \le t \le T$ и $t_0 \le \tau \le T$

$$| f_l(t,\tau,x(\tau),h(\tau)) - f_l(t,\tau,y(\tau),g(\tau)) | \le$$
$$\le \lambda(| x(\tau) - y(\tau) | + | h(\tau) - g(\tau) |), \quad l = 1,\ 2,\ 3. \tag{44}$$

Поэтому

$$\left| \int_t^T [f_3(t,\tau,x(\tau),h(\tau)) - f_3(t,\tau,y(\tau),g(\tau))] d\tau \right| \le$$
$$\le \lambda[\int_t^T | x(\tau) - y(\tau) | d\tau + \int_t^T | h(\tau) - g(\tau) | d\tau]. \tag{45}$$

Но

$$\int_t^T | x(\tau) - y(\tau) | d\tau \le \int_t^T | \varphi(\tau) - \psi(\tau) | d\tau \tag{46}$$

и

$$\int_t^T | h(\tau) - g(\tau) | d\tau \le \int_t^T | \varphi(\tau) - \psi(\tau) | d\tau. \tag{47}$$

Тогда, если

$$h^*(t) = H(t)h_0 + \int_t^T f_3(t,\tau,x(\tau),h(\tau)) d\tau$$

и

$$g^*(t) = H(t)h_0 + \int_t^T f_3(t,\tau,y(\tau),g(\tau)) d\tau,$$

то из неравенств (45) – (47) следует, что

$$\left\| h^* - g^* \right\| \le 2\lambda(T - t_0) \left\| \varphi - \psi \right\|. \tag{48}$$

С другой стороны, в силу неравенства (44)

$$\left| \int_{t_0}^t \left\{ f_1(t,\tau,x(\tau),h(\tau)) - f_1(t,\tau,y(\tau),g(\tau)) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_t^T \left[f_2(\tau,s,x(s),h(s)) - f_2(\tau,s,y(s),g(s)) \right] ds \right\} d\tau \right| \le$$
$$\le \lambda \int_{t_0}^t \left[| x(\tau) - y(\tau) | + | h(\tau) - g(\tau) | + \right.$$
$$\left. + \int_t^T (| x(s) - y(s) | + | h(s) - g(s) |) ds \right] d\tau. \tag{49}$$

Но

$$\int_{t_0}^{t} |x(\tau)-y(\tau)|d\tau \le \int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau)-\psi(\tau)|d\tau \tag{50}$$

и

$$\int_{t_0}^{t} |h(\tau)-g(\tau)|d\tau \le \int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau)-\psi(\tau)|d\tau. \tag{51}$$

Тогда, если

$$x^*(t) = X(t)c + \int_{t_0}^{t}\left[f_1(t,\tau,x(\tau),h(\tau)) + \int_{t}^{T} f_2(\tau,s,x(s),h(s))ds \right]d\tau$$

и

$$y^*(t) = X(t)c + \int_{t_0}^{t}\left[f_1(t,\tau,y(\tau),g(\tau)) + \int_{t}^{T} f_2(\tau,s,y(s),g(s))ds \right]d\tau,$$

то из неравенств (46), (47) и (49) – (51) следует, что

$$\left\| x^* - y^* \right\| \le 2\lambda((T-t_0)+1)(T-t_0)\left\|\varphi-\psi\right\|. \tag{52}$$

При этом, согласно неравенству треугольника, несложно заметить, что

$$\left\|\varphi^* - \psi^*\right\| \le \left\|x^* - y^*\right\| + \left\|h^* - g^*\right\|. \tag{53}$$

Поэтому, объединяя неравенства (48), (52) и (53), окончательно получаем, что

$$\left\|\varphi^* - \psi^*\right\| = \left\|F\varphi - F\psi\right\| \le 4\lambda((T-t_0)+1)(T-t_0)\left\|\varphi-\psi\right\|.$$

Таким образом, если

$$4\lambda((T-t_0)+1)(T-t_0) < 1, \tag{54}$$

то, полагая

$$k = 4\lambda((T-t_0)+1)(T-t_0),$$

видим, что при выполнении условия (54) выполнены также и условия (42) и (43). Сказанное означает, что существует такое действительное число λ_0, что при $0 < \lambda \le \lambda_0$ выполняются условия (41) и (54) и обеспечивается выполнение требований, предъявляемых к (40), (42) и (43). Поэтому везде в дальнейшем будем считать число T заданным столь малым, что неравенства (41) и (54) для него выполнены.

Для всех значений $t_0 \le t \le T$ и $N = 0, 1, 2, \ldots$ положим

$$\varphi_N(t) = (x_N(t), h_N(t))$$

и построим последовательность функций

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N, \ldots, \tag{55}$$

определенных и непрерывных на отрезке $[t_0, T]$, в силу системы (33), (34), приняв

$$\varphi_{N+1} = F\varphi_N, \quad N = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{56}$$

и

$$\varphi_0(t) \equiv (c, h_0). \tag{57}$$

Поскольку функция (57) принадлежит к множеству Ω_T, то согласно равенству (56) все функции последовательности (55) также принадлежат к Ω_T. Рассмотрим функциональное уравнение

$$\varphi = F\varphi, \tag{58}$$

в котором в силу условий (42), (43) F является сжимающим оператором, отображающим множество Ω_T в себя. Поэтому уравнение (58) имеет на множестве Ω решение φ^*, которое может быть получено по формуле

$$\varphi^*(t) = \lim_{N\to\infty} \varphi_N(t), \tag{59}$$

где сходимость равномерна на отрезке $[t_0, T]$ (см., например, [7, с. 165]). Но, так как по построению

$$h_0 = Pz(T),$$

то согласно (57) последовательность (56) удовлетворяет начальным приближениям (26) и (27). Поэтому из равенств (21) и (59) следует существование функций $u^*(t)$ и $x^*(t)$, построенных по формулам

$$\lim_{N\to\infty} u_N(t) = u^*(t) \tag{60}$$

и

$$\lim_{N\to\infty} x_N(t) = x^*(t), \tag{61}$$

где сходимость равномерна на отрезке $[t_0, T]$. Поэтому функция $x^*(t)$ является соответствующим $u^*(t)$ решением уравнения (1) с начальным условием

$$x^*(t_0) = c.$$

При этом уравнение (24) с граничным условием (25) переходит в уравнение (29) с граничным условием (30), а закон управления (21) – в (28). Более того, по построению

$$\lim_{N\to\infty} J_N(u_N) = J(u^*)$$

и

$$J_N(u_N) \le J_N(u)$$

для всех $u \in L_2^T$, откуда и следует, что для каждой функции $u \in L_2^T$

$$\lim_{N\to\infty} J_N(u_N) = J(u^*) \le \lim_{N\to\infty} J_N(u),$$

то есть $u^*(t)$ – оптимальное управление в задаче (1) – (3).

Таким образом, теорема 1 доказана.

Замечание. Необходимо отметить, что автономность системы (1) и постоянство матриц Q и R в настоящей работе фактически нигде не используется и приняты исключительно для простоты обозначений. В любом случае решение задачи (1) – (3) может быть найдено из тривиального решения вспомогательных линейно-квадратичных задач по формулам (60), (61), а существование решения и предельного перехода по построению гарантировано.

4. Общий случай

Вновь рассмотрим задачу о минимизации функционала (4) при ограничении (5). Поскольку для любых действительных ($n\times n$)- и ($n\times m$)-матриц A и B

$$g(x,u) \equiv Ax + Bu + \left[g(x,u) - Ax - Bu\right],$$

то, как легко видеть, в качестве тривиального следствия теоремы 1 справедлива теорема 2.

Теорема 2. *Пусть A и B – произвольные действительные ($n\times n$)- и ($n\times m$)-матрицы. Тогда для каждой точки (t_0, c) пространства R^{1+n} найдется такое действительное число λ_0, что для всех значений $0 < \lambda \le \lambda_0$ задача (4), (5) имеет решение $x^*(t), u^*(t)$. Более того, оказывается, что при $t_0 \le t \le T$*

$$u^*(t) = R^{-1}B'[h(t) - K(t)x^*(t)],$$

где $h(t)$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot h(t) = -[A - BR^{-1}B'K(t)]'h(t) - Qz(t) + K(t)[g(x^*(t), u^*(t)) - Ax^*(t) - Bu^*(t)],$$

с граничным условием

$$h(T) = Pz(T).$$

Замечание. Весьма важным представляется то, что согласно теоремам 1 и 2 решение каждой из задач (1) – (3) или (4), (5) всегда дается нелинейным законом управления с обратной связью. Более того, из доказательства теоремы 1 видно, что если на произвольном отрезке $[t_0, T]$ схема (19) – (27) в силу каких-либо обстоятельств сходится (метод последовательных приближений Пикара), то она сходится именно к решению задачи (1) – (3).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №09-01-00655, 10-07-00136).

Список литературы

1. Атанс, М. Оптимальное управление / М. Атанс, П. Фалб. – М. : Машиностроение, 1968. – 764 с.
2. Ли, Л.Р. Введение в теорию оптимального управления / Л.Р. Ли, Л. Маркус. – М. : Наука, 1972. – 574 с.
3. Беллман, Р. Процессы регулирования с адаптацией / Р. Беллман. – М. : Наука, 1964. – 359 с.
4. Successive approximation and suboptimal control of systems with separeted linear part / A.P. Afanas'ev [and others] // Appl. Comp. Math. – 2003. – V. 2, No. 1. – P. 48–56.
5. On a suboptimal control of nonlinear systems via quadratic criteria / A.P. Afanas'ev [and others] // Appl. Comp. Math. – 2004. – V. 3, No. 2. – P. 158–169.
6. Афанасьев, А.П. Об оптимальном управлении нелинейными системами по квадратичному критерию / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба // Тр. ИСА РАН. – 2008. – Т. 32. – С. 49–62.
7. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – М. : Наука, 1970. – 331 с.

Optimal Control over Single-Class of Nonlinear Systems via Quadratic Criterion

A.P. Afanasyev[1], S.M. Dzyuba[2], A.N. Pchelintsev[2], S.M. Lobanov[3]

Institute of System Analysis of Russian Academy of Sciences (1),
Departments "Distributed Computer Systems" (2),
"Information Systems and Data Protection"(3),
Tambov State Technical University;
sdzyuba@mail.tambov.ru

Key words and phrases: feedback control law; method of successive approximations; nonlinear system.

Abstract: The paper presetns the theorem of solutions to the general problem of stabilization for single-class of nonlinear systems. The feedback control law is the solution to this problem. The scheme of consecutive approximations allowing to obtain this law is established.

Über die Optimalsteuerung von einer Klasse der nichtlinearen Systeme nach dem quadratischen Ktiterium

Zusammenfassung: Es ist das Theorem der Existenz der Lösungen der Gesamtaufgabe der Stabilisierung für eine Klasse der nichtlinearen Systeme angeführt. Es ist gezeigt, daß die Lösung dieser Aufgabe durch das Steuerungsgesetz mit der Rückverbindung verwircklicht wird. Es ist das Schema der konsekutiven Approximationen, das dieses Gesetz zu erhalten erlaubt, festgestellt.

Sur la commande optimale d'une classe des systèmes non-linéaires d'après le critère quadratique

Résumé: Est cité le théorème de l'existance de la solution d'un problème commun de la stabilisation pour une classe des systèmes non-linéaires. Est montré que la solution de ce problème est donnée par la loi de la commande avec feedback. Est établi le schéma des approximations consécutives permettant d'obtenir cette loi.

Авторы: ***Афанасьев Александр Петрович*** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий Центром Грид-технологий и распределенных вычислений Института системного анализа РАН; ***Дзюба Сергей Михайлович*** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Распределенные вычислительные системы»; ***Пчелинцев Александр Николаевич*** – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры «Распределенные вычислительные системы»; ***Лобанов Сергей Михайлович*** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Информационные системы и защита информации», ГОУ ВПО «ТГТУ».

Рецензент: ***Куликов Геннадий Михайлович*** **–** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и механика», ГОУ ВПО «ТГТУ».
